Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Горно-Алтайский государственный университет»
Кафедра алгебры, геометрии
и методики преподавания математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методический комплекс

Для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению
010100 Математика

Горно-Алтайск
РИО Горно-Алтайского госуниверситета
2009

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Горно-Алтайского государственного университета

УДК 512.64
ББК 22.14
П88

Линейная алгебра и геометрия: учебно-методический комплекс (для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению 010100 Математика) / Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2009. – 124 с.

Составители:
Пуркина В.Ф., кандидат педагогических наук,
доцент кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета
Кайгородов Е. В., ст. лаборант
кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета
Рецензенты:
Кириченко Т. Ф., кандидат педагогических наук, доцент
кафедры алгебры и МПМ Санкт-Петербургского
государственного педагогического университета
им. А. И. Герцена
Деев М. Е., кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета

Пособие содержит учебно-методические материалы по дисциплине «Линейная алгебра и геометрия» для студентов дневного отделения физико-математического факультета I курса по направлению «010100 Математика» и рассчитано на 1 семестр. Дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» является общепрофессиональной дисциплиной федерального компонента ОПД Ф.04 для данного контингента студентов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КВАЛИФИКАЦИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БАКАЛАВРА

Бакалавр математики подготовлен к выполнению деятельности в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления; программно-управленческому обеспечению научно-исследовательской, проектно-конструкторской и эксплуатациионно-управленческой деятельности.

Объектами профессиональной деятельности бакалавра математики являются научно-исследовательские центры, органы управления, образовательные учреждения, промышленное производство. Исходя из своих квалификационных возможностей, выпускник по направлению 010100 Математика может занимать должности: математик, инженер-программист (программист) и др. в соответствии с требованиями Квалификационного справочника должностей руководителей, бакалавров и других служащих, утвержденного постановлением Минтруда России от 21.08.98 № 37.

2. НАБОР КОМПЕТЕНЦИЙ БАКАЛАВРА

После изучения курса «Линейная алгебра и геометрия» студенты должны:

- овладеть основными методами современной линейной алгебры;
- приобрести опыт использования алгебраических методов в процессе решения задач смежных математических дисциплин (геометрии, мат. анализа и т. д.)
- получить представление о роли линейной алгебры в системе математического знания и перспективах ее применения в естественных и гуманитарных науках.

3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» является общепрофессиональной дисциплиной федерального компонента. Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса дневных отделений физико-математических факультетов по направлению «010100 Математика» и рассчитано на один семестр.

3.1. Цели и задачи дисциплины

1) Познакомить студентов 1 курса с основными понятиями и методами современной линейной алгебры;

2) Научить применять их в процессе решения различных задач;
3) Раскрыть роль современной линейной алгебры в системе математического знания;
4) Сформировать у студентов алгебраическую составляющую математической культуры.

3.2. Обязательные требования к минимуму содержания дисциплины

Конечномерное линейное пространство. Подпространство. Линейная оболочка. Сумма и пересечение линейных подпространств. Линейные многообразия. Линейная зависимость конечной системы векторов в пространстве R^n, ее основные свойства. База R^n, координаты вектора в разных базах, изоморфизм линейных пространств.

Евклидовы пространства. Скалярное умножение векторов в линейном пространстве. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональные системы, их свойства, процесс ортогонализации.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Изоморфизм пространств Hom (V,V) и $M_{nn}(F)$. Обратимые линейные операторы. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Характеристический многочлен и теорема Гамильтона-Кели. Корневые пространства. Теорема о корневом разложении, теорема Жордана. Критерий подобия матриц. Классификация линейных операторов.

3.3. Распределение часов

Семестр	Учебные занятия						Контроль
	Общий объем	В том числе					
		аудиторные				Самост. работа	
		всего	из них				
			лекции	практич.	лабор.		
2	200	116	58	58	-	84	экз.

3.4. Технологическая карта учебного курса «Линейная алгебра и геометрия»

№ п/п	Темы	Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. занятия
			лекции	практ.	
Модуль 1					
1	Конечномерные линейные пространства	60	18	18	24
Модуль 2					
2	Евклидовы пространства	48	12	12	24
Модуль 3					
3	Линейные операторы	92	28	28	36
Форма итогового контроля		Экзамен			

3.5.Содержание дисциплины

Конечномерные линейные пространства

Примеры конечномерных линейных пространств. Подпространства. Линейные многообразия. Линейная зависимость конечной системы векторов в пространстве R^n, ее основные свойства. База и размерность. Координаты вектора в разных базах.

Евклидовы пространства

Скалярное умножение векторов в линейном пространстве. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации.

Линейные операторы

Линейное пространство операторов. Матрица линейного оператора, обратимые линейные операторы. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Жорданова форма линейного оператора.

3.5.1. Лекционный курс — 58 часов

Лекция №1

Понятие векторного пространства над полем. Простейшие свойства векторных пространств.

Лекция №2

Подпространства векторного пространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка множества векторов.

Лекция №3

Пересечение и сумма векторных подпространств. Прямая сумма.

Лекция №4

Критерий прямой суммы подпространств. Линейные многообразия, их свойства.

Лекция №5

Линейная зависимость и независимость системы векторов арифметического n–мерного векторного пространства.

Лекция №6

Свойства линейной зависимости системы векторов. Базис и ранг системы векторов. Базис пространства.

Лекция №7

Конечномерное векторное пространство, его базис и размерность. Свойства размерности векторного пространства. Теорема о размерности суммы подпространств. Теорема о размерности прямой суммы подпространств.

Лекция №8

Изоморфизм конечномерных векторных пространств. Свойства изоморфизма. Изоморфизм произвольного n – мерного векторного пространства и арифметического пространства R^n.

Лекция №9

Координаты вектора. Координаты вектора в разных базисах пространства. Преобразование координат при изменении базиса.

Лекция №10

Скалярное умножение в векторном пространстве. Евклидовы пространства.

Лекция №11

Унитарные пространства. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского.

Лекция №12

Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис.

Лекция №13

Изоморфизм евклидовых пространств.

Лекция №14

Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора.

Лекция №15

Процесс ортогонализации системы векторов.

Лекция №16

Понятие линейного оператора пространства V над полем F. Ядро ($Ker\ \varphi$) и образ ($Im\ \varphi$), дефект и ранг линейного оператора.

Лекция №17

Теорема о связи размерностей $Ker\ \varphi$ и $Im\ \varphi$ линейного оператора.

Лекция №18

Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов Hom(V,V).

Лекция №19

Матрица линейного оператора. Связь между вектором x и его образом $\varphi(x)$.

Лекция №20

Изоморфизм пространства линейных операторов и матриц линейных операторов.

Лекция №21

Связь между матрицами линейных операторов в различных базисах. Обратимые линейные операторы.

Лекция №22

Обратимые линейные операторы. Инвариантные подпространства.

Лекция №23

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, его характеристический многочлен.

Лекция №24

Собственные подпространства оператора. Связь их размерности с кратностью корней характеристического многочлена.

Лекция №25

Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов. Необходимые и достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Лекция №26

Жорданова клетка. Понятие о нормальной жордановой форме.

Лекция №27

Понятие жордановой нормальной формы. Инвариантные корневые подпространства.

Лекция №28

Теорема Жордана о существовании и единственности жордановой нормальной формы.

Лекция №29

Приведение матрицы к жордановой нормальной форме. Примеры.

3.5.2. Практические занятия — 58 часов

Практическое занятие №1

Понятие векторного пространства над полем. Примеры линейных пространств.

Практическое занятие №2

Подпространства векторного пространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка системы векторов.

Практическое занятие №3

Сумма линейных подпространств. Примеры.

Практическое занятие №4

Пересечение линейных подпространств

Практическое занятие №5

Линейные многообразия, их свойства.

Практическое занятие №6

Линейная зависимость и независимость системы векторов арифметического n–мерного векторного пространства. Базис и ранг системы векторов. Базис пространства.

<u>Практическое занятие №7</u>

Свойства линейной зависимости системы векторов арифметического n–мерного векторного пространства.

<u>Практическое занятие №8</u>

Базис и размерность суммы и пересечения векторных подпространств.

<u>Практическое занятие №9</u>

Изоморфизм линейных пространств.

<u>Практическое занятие №10</u>

Координаты вектора в разных базисах пространства.

<u>Практическое занятие №11</u>

Преобразование координат при изменении базиса. Матрица перехода от старого базиса к новому.

<u>Практическое занятие №12</u>

Скалярное умножение в векторном пространстве. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского.

<u>Практическое занятие №13</u>

Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис.

<u>Практическое занятие №14</u>

Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора.

<u>Практическое занятие №15</u>

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора. Процесс ортогонализации системы векторов.

<u>Практическое занятие №16</u>

Контрольная работа №1 по темам «Линейные многообразия», «Пересечение и сумма векторных подпространств», «Преобразование координат при изменении базиса».

<u>Практическое занятие №17</u>

Понятие линейного оператора пространства V над полем F. Матрица линейного оператора.

<u>Практическое занятие №18</u>

Ядро ($Ker\ \varphi$) и образ ($Im\ \varphi$), дефект и ранг линейного оператора.

Практическое занятие №19

Теорема о связи размерностей $Ker\ \varphi$ и $Im\ \varphi$ линейного оператора.

Практическое занятие №20

Операции над линейными операторами и их свойства

Практическое занятие №21

Связь между матрицами линейных операторов в различных базисах.

Практическое занятие №22

Действия над матрицами линейных операторов в различных базисах.

Практическое занятие №23

Обратный оператор. Способы его вычисления.

Практическое занятие №24

Инвариантные подпространства

Практическое занятие №25

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, его характеристический многочлен.

Практическое занятие №26

Собственные подпространства оператора. Связь их размерности с кратностью корней характеристического многочлена.

Практическое занятие №27

Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов. Необходимые и достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Практическое занятие №28

Жорданова форма матрицы линейного оператора.

Практическое занятие №29

Контрольная работа №2 по темам «Линейные операторы», «Собственные значения и собственные векторы линейного оператора».

3.5.3. Самостоятельная работа — 84 часа

Дисциплина «Линейная алгебра и геометрия» относится к циклу общематематических дисциплин согласно Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. В результате изучения данного курса осуществляется межпредметные связи с такими предметами, как элементы математической логики, математический анализ, геометрия.

Успешное освоение курса требует напряженной самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя чтение лекций и рекомендованной литературы, решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях, разбор проблемных ситуаций, написание курсовых работ. Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций

Для активизации самостоятельной работы студентов и экономии времени, отводимого на лекционный курс, ряд тем выносится на самостоятельное изучение. Самостоятельная работа со студентами проводится в часы самостоятельной работы в форме консультаций. Распределение часов руководства самостоятельной работой учитывает важность рассматриваемой темы и возможную сложность при освоении ее студентами.

Самостоятельная работа студентов рассматривается как вид учебного труда, позволяющий целенаправленно формировать и развивать самостоятельность студента как личностное качество при выполнении различных видов заданий и проработке дополнительного учебного материала.

Для успешного выполнения расчетных заданий, написания рефератов и подготовки к коллоквиуму, помимо материалов лекционных и практических занятий, необходимо использовать основную и дополнительную литературу, указанную на стр. 120 настоящего пособия.

№	Темы	Кол-во часов	Формы отчетности	Сроки
1	Линейные преобразования и их матрицы	10	Реферат	февраль
2	Унитарные и евклидовы пространства	14	Коллоквиум	март
3	Перестановочные (коммутирующие) матрицы	10	Реферат	март
4	Группы, матрицы, линейные операторы	10	Реферат	апрель
5	Характеристический и минимальный многочлены	16	Расчетное задание	май
6	Жорданова нормальная форма матриц	24	Расчетное задание	май

3.5.4. Темы курсовых работ

1. Функции от матриц.
2. Нормы векторов и матриц.
3. Абелевы группы.
4. Конечные группы.
5. Свободные группы и многообразия.
6. Нильпотентные группы.
7. Классификация линейных операторов.
8. Кватернионы.
9. Измерения в линейном пространстве.
10. Метрические свойства линейного оператора.
11. Методы решения уравнений высших степеней.
12. Решение матричных уравнений.
13. Унитарные и евклидовы пространства.
14. Приложения жордановой нормальной формы матриц.
15. Матричные и функциональные уравнения.

4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение, примеры и свойства линейных пространств.
2. Подпространство линейного пространства. Критерий подпространства.
3. Линейная оболочка. Способы построения линейных подпространств.
4. Пересечение и сумма подпространств, основные свойства.
5. Прямая сумма подпространств.
6. Понятие линейного многообразия. Свойства линейных многообразий.
7. Линейная зависимость конечной системы векторов в арифметическом n-мерном векторном пространстве $\left\langle R^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\} \right\rangle$. Свойства линейной зависимости векторов.
8. Теорема о линейной зависимости системы, состоящей из более, чем n векторов в n-мерном векторном пространстве.
9. Основная теорема линейной зависимости в пространстве $\left\langle R^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\} \right\rangle$.
10. Базис и ранг конечной системы векторов в пространстве $\left\langle R^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\} \right\rangle$.
11. Теорема о базисах.
12. Конечномерное линейное векторное пространство $\left\langle V^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} \right\rangle$, его база и размерность.
13. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов конечномерного пространства до базиса этого пространства.
14. Размерность векторного пространства. Свойство размерности.

15. Теорема о нахождении размерности векторного пространства через размерности подпространств и их пересечения.
16. Изоморфизм конечномерных линейных пространств. Свойства изоморфизма.
17. Изоморфизм произвольных n-мерных векторных пространств.
18. Координаты вектора x в разных базисах пространства R^n и их связь.
19. Скалярное произведение в линейном векторном пространстве. Евклидово пространство E^n.
20. Норма вектора и ее свойства. Угол между двумя векторами.
21. Ортогональные системы векторов. Теорема об ортогональной системе ненулевых векторов. Ортогональный базис пространства.
22. Ортонормированный базис евклидова пространства. Теорема о существовании ортонормированного базиса.
23. Изоморфизм n-мерных евклидовых пространств.
24. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ подпространства L. Теорема о подпространстве $L^{\perp}$.
25. Теорема о прямой сумме подпространств $L^{\perp}$ и L.
26. Определение линейного оператора. Примеры. Матрица линейного оператора.
27. Образ, ранг, ядро и дефект линейного оператора. Теоремы о подпространствах $Ker\ \varphi$ и $Im\ \varphi$.
28. Теорема о связи размерностей линейного пространства V и подпространств $Ker\ \varphi$, $Im\ \varphi$.
29. Действия над линейными операторами.
30. Пространство линейных операторов.
31. Связь между координатными столбцами вектора x и его образа $\varphi(x)$.
32. Матрицы линейных операторов $\varphi+\psi,\ \lambda\varphi,\ \varphi\circ\psi$.
33. Теорема о биективности соответствия $\Phi : Hom(V,\ V) \to M_{nn}(F)$.

34. Теорема об изоморфизме пространства линейных операторов $\langle Hom(V,V),+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle$ и линейного пространства матриц $\langle M_{nn},+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}\rangle$.
35. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.
36. Обратимые линейные операторы.
37. Инвариантные подпространства.
38. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Одномерные инвариантные подпространства.
39. Характеристический многочлен. Собственные подпространства векторного пространства.
40. Теорема о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям. Вид матрицы линейного оператора в базисе из собственных векторов.
41. Условие приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.
42. Понятие жордановой нормальной формы. Критерий приводимости матрицы к жордановой нормальной форме (ЖНФ) над произвольным полем.
43. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы (собственные значения матрицы и их кратность; количество и размер жордановых клеток; жорданов базис).
44. Функции от матриц. Алгоритм нахождения функции от матрицы.

5. ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ЕОМЕТРИИ

ГЛАВА 1. Конечномерные линейные пространства.

Основные знания, умения и навыки, которыми должны овладеть студенты в процессе изучения данной темы:

- знать определения конечномерного линейного пространства V над полем F и его подпространства;
- уметь доказывать, что некоторое множество векторов является линейным пространством и подпространством над указанным полем, относительно заданных операций на этом множестве;
- уметь строить подпространства в заданном пространстве, находить сумму и пересечение подпространств, определять их базис и размерность;
- уметь находить линейные многообразия, векторы сдвига и направляющие подпространства;
- уметь доказывать различными способами линейную зависимость (независимость) конечной системы векторов в линейном пространстве;
- определять базис и размерность данного пространства и его подпространств;
- уметь доказывать изоморфность двух пространств U и V над полем F;
- определять координаты вектора в любом из базисов пространства V;
- знать связь между координатами одного и того же вектора в разных базах.

§ 1. Определение. Свойства. Примеры линейных пространств.

Пусть V - множество, состоящее из элементов произвольной природы. Будем обозначать его элементы малыми буквами латинского алфавита и называть векторами.

Пусть дано произвольное поле $F=\langle F,+,\circ\rangle$, элементы которого будем обозначать малыми буквами греческого алфавита и называть скалярами.

Зададим на множестве V бинарную операцию $+:V\times V\to V$, $+:\langle a,b\rangle\mapsto c$, где $a,b,c\in V$ и назовем ее сложением векторов.

Определим также внешнюю композицию $\omega:F\times V\to V$, $\omega_\lambda:(\lambda,a)\mapsto \lambda a$ и будем называть ее умножением скаляра на вектор.

Замечание: Эта композиция не является операцией, но если каждый раз фиксировать скаляр, то отображение $\omega_\lambda:(\lambda,a)\mapsto \lambda a$ можно рассматривать как унарную операцию, заданную на множестве *V*.

Определение: *Алгебра* $V=\langle V,+,\{\omega_\lambda|\lambda\in F\}\rangle$ *называется линейным (векторным) пространством над полем F, если выполняются следующие условия (аксиомы):*

1-4. $\langle A,+\rangle$ *- абелева группа.*

5. $\forall\ \alpha,\beta\in F\ \ \forall\ a\in V,\ (\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$ *(умножение на скаляр ассоциативно)*

6. $\forall\ \alpha\in F\ \ \forall\ a,b\in V,\ \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ *(умножение на скаляр дистрибутивно по отношению к сложению векторов)*

7. $\forall\ \alpha,\beta\in F\ \forall\ a\in V,\ (\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ *(умножение вектора на скаляр дистрибутивно по отношению к сложению скаляров)*

8. $\forall\ a\in V,\ 1\cdot a=a.$

Замечание 1*:* Если *F=R,* то *V* над *R* называют вещественным линейным пространством, если *F=C,* то *V* над С называют комплексным линейным пространством.

Замечание 2: Из определения следует, что любое линейное (векторное) пространство *V* над *F* прежде всего является аддитивной абелевой группой, поэтому все свойства абелевых групп справедливы будут и для линейных пространств.

В следующей теореме сформулируем простейшие следствия из определения *V* над *F*.

Теорема 1*: Если V линейное пространство над полем F, то* $\forall\ a.b\in V,\ \forall\ \alpha,\beta\in F$*:*

а) если $(a + b = a) \Rightarrow (b = \theta)$

б) если $(a + b = \theta) \Rightarrow (b = - a)$

в) если $(\alpha a = \alpha b)\ \&\ (\alpha \neq 0) \Rightarrow (a = b)$

г) если $(\alpha a = \beta a) \Rightarrow (\alpha = \beta)$

д) если $(\alpha a = 0) \Rightarrow (\alpha = O\,) \vee (a = \theta)$

е) $0\cdot a = \theta$

ж) $\alpha \cdot \theta = \theta.$

Для доказательства всех этих утверждений используются свойства аддитивной группы линейного пространства и другие аксиомы.

а) Действительно, если $(a + b = a \Rightarrow (b = \theta)$, так как $<V,+>$ - абелева группа, в которой существует единственный $\theta \in V$: $\forall a \in V\ a + \theta = a$

б) Аналогично в группе $<V,+>$ $\forall a \in V\ \exists !\ (-a) \in V$: $a + (-a) = (-a) + a = \theta$, следовательно, $b = - a$.

в) если $(\alpha a = \alpha b)\ \&\ (\alpha \neq 0) \Rightarrow (a = b)$, так как $a \in F$, а F - поле, то в нем для $\forall\ \alpha$ существует α^{-1}: $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$ и тогда

$\alpha^{-1}(\alpha a)= \alpha^{-1}(\alpha b) \Rightarrow (\alpha^{-1}\cdot\alpha)a=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)b \Rightarrow (a = b)$.

е) $0\cdot a=\theta$. Действительно, $0\cdot a=(0 + 0)a = 0\cdot a+0\cdot a \Rightarrow$ по свойству (a), что $0\cdot a = \theta$

Самостоятельно докажите остальные свойства.

Рассмотрим примеры линейных векторных пространств, с которыми мы уже знакомы (см. гл1-5).

1. $<R^n,+,\{\omega_\lambda|\lambda\in R\}>$ - арифметическое векторное пространство, в котором любой вектор $a \in R^n$ представляет собой упорядоченный набор из n - действительных чисел, то есть $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in R$ $(i=1,2,...,n)$; $a+b=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$; $\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$.

2. $<M_{nn}(R),+,\{\omega_\lambda\ |\lambda\in R\}>$ - линейное пространство квадратных матриц n-го порядка над полем R. Любой вектор в этом пространстве представляет собой квадратную матрицу вида $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ . & . & . \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. $A+B=||\alpha_{ik}||+||\beta_{ik}||=||\alpha_{ik}+\beta_{ik}||$, $i,k=0,1,2,...,n$; $\lambda\cdot A=\lambda||\alpha_{ik}||=||\lambda\alpha_{ik}||$.

3. $<\Phi,+,\{\omega_\lambda\ |\lambda\in R\}>$ - линейное пространство функций от одной переменной над полем R. Любой вектор этого пространства - есть функция f: $R \to R$, для которой $\forall\ x\in R\ \exists\ y\in R$: $y=f(x)$.

Операция сложения функций f и g определяется через функцию $h=f+g$, значение которой при $\forall\ (x=\alpha)\in R$ равно $f(\alpha)+g(\alpha)$. Также определяется умножение функции f на скаляр λ. Полученная при этом функция λf при $\forall\ (x=\alpha)\in R$ принимает значения $\lambda f(\alpha)$.

Самостоятельно проверьте выполнение всех аксиом в определении линейного пространства.

4. $<\theta,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}>$ - нулевое линейное пространство. Его единственным вектором является нулевой вектор θ.

5. $<C,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}>$ - линейное пространство, где $\forall\, z \in C$ $z=x+iy$, операция (+) - сложение комплексных чисел, ω_λ - умножение комплексного числа на действительное число.

На этом примере рассмотрим алгоритм решения всех задач такого типа.

1 шаг: Проверяем замкнутость множества C относительно указанных операций:

а) $\forall\, z_1, z_2 \in C,\ z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]\in C$ (замкнутость C относительно операции (+))

б) $\forall\, z \in C\ \forall\, \lambda \in R,\ \lambda z=\lambda(x+iy)= \lambda x+i\lambda y=z_1 \in C$ (замкнутость C относительно умножения на скаляр).

2 шаг: Проверяем, что $<C,+>$ абелева группа. Так как $<C,+,\cdot>$ - поле, то $<C,+>$ - абелева группа, то есть

а) $\forall\, z_1, z_2 \in C, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) $\forall\, z_1, z_2, z_3, \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

в) $\exists\, (z_0 = 0 + 0i)\colon\ \forall\, (z = x + iy),\ z_0 + z = z + z_0 = z$

г) $\forall\, (z = x + iy)\quad \exists\, (- z = -x - iy)\colon\ z + (-z) = (-z) + z = z_0$

3 шаг: Проверяем, что остальные четыре (условия) аксиомы в определении линейного пространства также выполняются:

а) $\forall\, \alpha, \beta \in R\ \forall\, z \in C,\ (\alpha\cdot\beta)z = \alpha(\beta z)$.

Действительно, $(\alpha\beta)z=(\alpha\beta)(x+iy)=(\alpha\beta)x+(\alpha\beta)iy$,

$\alpha(\beta z)= \alpha[\beta(x+iy)]= \alpha[\beta x+\beta iy]= \alpha\beta x+\alpha\beta iy$.

б) $\forall\, \alpha \in R\ \forall\, z_1, z_2 \in C\ \alpha(z_1+z_2)=\alpha z_1+\alpha z_2$.

Действительно,

$\alpha(z_1+z_2)=\alpha[(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)]=\alpha[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]=\alpha(x_1+x_2)+$ $+i\alpha(y_1+y_2)$;

$\alpha z_1+\alpha z_2=\alpha(x_1+iy_1)+\alpha(x_2+iy_2)=(\alpha x_1+i\alpha y_1)+(\alpha x_2+i\alpha y_2)=$ $=(\alpha x_1+\alpha x_2)+i\alpha(y_1+y_2)=\alpha(x_1+x_2)+i\alpha(y_1+y_2)$.

в) $\forall\, \alpha,\beta\in R\ \forall z,\ (\alpha+\beta)z=\alpha z+\beta z$.

Действительно, $(\alpha+\beta)z=(\alpha+\beta)(x+iy)=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)iy$;

$\alpha z+\beta z=\alpha(x+iy)+\beta(x+iy)=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)iy$.

г) $\forall\, z\in C,\ 1\cdot z = z$.

§ 2. Подпространство. Линейная оболочка.

Пусть дано линейное пространство V над полем F и $U \subseteq V$.

***Определение**: Подалгебра $<U,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$ алгебры*

$$<V,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$$

называется линейным подпространством пространства V над полем F, если U над F само является линейным пространством.

Замечание: Из определения следует,

1) что подпространство U определяется над тем же полем, что и пространство V;

2) Множество U замкнуто относительно операций (+) и ω_λ, то есть

$$\left.\begin{array}{r}\forall a,b \in U, (a+b) \in U \\ \forall \lambda \in F\ \forall a \in U, \lambda a \in U\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c}\forall \alpha, \beta \in F\ \forall a,b \in U, \\ (\alpha a + \beta b) \in U,\end{array}$$ то есть

множество U замкнуто относительно любой линейной комбинации векторов a и b.

Покажите самостоятельно, что эти условия являются достаточными для того, чтобы множество $U \subseteq V$ было подпространством (то есть, все аксиомы в определении линейного пространства выполняются).

Пример 1: Пусть дано пространство $<R^n,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$, его подпространствами будут:

а) $<R,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$ - пространство одномерных векторов, лежащих на любой прямой, проходящей через начало координат;

б) $<R^2,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$ - пространство двумерных векторов, лежащих на плоскости, проходящей через начало координат;

в) $<R^3,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$ - пространство трехмерных векторов;

г) $<R^4,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$ и т.д.

Пример 2: Пусть дано линейное пространство

$$<M_{nn}(R),+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>.$$

Докажем, что множество $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$ является его подпространством.

Доказательство:

1 шаг: Проверяем, что $U \subseteq M_{nn}(R)$, $M_{nn}(R)$ - это множество квадратных матриц n-го порядка, U - состоит из квадратных матриц второго порядка, то есть $U \subset M_{nn}(R)$.

2 шаг: Проверяем замкнутость множества U относительно операции сложения матриц и умножения матрицы на скаляр.

$$\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in U, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Полученная матрица принадлежит множеству U, следовательно, U замкнуто относительно матричного сложения.

$$\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U \quad \forall \lambda \in R, \lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix}$$

Эта матрица также принадлежит множеству U, то есть U замкнуто относительно операции умножения матрицы на скаляр.

Общий вывод: U подпространство пространства $M_{nn}(R)$ над R. Символически это записывают так $U<V$.

Пример 3: Пусть дано линейное пространство $<V,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$. Существует общий способ построения подпространств данного пространства. Он заключается в том, что нужно взять любую конечную систему векторов пространства V, например, $a_1,a_2,...,a_k$ и построить $\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_k a_k\}$ = $L(a_1,a_2,...,a_k)$. Иначе это множество называют линейной оболочкой системы векторов $a_1,a_2,...,a_k$. Докажем, что $L(a_1,a_2,...,a_k) < V$.

Доказательство:

1 шаг: $\forall\ x \in L(a_1,a_2,...,a_k)$ имеет вид: $x = \lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_k a_k$ и принадлежит пространству V, то есть $L(a_1,a_2,...,a_k) < V$.

2 шаг: $\forall\ x,y \in L(a_1,a_2,...,a_k)$, $(x+y) \in L(a_1,a_2,...,a_k)$.

а) Действительно, пусть $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$,
$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_k a_k$, тогда
$x + y = (\alpha_1+\beta_1)a_1 + (\alpha_2+\beta_2)a_2 + ... + (\alpha_k+\beta_k)a_k \in L(a_1,a_2,...,a_k)$.

б) $\forall\ x \in L(a_1,a_2,...,a_k)\ \forall\ \lambda \in F$, $\lambda x \in L(a_1,a_2,...,a_k)$.

Действительно, если $x=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_k a_k$, то $\lambda x=\lambda\alpha_1 a_1+\lambda\alpha_2 a_2+...+ +\lambda\alpha_k a_k \in L(a_1,a_2,...,a_k)$.

Итак, $L(a_1,a_2,...,a_k) < V$.

Рассмотренный выше способ позволяет в любом пространстве построить подпространство. Например, пусть дано линейное пространство $<R^4,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}>$. Возьмем в этом пространстве систему векторов: $a_1=(1,0,1,-1)$, $a_2=(0,0,1,3)$, $a_3=(2,-1,0,1)$. Тогда $L(a_1,a_2,a_3)=\{\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3\}$ будет линейным подпространством пространства R^4.

Если взять другую систему векторов, например, $b_1=(3,-1,0,0)$, $b_2=(0,1,-1,2)$, то получим другое подпространство: $L(b_1b_2)<V$.

Понятно, что таким образом можно построить множество подпространств в заданном пространстве.

Приведенные выше рассуждения можно обобщить на случай произвольного подмножества $M\subset V$. Обозначив через $L(M)$ множество всех линейных комбинаций векторов из M, получим подпространство: $Z(M)=<L(M),+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in F\}>$, которое называют подпространством натянутым на множество M или порожденным множеством M.

§ 3. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма и ее свойства.

Другой способ построения линейных подпространств в пространстве V над полем F связан с понятиями суммы и пересечения линейных подпространств.

Пусть дано пространство $V=<V,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in F\}>$, $U_1<V$, $U_2<V$.

***Определение**: Пересечением подпространств U_1 и U_2 называется множество: $U_1\cap U_2 \overset{df}{=} \{x \mid x\in U_1 \;\&\; x\in U_2\}$.*

***Теорема 1**: Пересечение любой совокупности подпространств пространства V является подпространством пространства V.*

Доказательство:

Пусть $P=U_1\cap U_2\cap\ldots\cap U_n$, где все $U_i<V(i=1,2,\ldots,n)$. Докажем, что $P<V$. $\forall\ a,b\in P\Rightarrow(a,b)\in U_1 \;\&\; (a,b)\in U_2 \;\&\; \ldots \;\&\; (a,b)\in U_n$. Так как, $U_i<V$, то все они будут замкнуты относительно любой линейной комбинации векторов a и b, то есть $\forall\ \lambda,\beta\in F$ $(\lambda a+\beta b)\in U_1 \;\&\; (\lambda a+\beta b)\in U_2 \;\&\; \ldots \;\&\; (\lambda a+\beta b)\in U_n$.

Тогда, по определению операции пересечения множеств, будем иметь, что $(\lambda a+\beta b) \in P$, то есть $P< V$.

Пусть дано <u>конечное</u> число линейных подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_k$ пространства V.

Определение: *Суммой (объединением) подпространств* $U_1, U_2, \ldots, U_k < V$ *называется множество:*

$$S= U_1+U_2+\ldots+U_k \overset{df}{=} \{x \mid x=y_1+y_2+\ldots+y_k,\ y_i \in U_i,\ i=1,2,\ldots,k\}.$$

Теорема 2: *Сумма конечного числа линейных подпространств* $U_1, U_2, \ldots, U_k < V$ *- есть линейное подпространство пространства V.*

Докажите самостоятельно.

Свойства суммы и пересечения подпространств, непосредственно вытекающие из определений:

1) Если $(Z<V)$ & $(U<V)$, то $Z+U=U+Z$, $Z \cap U=U \cap Z$.

2) Если $(Z<V)$ & $(U \in V)$ & $(S<V)$, то $Z+(U+S)=(Z+U)+S$, $Z \cap (U \cap S)=(Z \cap U)+S$.

3) Если $Z<V$, то $Z+V=V$, $Z \cap V=Z$.

Определение: *Сумма* $S=L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \ldots \dot{+} L_k$, *где* $L_i<V$ $(i=l,2,\ldots,k)$ *называется прямой суммой линейных подпространств* $L_1, L_2, \ldots, L_k$, *если* $\forall\, x \in S$ *можно представить в виде:* $x=y_1+y_2+\ldots y_k$ *<u>единственным</u> образом.*

Из определения следует, что если $x=y_1+y_2+\ldots y_k$ и $x=z_1+z_2+\ldots z_k$, то будут справедливы равенства $(y_1=z_1)$ & $(y_2=z_2)$ &...&$(y_k=z_k)$.

Теорема 3: $S=U \dot{+} Z \Leftrightarrow U \cap Z=\{\theta\}$.

Доказательство:

<u>Необходимость:</u> Пусть S прямая сумма подпространств U и Z. Докажем, что $U \cap Z=\{\theta\}$.

Возьмем $\forall\ x \in U \cap Z \Rightarrow x \in U$ & $x \in Z \Rightarrow \begin{vmatrix} x+0=y \\ 0+x=y \end{vmatrix} \Rightarrow x=\theta$, так как сумма $S=U \dot{+} Z$ - прямая.

<u>Достаточн</u>ость: Пусть $U \cap Z=\{\theta\}$, докажем, что $S=U+Z$ - прямая.

Возьмем $x \in S = U + Z$, тогда $x=y_1+y_2$, *где* $y_1 \in U$ & $y_2 \in Z$.. Предположим, что (x) можно еще представить в виде: $x=z_1+z_2$, $z_1 \in U$, $z_2 \in Z$, тогда $(y_1-z_1)=(z_2-y_2)$. Разность $(y_1-z_1) \in U$, а $(z_2-y_2) \in Z$ по определению подпространств, но так как эти разности равны, то $(y_1-z_1) \in U \cap Z$ & $(z_2-y_2) \in U \cap Z$ по определению пересечения. По условию $U \cap Z=\{\theta)$, следовательно, $(y_1-z_1= \theta)$ &($z_2-y_2= \theta) \Rightarrow$ $(y_1=z_1)$&$(y_2=z_2)$, а значит сумма S - прямая.

***Теорема 4**: Если* $S=U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \ldots \dot{+} U_k$, *то* $\forall y_1 \in U_1$ $\forall y_2 \in U_2,\ldots,$ $\forall y_k \in U_k$ *из равенства* $y_1+y_2+\ldots+y_k=\theta \Rightarrow (y_1=\theta)$ & $(y_2=\theta)$ &...& & $(y_k=\theta)$.

Доказать самостоятельно.

Пример: Пусть дано пространство $<R^3,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$. Множество радиус-векторов плоскости XOZ и прямой OX будут подпространствами этого пространства U и Z, Тогда $U + Z = U$, $U \cap Z = Z$. Значит, сумма $S = U + Z$ не является прямой. $S = OX \dot{+} OY \dot{+} OZ$, т.к. $OX \cap OY \cap OZ = \{Q\}$.

§ 4. Линейные многообразия.

Дано пространство V над полем F, $Z<V$. На множестве V определим бинарное отношение: $\forall$ $a,b \in V$, $a f b \overset{df}{\Leftrightarrow} (a-b) \in Z$. Элементы, которые находятся в этом отношении, будем называть сравнимыми по подпространству Z.

***Теорема 1**: Отношение f сравнимости векторов по подпространству является отношением эквивалентных на множестве V.*

Действительно:

а) $\forall a \in V, (a-a)=\theta \in Z \Rightarrow afa$ (f- рефлексивно).

б) $\forall$ a, $b \in V$, если $(a-b) \in Z \Rightarrow (b-a) \in Z$ (по определению подпространства), тогда из $afb \Rightarrow bfa$ (то есть f- симметрично).

в) $\forall$ $a,b,c \in V$, если $(a-b) \in Z$ & $(b-c) \Rightarrow (a-b+b-c)=(a-c) \in Z$, то есть из того, что (afb)&$(bfc) \Rightarrow (afc)$ (f- транзитивно).

Итак, бинарное отношение f- есть отношение эквивалентности. Это отношение задает на множестве V

разбиение на классы эквивалентности, то есть фактор-множество.

***Определение**: Любой класс эквивалентности отношения сравнимости по подпространству Z называется линейным многообразием пространства V с направлением Z.*

Свойства линейных многообразий.

***Свойство 1**:* Любые два вектора будут принадлежать одному и тому же линейному многообразию с направлением Z, если их разность $(a-b)\in Z$ (это свойство следует непосредственно от определения отношения f).

***Свойство 2**:* Любые два линейных многообразия с направлением Z, либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Объединение всех линейных многообразий пространства V с направлением Z равно множеству V (это свойство следует из определения разбиения).

***Свойство 3**:* Если $Z<V$ и M - линейное многообразие с направлением Z, то $\forall\ a\in V,\ M=a+Z$.

Доказательство:

Нужно показать, что $(M\subset a+Z)\&(a+Z\subset M)$.

а) Докажем, что $M\subset a+Z$. Пусть $\forall\ a,b\in M \Rightarrow (a-b)\in Z \Rightarrow \exists\ l\in Z:\quad (a-b=l)\Rightarrow(a-l=b)\Rightarrow b\in(a+Z)\Rightarrow M\subset a+Z$.

б) Докажем, что $a+Z\subset M$ для $\forall\ l\in Z$.

Рассмотрим разность $(a+l)-a = l \in Z$, значит $(a+l)$ и a сравнимы по подпространству Z и $(a+l)\in M$ для $\forall\ l$, следовательно, $a+Z\subset M$. Так как, $(M\subset a+Z)\ \&\ (a+Z\subset M)\Rightarrow M = a+Z$.

Вектор (a) называют вектором сдвига, Z - направляющим подпространством.

Пример 1: Пусть дано линейное пространство $<R^2,+,\{\omega_\lambda\ |\lambda\in R\}>$, $R^1<R^2$. Тогда $\forall\ a\in R^2,\ M = a + R^1$ будет представлять из себя множество векторов плоскости, выходящих из начала координат, концы которых лежат на одной прямой.

Пример 2: Дана система линейных уравнений с n - переменными: (i) $\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n=\beta_i,\ \alpha_i\in$R, i=1,2,...,m. Для этой системы всегда можно записать соответствующую ей однородную систему (2): $\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n=0$. Мы уже знаем, что множество решений системы (2) относительно операции сложения и умножения на скаляр образует линейное пространство R^n. Кроме того, знаем, что любое решение системы (1) можно получить, если взять ее фиксированное решение (a) и складывать его со всеми решениями системы (2), то есть $M=a+R^n$. Мы видим, что множество решений системы (1) есть линейное многообразие с направляющим подпространством R^n.

§ 5. Линейная зависимость конечной системы векторов в пространстве R^n, ее основные свойства.

Пусть дано $\langle R^n,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}\rangle$. Выберем в этом пространстве конечную систему векторов: $\{a_1,a_2,\dots,a_k\} = S$.

Определение 1: *Система векторов S называется линейно зависимой, если существует ненулевой набор скаляров* $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$ *такой, что (1)* $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_ka_k=\theta$, $\theta=(0,0,\dots,0)$.

Замечание 1*:* Уравнение (1) называют уравнением (условием) линейной зависимости.

Замечание 2*:* Набор скаляров $\alpha_1,\alpha_2,..,\ \alpha_k$ является ненулевым решением уравнения (1).

Замечание 3*:* $\theta=(0,0,\dots,0)$ - линейно зависим, так как $\forall\ \alpha\in R$, $\alpha\neq0$ $\alpha\cdot\theta=\theta$.

Замечание 4*: С учетом замечания (1) и (2) можно говорить, что система* $\alpha_1,\alpha_2,..,\ \alpha_k$ *будет линейно зависимой, если существует ненулевое решение уравнения (1).*

Определение 2: *Система S называется линейно независимой, если уравнение линейной зависимости (1) имеет только нулевое решение:* $\theta=(0,0,\ ,,,\ ,0)$.

Определение 3*: Говорят, что вектор (b) есть линейная комбинация системы векторов S (линейно выражается через систему S), если существует набор* $(\alpha_1,\alpha_2,..,\ \alpha_k)$, $\alpha_i\in R$ *такой, что* $b=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_ka_k$ *(2).*

Замечание 5: Равенство (2) еще называют разложением вектора (b) по векторам $a_1,a_2,...,a_k$, скаляры $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ - коэффициентами этого разложения.

Теорема 1: *Система векторов S линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор из системы S линейно выражается через остальные векторы этой системы.*

Доказательство:

Необходимость: Пусть S линейно зависима, докажем, что какой-то вектор этой системы будет линейной комбинацией остальных векторов системы S.

Так как, система S линейно зависима, то по определению 1 будет существовать ненулевой набор скаляров $(\alpha_1,\alpha_2,.., \alpha_k)$ такой, что $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_k a_k = \theta$.

Пусть $\alpha_2\neq 0$, тогда, разделив все коэффициенты на α_2, получим: $a_2=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}a_1-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}a_3-...-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_2}a_k$, вектор a_2 - будет линейной комбинацией остальных (линейно выражаться через остальные векторы, будет разложен по остальным векторам).

Достаточность: Пусть какой-то вектор системы S линейно выражается через остальные. Например, $a_1=\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3+...+\alpha_k a_k$ $\Rightarrow 1\cdot a_1-\alpha_2 a_2-...-\alpha_k a_k= \theta \Rightarrow$ существует $(1,\alpha_1,\alpha_2,.., \alpha_k)\neq(0,0,...,0)$, который является решением уравнения (1), следовательно, система S - будет линейно зависимой.

Пример 1: Выяснить, будет ли система векторов a_1=(1,-1,1,2); a_2=(0,1,-1,3); a_3=(2,-2,2,4) линейно зависимой в пространстве R^n или линейно независимой?

Решение:

1 шаг: Записываем уравнение линейной зависимости: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=\theta$.

2 шаг: Подставляем координаты арифметических векторов в это уравнение:

$\alpha_1(1,-1,1,2)+\alpha_2(0,1,-1,3)+\alpha_3(2,-2,2,4)=(0,0,0,0)$.

3 шаг: Выполняем указанные операции (умножение вектора на скаляр и сложение):

$(\alpha_1,-\alpha_1,\alpha_1,2\alpha_1)+(0,\alpha_2,-\alpha_2,3\alpha_2)+(2\alpha_3,-2\alpha_3,2\alpha_3,4\alpha_3)=(0,0,0,0)$

$(\alpha_1+2\alpha_3, -\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)=(0,0,0,0)$.

4 шаг: Приравниваем соответствующие координаты двух равных векторов: $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$.

5 шаг: Решаем методом Гаусса однородную систему линейных уравнений относительно α_i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- общее решение системы.

6 шаг: Делаем вывод: так как система имеет множество решений, то существует ненулевой набор скаляров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ таких, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \theta$. Например, в качестве такого набора можно взять

$\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = -2 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 =$

$= -2 \cdot (1,-1,1,2) + 0 \cdot (0,1,-1,3) + 1 \cdot (2,-2,2,4) = (0,0,0,0)$. Из общего решения системы таких наборов можно определить множество, для этого нужно в общее решение подставлять вместо свободных переменных любые числа. Следовательно, данная система векторов линейно зависима, то есть нулевой вектор θ разложен в ненулевую линейную комбинацию векторов a_1, a_2, a_3.

Пример 2*:* Пусть в пространстве R^n задана система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Докажем, что она будет линейно независимой

Действительно, из равенства: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \theta \Rightarrow$ $\alpha_1(1,0,0,\ldots,0) + \alpha_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + \alpha_n(0,0,0,\ldots,1) = (0,0,0,\ldots,0) \Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots$, $\alpha_n = 0$, следовательно, система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима, так как уравнение линейной зависимости имеет только нулевое решение.

Пример 3*:* Выражается ли вектор $b=(2,-1,3)$ через систему векторов $a_1=(1,0,2)$, $a_2=(-1,1,l)$, $a_3=(0,1,3)$, $a_4=(1,1,5)$?

Решение:

$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4$.

$(2,-1,3)=\alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(-1,1,1)+\alpha_3(0,1,3)+\alpha_4(1,1,5)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_4=2 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-1 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+5\alpha_4=3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Видим, что последнее уравнение системы будет противоречивым, следовательно, система решений не имеет, то есть не существует числовых значений набора скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, при которых $b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3+\alpha_4 a_4$.

Значит, (b) не является линейной комбинацией системы векторов a_1,a_2,a_3,a_4, ((b) линейно не выражается через них, (b) не может быть разложен по этим векторам).

Теорема 2: *В пространстве* $<R^n,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}>$ *любая система, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависимой.*

Доказательство:

Пусть дана система $a_1,a_2,\dots,a_k$, где $k>n$. Докажем, что она будет линейно зависимой. Запишем уравнение линейной зависимости: $j_1a_1+j_2a_2+\dots+j_ka_k=\theta$. Подставим в это уравнение координаты векторов $a_i(i=1,2,\dots,k)$, получим: $j_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{1n})+j_2(\alpha_{21},\alpha_{22},\dots,\alpha_{2n})+\dots+j_k(\alpha_{k1},\alpha_{k2},\dots,\alpha_{kn})=(0,0,\dots,0)$.

Приравняем координаты равных векторов:

$$\begin{cases} \alpha_{11}j_1+\alpha_{21}j_2+\dots+\alpha_{k1}j_k=0 \\ \alpha_{12}j_1+\alpha_{22}j_2+\dots+\alpha_{k2}j_k=0 \\ --------------- \\ \alpha_{1n}j_1+\alpha_{2n}j_2+\dots+\alpha_{kn}j_k=0 \end{cases}.$$

В этой однородной системе число переменных больше, чем число уравнений, так как по условию $k>n$. Следовательно, система будет иметь множество ненулевых решений, а тогда для уравнения $j_1a_1+j_2a_2+\dots+j_ka_k=\theta$ будет существовать ненулевой набор $(j_1,j_2,\dots,j_k)$, который будет его решением, то есть система векторов $a_1,a_2,\dots,a_k$ будет линейно зависимой.

Теорема 3: *Пусть даны две системы векторов:* $a_1,a_2,\dots,a_r$ *и* $b_1,b_2,\dots,b_s$, *причем* $r>s$. *Тогда, если любой вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то первая система будет линейно зависима.*

Доказательство:

По условию каждый вектор первой системы можно представить в виде линейной комбинации векторов второй системы, то есть

$$\begin{cases} a_1 = j_{11}b_1 + j_{12}b_2 + \ldots + j_{1s}b_s \\ -------------- \\ a_r = j_{r1}b_1 + j_{r2}b_2 + \ldots + j_{rs}b_s \end{cases} \quad (1)$$

Запишем уравнение (условие) линейной зависимости для первой системы: $\delta_1 a_1+\delta_2 a_2+\ldots+\delta_r a_r=\theta$ (*).

Подставим в равенство (*) вместо векторов a_i(i=1,2,...,r) их линейные комбинации из системы (1). Получим: $\delta_1(j_{11}b_1+j_{12}b_2+\ldots+j_{1s}b_s)+\delta_2(j_{21}b_1+j_{22}b_2+\ldots+j_{2s}b_s)+\ldots+\delta_r(j_{r1}b_1+j_{r2}b_2+\ldots+j_{rs}b_s)=\theta$.

Тогда

$$(\delta_1 j_{11}+\delta_2 j_{21}+\ldots+\delta_r j_{r1})b_1+(\delta_1 j_{12}+\delta_2 j_{22}+\ldots+\delta_r j_{r2})b_2+\ldots+$$
$$+(\delta_1 j_{1s}+\delta_2 j_{2s}+\ldots+\delta_r j_{rs})b_s=\theta.$$

Это векторное уравнение будет иметь решение, когда коэффициенты при b_i (выражения, стоящие в скобках) будут равны нулю одновременно, то есть

$$\begin{cases} \delta_1 j_{11} + \delta_2 j_{21} + \ldots + \delta_r j_{r1} = 0 \\ -------------- \\ \delta_1 j_{1s} + \delta_2 j_{2s} + \ldots + \delta_r j_{rs} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе роль переменных играют δ_i (i=1,2,...,r), причем, число переменных больше числа уравнений, так как по условию теоремы $r>s$, следовательно, система (2) имеет множество ненулевых решений, которые определяют ненулевые решения уравнения $\delta_1 a_1+\delta_2 a_2+\ldots+\delta_r a_r=\theta$. Тогда по определению линейной зависимости, система $a_1,a_2,\ldots,a_r$ будет линейно зависимой.

Замечание 5: Эту теорему часто называют основной теоремой линейной зависимости.

Базис и ранг конечной системы векторов в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Пусть дана конечная система векторов (1) $a_1,a_2,...,a_k,...,a_s$ пространства R^n.

Определение: *Максимальная линейно независимая подсистема системы* $a_1,a_2,...,a_k,...,a_s$ *называется базой (базисом) этой системы.*

Из определения следует, что если $a_1,a_2,...,a_k$ база системы векторов (1), то

а) $a_1a_2,...,a_k$ - линейно независимая система;

б) добавление к этой системе еще хотя бы одного вектора из системы (1) превращает ее в линейно зависимую систему;

в) любой вектор, не входящий в базу, будет линейной комбинацией базисных векторов.

Пример 4: Найти базу системы векторов $a_1=(1,-1,0,2)$; $a_2=(0,0,1,3)$; $a_3=(2,-2,0,4)$.

Решение:

Учитывая определение базиса, нам нужно найти максимальную линейно независимую подсистему данной системы. Подсистемы этой системы могут состоять:

а) из одного вектора $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$;

б) из двух векторов $\{a_1,a_2\}$, $\{a_1,a_3\}$, $\{a_2,a_3\}$;

в) из трех векторов $\{a_1,a_2,a_3\}$.

Каждая подсистема из одного ненулевого вектора линейно независима, так как, если $\alpha_i a_i=\theta \Rightarrow \alpha_i=0$. Подсистема a_1,a_3 - линейно зависима, так как, очевидно, что $a_3=2a_1$ (координаты этих векторов пропорциональны).

Следовательно, система a_1,a_2,a_3 - будет тоже линейно зависима, так как $2a_1-a_3+0a_2=\theta$. Остается определить линейную зависимость системы векторов $\{a_1,a_2\}$. Составим уравнение: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2=\theta$

$\alpha_1(1,-1,0,2)+\alpha_2(0,0,1,3)=(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, следовательно, подсистема $\{a_1,a_2\}$ - база, так как она линейно независимая и максимальная. (Обратите внимание на то, что координаты векторов a_1 и a_2 непропорциональны)

Задача: Самостоятельно докажите, что базами системы векторов a_1=(1,2,-1,0); a_2=(3,6,-3,0); a_3=(0,0,1,-1); a_4=(2,4,-2,0) будут подсистемы $\{a_1,a_3\}$, $\{a_2,a_3\}$, $\{a_3,a_4\}$.

Теорема 4: *(о базисах) Любые два базиса одной и той же конечной системы векторов содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство:

Пусть дана система $a_1,a_2,...,a_k,...,a_s$ и подсистемы $b_l,b_2,...,b_r$ и $c_1,c_2,...,c_p$ ее два базиса. Нужно доказать, что $r=p$. Предположим противное, пусть $r>p$. Тогда, используя определение базиса и теорему 3, мы получим, что каждый вектор системы $b_1,b_2,...,b_r$ будет линейной комбинацией системы $c_1,c_2,...,c_p$, а так как $r>p$, то система $b_1,b_2,...,b_r$ будет линейно зависимой, чего быть не может, так как она по условию является базисом.

Если предположить, что $p>r$, тогда мы придем к выводу, что система $c_1,c_2,...,c_p$ будет линейно зависимой, чего также быть не может. Остается, что $r=p$.

Доказанная теорема позволяет с каждой системой векторов связать некоторую числовую характеристику, называемую рангом системы.

Определение: *Рангом конечной системы векторов* $a_1,a_2...,a_k$ *называется число векторов в любой ее базе.*

В предыдущей задаче (см. выше) ранг системы векторов a_1,a_2,a_3,a_4 равен 2, так как во все ее базы входит по два вектора.

Доказанные выше теоремы позволяют определить понятие базы и ранга (размерности) пространства R^n.

Мы уже доказали, что система единичных векторов $e_1,e_2...,e_n$ в пространстве R^n линейно независима. Любая система $a_1,a_2...,a_k$, где $k>n$ в этом пространстве будет линейно зависимой (см. теорему 2), следовательно, в базу пространства R^n не может входить более, чем n-векторов.

Теорема о базисах позволяет утверждать, что в базу пространства R^n не может входить меньше векторов, чем в систему $e_1,e_2,...,e_n$. Следовательно, система $e_1,e_2,...,e_n$ - может быть выбрана в качестве базы пространства R^n. И мы можем дать следующее определение.

Определение: *Базой пространства* R^n *называется любая линейно независимая система, состоящая из n-векторов.*

Тогда, ранг (размерность) пространства R^n будет равен n $(\dim R^n=n)$, а ранг любой системы векторов из R^n будет не превосходить (n).

Если вектор $(a)\in R^n$ является линейной комбинацией базисных векторов: $a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$, то числа λ_i будут определяться однозначно. Действительно, если предположить, что $a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$ и $a=\lambda'_1 a_1+\lambda'_2 a_2+\ldots+\lambda'_n a_n \Rightarrow$ $(\lambda_1-\lambda'_1)a_1+(\lambda_2-\lambda'_2)a_2+\ldots+(\lambda_n-\lambda'_n)a_n=\theta \Rightarrow (\lambda_i=\lambda'_i)=\theta$, так как система $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - база, тогда $(\lambda_i=\lambda'_i)$. Числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ называют координатами вектора (a) в базисе $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Мы уже знаем, что строки и столбцы любой матрицы с элементами из поля R, можно рассматривать как n-мерные векторы, то есть элементы пространства R^n. Поэтому для матрицы естественным образом можно определить понятие строчного (столбцового) ранга.

Определение: *Ранг системы векторов-строк матрицы* $A=||\alpha_k||$ $(\alpha_{ik}\in R,\ i=l,2,\ldots,n\ k=l,2,\ldots,s)$ *называют строчным рангом матрицы.*

Теорема 5*: Строчный ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк, причем, сами ненулевые строки образуют базу системы векторов-строк.*

Доказательство:

Пусть матрица

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} & \ldots & \alpha_{2n} \\ - & - & \ldots & - & \ldots & - \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{rr} & \ldots & \alpha_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} =a_1 \\ =a_2 \\ =- \\ =a_r \\ =\theta \end{matrix}$$

имеет ступенчатый вид.

Составим уравнение линейной зависимости векторов-строк: $j_1a_1+j_2a_2+\ldots+j_ra_r=\theta \Rightarrow$

$j_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1r},\ldots,\alpha_{1n})+j_2(0,\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2r},\ldots,\alpha_{2n})+\ldots+j_r(0,0,\ldots,\alpha_{rr},\ldots,\alpha_{rn})=$

$$=(0,0,...,0) \Rightarrow \begin{cases} j_1\alpha_{11} = 0 \\ j_1\alpha_{12} + j_2\alpha_{22} = 0 \\ --------- \\ j_1\alpha_{1n} + j_2\alpha_{2n} + \ldots + j_n\alpha_{rn} = 0 \end{cases},$$

так как все $\alpha_i \neq 0$, $i=1,2,...,r$, то $j_1=0, j_2=0,...,j_n=0$, то есть система векторов-строк $a_1,a_2,...,a_r$ - линейно независима. Кроме этого, она является максимальной, следовательно, она будет базой. Ранг этой системы равен (r), то есть числу ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Мы уже знаем, что любую матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду. Поэтому, доказав теорему о том, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк (докажите это самостоятельно), мы получаем более простой метод для решения задач на определение линейной зависимости, нахождения базиса и ранга конечной системы векторов.

***Пример 5**:* Определить, будет ли система векторов линейно зависимой, найти ее базу и ранг:

$a_1=(2,-1,0,1)$; $a_2=(2,2,-1,3)$; $a_3=(0,1,-1,0)$; $a_4=(4,-2,0,2)$.

Решение:

Составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} = a_1 \\ = a_2 \\ = a_3 \\ = a_4 \end{matrix}$ и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = a_1 \\ = a_2 - a_1 \\ = a_3 \\ = a_4 - 2a_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = a_1 \\ = a_2 - a_1 \\ = 3a_3 - a_2 + a_1 \\ = a_4 - 2a_1 \end{matrix},$$

По виду последней матрицы можно сделать следующие выводы:

а) система линейно зависима, причем $a_4 - 2a_1 = \theta \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_4 = 2a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ a_1 = \dfrac{1}{2} a_4 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \end{array} \right.$

б) векторы $a_1 a_2 a_3$ образуют базис системы $a_1 a_2 a_3 a_4$;

в) ранг системы $a_1 a_2 a_3 a_4$ равен 3.

Сравните этот метод с методом решения задач такого типа, которые были рассмотрены выше.

§ 6. Конечномерное линейное пространство, его база и размерность.

Пусть теперь дано пространство V над полем F - $<V, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$.

В этом пространстве, также как и в арифметическом пространстве $<R^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in R\}>$, можно определить понятия линейной зависимости (независимости) системы векторов и доказать соответствующие свойства. Однако не все свойства R^n могут быть перенесены на любое пространство V над полем F. Так, например, в пространстве R^n всегда существует базис (см. §5) - это <u>любая</u> линейно независимая система, состоящая из n векторов, и любой вектор $b \in R^n$ будет линейной комбинацией этой системы. В произвольном пространстве V над F базиса вообще может не существовать.

Пример 1:Рассмотрим множество V над R*,* где V=$\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \alpha_i \in \mathrm{R}\}$.

Операции сложения таких бесконечных последовательностей действительных чисел и умножения на действительное число определяются естественным образом: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \overset{df}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$ и $k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n, \ldots)$.

Легко проверить, что V над R - является линейным пространством.

В этом пространстве система векторов e_1=(l,0,0...,0,...), e_2=(0,1,0,...,0,...), e_3=(0,0,l,...,0,...),..., e_n(0,0,0,...,1,...),... будет линейно независимой, но так как она бесконечна, то мы не можем выбрать базис в этом пространстве и определить его размерность.

Такие пространства называют бесконечномерными и их изучают в курсе функционального анализа.

Определение 1: *Пространство V над полем F называют n-мерным, если в нем существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система состоящая из $(n+1)$ вектора будет линейно зависимой.*

Замечание 1: Число *(n)* называют размерностью (рангом) пространства V и пишут: $dim\ V=n$ (от английского слова *dimention* - размерность).

Определение 2: *Векторное пространство, имеющее размерность, называют конечномерным.*

Из определения (1) и (2) следует, что любое конечномерное пространство V над полем F, есть линейная оболочка конечной системы векторов, то есть $V=L\ (a_1,a_2,...,a_k)$.

Замечание 2: Нулевое пространство $0=L(\varnothing)$ и базы не имеет, $dim\ 0 \overset{df}{=} 0$.

Докажите самостоятельно следующие утверждения:

а) любое конечномерное пространство V над полем F обладает базой, если $V\neq 0$;

б) все базы пространства V над полем F содержат одинаковое число векторов;

в) если $V=L(a_1,a_2,...,a_k,...,a_s)$ и $a_1,a_2,...,a_k$ - база системы $a_1,a_2,...,a_k,...,a_s$, то $a_1,a_2,...,a_k$ – *база* V *и* $dim\ V=k$.

Теорема 1: *Любую линейно независимую систему векторов конечномерного пространства V над полем F можно дополнить до базы этого пространства.*

Доказательство:

Пусть $dim\ V=n$, то есть существует база $a_1,a_2,...,a_n$ такая, что $V=L(a_1,a_2,...,a_n)$. Выберем в V линейно независимую систему векторов $b_1,b_2,...,b_k$, где $k<n$.

Все векторы a_i (i=1,2,...,n) не могут быть линейной комбинацией системы $b_1,b_2,...,b_k$, так как по основной теореме линейной зависимости, система $a_1,a_2,...,a_n$ *в* этом случае будет линейно зависимой. Поэтому в системе $a_1,a_2,...,a_n$ найдется хотя бы один вектор a_p, который линейно не выражается через систему $b_1,b_2,...,b_k$ (1). Добавив его к системе (1), получим линейно независимую систему (2) $b_1,b_2,...,b_k,a_p$, в которой будет уже $(k+1)$ вектор. Если $(k+1)<n$, то проведя аналогичные рассуждения, получим систему (3) $b_1,b_2,...,b_k,a_p,a_s$, в которой будет уже $(k+2)$ вектора и т.д. пока не получим систему: $b_1,b_2,...,b_k,a_p,a_s,...,a_e$, состоящую из n векторов.

Рассмотрим некоторые свойства размерности пространства V над полем *F*.

Свойство 1: *Если $U<V$, то $\dim U \le \dim V$.*

Доказательство:

Пусть $U\neq 0$ и $\dim V=n \Rightarrow V=L(a_1,a_2,...,a_n)$. Если предположить, что $\dim U > \dim V$, то из того, что $U\subset V$ будет следовать, что в V есть линейно независимая система векторов, состоящая более чем из n векторов, что противоречит условию: $\dim V=n$. Значит, $\dim U\le \dim V$.

Свойство 2: *Если $U< V$ и $(\dim U = \dim V) \Rightarrow (U=V)$.*

Доказательство:

Пусть $V\neq 0$ и $U\neq 0$, а $b_1,b_2,...,b_n$ - база *U* над *F*, то есть $U=L(b_1,b_2,...,b_n)$, так как по условию $\dim U= \dim V$, то в качестве базы пространства V можно выбрать систему $b_1,b_2,...,b_n$, тогда

$V=L(b_1,b_2,...,b_n)$ & $U=L(b_1,b_2,...,b_n)\Rightarrow (U=V)$.

Свойство 3: *Если $U<V$ над полем F, то существует $Z<V$: $V=Z \overset{\circ}{+} U$.*

Доказательство:

Пусть $U<V$, $U\neq 0$ и $b_1,b_2,...,b_m$ - *база* подпространства *U*. Тогда, по теореме (1), эту систему можно дополнить до базы пространства *V*. Пусть система $\underbrace{b_1,b_2,...,b_m}_{\in U},\underbrace{b_{m+1},...,b_n}$ - база *V*.

Обозначим $L(b_{m+1},b_{m+2},...,b_n)=Z$, тогда, $V=U+Z$, покажем, что эта сумма будет прямой, то есть $U\cap Z=\{\theta\}$.

Пусть $c \in U \cap Z \Rightarrow c\in U$ & $c\in Z \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} c=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+...+\beta_m b_m \text{ и} \\ c=\beta_{m+1}b_{m+1}+\beta_{m+2}b_{m+2}+...+\beta_m b_n \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\beta_1 b_1 + ... + \beta_m b_m - \beta_{m+1} b_{m+1} - ... - \beta_m b_n = \theta$ (2)

Так как система (1) является базой пространства V, то все β_i, (i=1,2,...,n) в равенстве (2) будут равны нулю. Следовательно, вектор c=θ, то есть $V = Z \overset{\circ}{+} U$.

Свойство 4: *Если* $V = Z \overset{\circ}{+} U$, *то* $\dim V = \dim U + \dim Z$.

Доказательство:

Пусть $V = Z \overset{\circ}{+} U$ и $a_1, a_2, .., a_k$ - база U, $\dim U = k$, а $b_1, b_2, ..., b_s$ - база Z, $\dim Z = s$. Докажем, что система $a_1, a_2, .., a_k, b_1, b_2, ..., b_s$ - будет базой пространства V.

Составим уравнение линейной зависимости: $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k}_{\in U} + \underbrace{\alpha_{k+1} b_1 + ... + \alpha_{k+s} b_s}_{\in Z} = \theta$.

Так как, сумма $Z \overset{\circ}{+} U$ - прямая, то θ=θ+θ, тогда, $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = \theta$ и $\alpha_{k+1} b_1 + ... + \alpha_{k+s} b_s = \theta$, откуда все α_i будут равны нулю, следовательно, система $a_l, a_2, .., a_k, b_1, b_2, ..., b_s$ - будет линейно независимой системой. Кроме этого, любой вектор $c \in Z \overset{\circ}{+} U$, по определению суммы, будет равен: $c = x + y$, $x \in U$, $y \in Z$. Тогда, $x \in L(a_1, a_2, ..., a_k)$, а $y \in L(b_l, b_2, ..., b_s)$, то есть $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$, а $y = \lambda_{k+1} b_1 + ... \lambda_{k+s} b_s$, тогда, вектор $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} b_1 + ... + \lambda_{k+s} b_s$, то есть мы показали, что любой вектор $c \in V = Z \overset{\circ}{+} U$ линейно выражается через линейно независимую систему $a_1, a_2, .., a_k, b_1, b_2, ..., b_s$, следовательно, эта система является базой пространства V. Тогда, $\dim V = k + s = \dim U + \dim Z$.

Свойство 5: *Если* $V = Z + U$, *то* $\dim V = \dim U + \dim Z - \dim(U \cap Z)$.

Схема доказательства:

1. Выберем в пространстве $U \cap Z$ какой-нибудь базис $a_1, a_2, .., a_k$.

2. Дополним эту систему до базы подпространства Z, а затем подпространства U. Пусть $\dim(U \cap Z) = k$, $\dim Z = k + s$, $\dim U = k + m$.

3. Докажем, что система $a_1, a_2, .., a_k, b_1, b_2, ..., b_s, c_1, c_2, ..., c_m$ - будет базой пространства $V=Z+U$.

Закончите процесс доказательства самостоятельно.

Пример 2: В пространстве R^n подпространство $U=L(a_1 a_2, a_3)$, $Z=L(b_1, b_2, b_3)$. Найти базисы и размерность их суммы и пересечения, если:

$a_1=(1,2,1,-2)$ $\qquad$ $b_1=(1,1,1,1)$

$a_2=(2,3,1,0)$ $\qquad$ $b_2=(1,0,1,-1)$

$a_3=(1,2,2,-3)$ $\qquad$ $b_3=(1,3,0,-4)$

Решение:

1 шаг: Найдем базисы и размерность каждого из подпространств. Для этого составим матрицы из координат векторов a_i и b_i и найдем их ранги:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&1&0\\1&2&2&-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-1&-1&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}, rangA=3,$$

следовательно, $dim\ U=3$, а a_1, a_2, a_3 - база этого пространства.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&-1\\1&3&0&-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-2\\0&2&-1&-5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-2\\0&0&-1&-9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

rang B=3,

следовательно, $dim\ Z=3$, а b_1, b_2, b_3 - его база.

2 шаг: Найдем размерность и базис суммы. Для этого составим матрицу C и найдем ее ранг:

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&1&0\\1&2&2&-3\\1&1&1&1\\1&0&1&-1\\1&3&0&-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-1&-1&4\\0&0&1&-1\\0&-1&0&3\\0&-2&0&1\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-1&-1&4\\0&-1&0&3\\0&-2&0&1\\0&1&-1&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-1&-1&4\\0&0&1&-1\\0&0&2&6\\0&0&1&-1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-1&-1&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \ rangC=4,$$

следовательно, $dim\ S=4$, и система a_1,a_2,a_3,b_1 – является базой суммы S=U+Z.

3 шаг: Учитывая формулу: $dim\ S=dim\ U+dim\ Z-dim(U\cap Z)$, мы получим, что $dim(U\cap Z)=2$, то есть в базу пересечения подпространств U и Z будет входить два вектора.

4 шаг: Найдем эти векторы.

Пусть вектор $x\in U\cap Z\Rightarrow x\in U\ \&\ x\in Z\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}x=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3\\x=\beta_1b_1+\beta_2b_2+\beta_3b_3\end{array}\right.\Rightarrow \alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3=\beta_1b_1+\beta_2b_2+\beta_3b_3\Rightarrow$$

$\Rightarrow\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3-\beta_1b_1-\beta_2b_2-\beta_3b_3=\theta.$

Решим это векторное уравнение относительно α_i и β_i (i=1,2,3):

$$\alpha_1(1,2,1,-2)+\alpha_2(2,3,1,0)+\alpha_3(1,2,2,-3)-\beta_1(1,1,1,1)-\beta_2(1,0,1,-1)-$$

$$\beta_3(1,3,0,-4)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3-\beta_1-\beta_2-\beta_3=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1-3\beta_3=0\\\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1-\beta_2=0\\-2\alpha_1-3\alpha_3-\beta_1+\beta_2+4\beta_3=0\end{cases}.$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1&-1&-1\\2&3&2&-1&0&-3\\1&1&2&-1&-1&0\\-2&0&-3&-1&1&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-1&-1&-1\\0&-1&0&1&2&-1\\0&-1&1&0&0&1\\0&4&-1&-3&-1&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-1&-1&-1\\0&-1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-2&2\\0&0&-1&1&7&-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3-\beta_1-\beta_2-\beta_3=0\\ -\alpha_2+\beta_1+2\beta_2-\beta_3=0\\ \alpha_3-\beta_1-2\beta_2+2\beta_3=0\\ 5\beta_2=0\end{cases}.$$

Выберем главные и свободные переменные. Пусть β_1 и β_3 будут свободными, тогда $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ - главные.

Выразим главные переменные через свободные, то есть найдем общее решение данной системы:

$$\begin{cases}\beta_2=0\\ \alpha_3=\beta_1-2\beta_3\\ \alpha_3=\beta_1-\beta_3\\ \alpha_3=\beta_1+\beta_3-2\alpha_2-\alpha_3=\beta_1+\beta_3-2\beta_1+2\beta_3-\beta_1+2\beta_3=5\beta_3-2\beta_1.\end{cases}$$

Итак, $\begin{cases}\alpha_1=5\beta_3-2\beta_1\\ \alpha_2=\beta_1-\beta_3\\ \alpha_3=\beta_1-2\beta_3\\ \beta_2=0\end{cases}$, есть общее решение системы.

Теперь найдем фундамёнтальную систему решений, то есть базу системы решений:

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
-2	1	1	1	0	0
5	-1	-2	0	0	1

Векторы c_1=(-2,l, 1,1,0,0), c_2=(5,-1,-2,0,0,1) - образуют базу пространства решений данной системы. Теперь найдем искомые векторы базы $U\cap Z$, так как, $x=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3$ или $x=\beta_1b_1+\beta_2b_2+\beta_3b_3$, то подставляя найденные значения α_i или β_i из фундаментальной системы, получим:

$x_1=1\cdot b_1+0\cdot b_2+0\cdot b_3=b_1$

$x_2=0\cdot b_1+0\cdot b_2+1\cdot b_3=b_3$

Итак, b_1=(1,1,1,1), b_3=(l,3,0,4) - база $U\cap Z$.

§ 7. Изоморфизм конечномерных линейных пространств. Свойства изоморфизма.

Пусть даны два конечномерных линейных пространства *U,V* над полем *F*.

Определение 1: *Отображение* φ: *U*→*V называется изоморфизмом пространства U в V, если а)* φ *- биекция U на V; б)* $\forall a,b\in U$, $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\forall a\in U$ $\forall\lambda\in F$, $\varphi(\lambda a)=\lambda(\varphi(a))$.

Замечание 1*:* Из определения следует, что

а) соответствие φ - всюду определено, функционально, инъективно и сюрьективно;

б) для операций выполняются условия гомоморфности:

в) пространства рассматриваются над одним и тем же полем.

Определение 2*:* $U\cong V \Leftrightarrow \exists\, \varphi: U \xrightarrow{на} V$.

Свойство 1*: Если* ∀ *U,V находятся в отношении f тогда и только тогда, когда U≅V, то отношение f есть отношение эквивалентности на множестве пространств над полем F.*

Действительно, пусть $UfV \Leftrightarrow U\cong V$, тогда,

а) ∀ *U, U ≅ U,* так как существует тождественный изоморфизм ε: U→U, ε: x↦x, следовательно, *f*- рефлексивно.

б) ∀ U,V, если $(U\cong V) \Rightarrow (V\cong U)$, так как, если существует изоморфизм φ: U→V, то существует изоморфизм φ^{-1}: V→U, то есть *f*- симметрично.

в) ∀ *U,V,S,* $(U \cong V)\ \&\ (V \cong S) \Rightarrow (U \cong S)$, так как, если существует изоморфизм φ: *U*→*V* и существует изоморфизм ψ: V→S, то по теореме о композиции биекций, существует изоморфизм $h=\varphi\circ\psi : U\to S$.

Таким образом, множество конечномерных пространств над полем *F* разбивается в фактор-множество изоморфных друг другу пространств.

Свойство 2: *Если* φ:*U*→*V изоморфизм и* $a_1,a_2,\ldots,a_k$ *- база U, то* $\varphi(a_1),\varphi(a_2),\ldots,\varphi(a_k)$ *- будет базой пространства V.*

Доказательство:

Составим уравнение линейной зависимости (1) $\lambda_1\varphi(a_1)+\lambda_2\varphi(a_2)+\ldots+\lambda_k\varphi(a_k)=\theta'$, где $\theta'\in V$. Нужно доказать, что все λ_i (i=1,2,..,k) равны 0. Так как, φ - изоморфизм, то прообразом левой части уравнения (1) будет вектор, принадлежащий пространству *U* и равный: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_k a_k$, а прообразом вектора θ' будет нулевой вектор θ.

Так как, φ - биекция, то из равенства образов будет следовать равенство прообразов, то есть (2) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_k a_k = \theta$. Так как, система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ является базой пространства *U,* то в равенстве (2) все скаляры $\lambda_i = 0$ (i=1,2...,k), следовательно, и в равенстве (1) они тоже равны нулю.

Таким образом, мы доказали, что система образов базисных векторов $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_k)$ линейно независима. Остается доказать максимальность этой системы, то есть, что $\forall\ c \in V$ будет линейной комбинацией этой системы.

Действительно, прообразом вектора $c \in V$ будет вектор $\varphi^{-1}(c) \in U$. Разложим его по базису пространства *U,* $\varphi^{-1}(c) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$ и найдем образ вектора $\varphi^{-1}(c)$, получим, $\varphi(\varphi^{-1}(c)) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + {+\lambda_k} \varphi(a_k) = c$.

Итак, система $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_k)$ - база *V*.

Теорема 1: *Любые два n-мерных пространства U и V над полем F изоморфны между собой.*

Доказательство:

Пусть даны два пространства *U* и *V* над одним и тем же полем *F,* $dimU=n$ и $dimV=n$, выберем в каждом из пространств базу:

1) $a_1, a_2 \dots, a_n$ - база *U*

2) $b_1, b_2, \dots, b_n$ - база *V*.

Зададим отображение $\varphi: U \rightarrow V$ следующим образом: $\forall\ c \in U$,

$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_k a_k$ поставим в соответствие вектор $c' \in V$,

$c' = \lambda_1 b_1 + {+\lambda_2} b_2 + \dots + \lambda_k b_k$, Докажем, что отображение φ - будет изоморфизмом.

а) очевидно, что φ - сюрьективно, так как $\forall\ d' \in V$, $d' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots \beta_n b_n$ можно сразу указать вектор в пространстве U, который является его прообразом - $\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

б) запишем условие инъективности.

Пусть $\forall\ c, d \in U$, $\varphi(c) = \varphi(d)$, докажем, что $(c = d)$. Действительно, $\varphi(c) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots \lambda_n b_n = \varphi(d) =$

$\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots\beta_n b_n \Rightarrow$ $(\lambda_1=\beta_1)\&\ (\lambda_2=\beta_2)\&\ldots\&\ (\lambda_n=\beta_n) \Rightarrow (c=d)$. Итак, φ - биекция $U\to V$.

в) Проверяем условия гомоморфности для операции сложения:

$$\forall\ c,d\in U,\ \varphi(c+d)\overset{?}{=}\varphi(c)+\varphi(d).$$

$\varphi(c+d)=\varphi[(\alpha_1+\beta_1)a_1+(\alpha_2+\beta_2)a_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)a_n]=$ $(\alpha_1+\beta_1)b_1+(\alpha_2+\beta_2)b_2+\ldots(\alpha_n+\beta_n)b_n$

$\varphi(c)+\varphi(d)=\varphi(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n)+\varphi(\beta_1a_1+\beta_2a_2+\ldots+\beta_na_n)=$ $(\alpha_1+\beta_1)b_1+(\alpha_2+\beta_2)b_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)b_n$.

Итак, $\varphi(c+d)=\varphi(c)+\varphi(d)$.

Для операции умножения на скаляр;

$$\forall\ c\in U\ \varphi(\lambda c)\overset{?}{=}\lambda\varphi(c)$$

Действительно,

$\varphi(\lambda c)=\varphi(\lambda\alpha_1a_1+\lambda\alpha_2a_2+\ldots+\lambda\alpha_na_n)=\lambda\alpha_1b_1+\lambda\alpha_2b_2+\ldots+\lambda\alpha_nb_n$.

$\lambda\varphi(c)=\lambda(\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n)=\lambda\alpha_1b_1+\lambda\alpha_2b_2+\ldots+\lambda\alpha_nb_n$.

Итак, $\varphi(\lambda c) = \lambda\varphi(c)$.

Общий вывод: $U\cong V$ над полем F.

Следствие: Любое n-мерное пространство изоморфно арифметическому пространству R^n. Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует единственное n-мерное пространство - это R^n. Поэтому, все свойства линейной зависимости и теоремы, которые рассматривались для арифметического пространства, мы теперь можем перенести на любое *n*-мерное пространство.

§ 8. Координаты вектора в разных базисах пространства R^n, их связь.

В пункте 7 мы доказали, что любое n-мерное линейное пространство изоморфно арифметическому пространству. Причем, изоморфизмом будет биекция φ: $V\to R^n$, которая $\forall\ a\in V$: $a=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_na_n$ отправляет в арифметический вектор $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in R^n$ ($a_1,a_2,\ldots,a_n$ - база V, $\dim V=n$).

Мы уже знаем, что числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ называются координатами вектора (n) в базисе $a_1,a_2,...,a_n$ и определяются однозначно (см. п.5).

В силу изоморфизма n-мерного пространства V и R^n, вектор *(а)* можно отождествить с координатной строкой $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ или координатным столбцом: $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ и считать, что:

а) система $b_1,b_2,...,b_k$ из пространства V будет линейно зависимой (независимой), если будут зависимыми (независимыми) соответствующие координатные строчки (столбцы) этих векторов в фиксированном базисе пространства V;

б) ранг этой системы векторов будет совпадать с рангом матрицы, составленной из координатных строк (столбцов) относительно фиксированной базы, то есть все задачи, связанные с линейной зависимостью системы векторов в пространстве V, решать в пространстве R^n.

***Пример 1**: Пусть дано пространство $<R^3,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}>$. Доказать, что система векторов $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(0,1,1)$, $e_3=(0,0,1)$ является базой этого пространства и найти координаты вектора $a\in R^n$ в этом базисе.*

Решение:

а) система $e_1e_2e_3$ - база пространства R^3, так как она линейно независима. Действительно, матрица составленная из координатных строк этих векторов будет иметь ступенчатый вид и ее ранг будет равен трем, следовательно, и ранг системы равен 3, а так как этот ранг совпадает с $\dim R^3$, то система $e_1e_2e_3$ - база R^3.

б) найдем координаты вектора *(а)* в этой базе. Для этого запишем линейное разложение вектора *(а)* по базису: $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3 \Rightarrow a=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(0,0,1) \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\beta_1 \\ \lambda_1+\lambda_2=\beta_2 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\beta_3 \end{cases}$$

, где $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ - искомые координаты вектора *(а)*, а $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ - известные координаты вектора *(а)*.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \beta_1 \\ \lambda_2 = \beta_2 - \beta_1 \\ \lambda_3 = \beta_3 - \beta_2 - \beta_1 \end{cases}$$, итак, $(\beta_1,\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_2-\beta_1)$ - координаты вектора *(a)* в базисе $e_1e_2e_3$. Теперь, в этом же пространстве, возьмем другой базис $e'_1e'_2e'_3$. Пусть $e'_1=(1,0,0)$, $e'_2=(0,1,0)$, $e'_3=(0,0,1)$ и $a=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Найдем кординаты вектора *(a)* в единичном базисе:

$(\beta_1\beta_2\beta_3)=\lambda_1'e_1'+\lambda_2'e_2'+\lambda_3'e_3' \Rightarrow (\beta_1\beta_2\beta_3)=$

$$\lambda_1'(1,0,0)+\lambda_2'(0,1,0)+\lambda_3'(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \beta_1 \\ \lambda_2' = \beta_2 \\ \lambda_3' = \beta_3 \end{cases} \Rightarrow a=(\beta_1\beta_2\beta_3).$$

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

а) координаты вектора зависят от выбора базиса;

б) координаты характеризуют вектор только в том случае, если указан базис;

в) координаты любого вектора всегда можно считать заданными в единичном базисе.

А теперь выясним, какая связь существует между координатами одного и того же вектора, заданного в разных базах пространства R^n.

Пусть дано пространство R^n, а системы (1) $a_1,a_2,...,a_n$ и (2) $a_1',a_2',...,a_n'$ - его базы. Обозначим координаты вектора *(x)* в (1) базе $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$, а в базе (2) через $(\lambda_1',\lambda_2',...,\lambda_n')$.

Найдем сначала связь между координатами базисных векторов (1) и (2). Так как, система (1) является базой пространства R^n, то любой вектор системы (2) линейно через нее выражается.

$$\begin{cases} a_1' = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + ... + \alpha_{1n}a_n \\ a_2' = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + ... + \alpha_{2n}a_n \\ -------------- \\ a_n' = \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + ... + \alpha_{nn}a_n \end{cases} \quad (3)$$

Запишем систему (3) в матричной форме. Для этого обозначим через $a_i' = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$,

$a_i=(a_1,a_2,..,a_n)$, $T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & | \, \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & | \, \alpha_{n2} \\ - & - & | \, - \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & | \, \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, тогда, $a_i'=a_iT$ (4) - это равенство выражает связь между базами (1) и (2). Матрица T - называется матрицей перехода от базиса (1) к базису (2), по ее столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом. Она всегда будет невырожденной, так как ее строки и столбцы линейно независимы (они являются координатами базисных векторов). Поэтому для матрицы T всегда будет существовать обратная матрица T^{-1}: $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = E$. От равенства (4) $a_i'=a_iT$ можно с помощью обратной матрицы перейти к равенству (5) $a_i=a_i'T^{-1}$ и, тем самым, перейти от базиса (2) к базису (1). Теперь, разложив произвольный вектор $(x) \in R^n$ по первому и второму базисам, получим:
$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \\ x &= \lambda_1' a_1' + \lambda_2' a_2' + \ldots + \lambda_n' a_n' \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \lambda_1' a_1' + \lambda_2' a_2' + \ldots + \lambda_n' a_n' + \lambda_n' a_n' = \lambda_1'(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \ldots + \alpha_{1n}a_n) + \lambda_2'(\alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{2n}a_n) + \ldots + \lambda_1'(\alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n) \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11}\lambda_1' + \alpha_{21}\lambda_2' + \ldots + \alpha_{n1}\lambda_n' \\ \lambda_2 = \alpha_{12}\lambda_1' + \alpha_{22}\lambda_2' + \ldots + \alpha_{n2}\lambda_n' \\ ----------------- \\ \lambda_n = \alpha_{1n}\lambda_1' + \alpha_{2n}\lambda_2' + \ldots + \alpha_{nn}\lambda_n' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\lambda_i = T \cdot \lambda_i'$ или $\lambda_i' = T^{-1} \cdot \lambda_i$, где $\lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ - \\ \lambda_m \end{pmatrix}$, а $\lambda_i' = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ - \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$.

Матричные уравнения $\lambda_i = T \cdot \lambda_i'$ и $\lambda_i' = T^{-1} \cdot \lambda_i$, устанавливают связь между координатами одного и того же вектора $x \in R^n$ в разных базах.

Задача: Показать, что каждая из следующих систем векторов:

а) $e_1=(1,2,1)$ б) $e_1'=(3,1,4)$

$e_2=(2,3,3)$ $e_2'=(5,2,1)$

$e_3=(3,7,1)$ $e_3'=(1,-1,6)$

в пространстве R^3 является базой, и найти координаты вектора $a=(-17,-36,-11)$ в каждом из этих базисов.

Решение:

1. Покажем, что каждая из систем является базой. Для этого вычислим ранги матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ A=3,\ e_1e_2e_3 \text{ – база.}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -6\\ 3 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -6\\ 0 & -2 & 22\\ 0 & -3 & 31\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ B=3,\ e_1'e_2'e_3' \text{ – база.}$$

2. Найдем координаты вектора (a) в каждом из базисов. Эту задачу можно решить двумя способами:

а) разложить вектор *(a)* по каждому базису и найти искомые координаты:

$a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$

$a=\lambda_1'e_1'+\lambda_2'e_2'+\lambda_3'e_3'$ или

б) воспользоваться уравнениями $\lambda_i=T\cdot\lambda_i'$ и $\lambda_i'=T^{-1}\cdot\lambda_i$.

Будем использовать способ б).

Для нахождения координат λ_i, вектора *(a)* базисе $e_1e_2e_3$ и матрицы перехода T от базиса $e_1e_2e_3$ к базису $e_1'e_2'e_3'$ нужно составить и решить векторные уравнения:

1. $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$
2. $e_1'=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\alpha_{13}e_3$
3. $e_2'=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\alpha_{23}e_3$
4. $e_3'=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\alpha_{33}e_3$.

Каждое из уравнений, после подстановки координат векторов, будет равносильно соответствующей системе:

1. $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -17 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = -36; \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = -11 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 3\alpha_{13} = 3 \\ 2\alpha_{11} + 3\alpha_{12} + 7\alpha_{13} = 1; \\ \alpha_{11} + 3\alpha_{12} + \alpha_{13} = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \alpha_{21} + 2\alpha_{22} + 3\alpha_{23} = 5 \\ 2\alpha_{21} + 3\alpha_{22} + 7\alpha_{23} = 2; \\ \alpha_{21} + 3\alpha_{22} + \alpha_{23} = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \alpha_{31} + 2\alpha_{32} + 3\alpha_{33} = 1 \\ 2\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + 7\alpha_{33} = 1. \\ \alpha_{31} + 3\alpha_{32} + \alpha_{33} = -6 \end{cases}$

Все эти системы отличаются только столбцами свободных членов и обозначениями переменных, поэтому их можно решать методом Гаусса одновременно:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 2 & 0 & -5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2; \\ \lambda_3 = -4 \end{array}$$

α_{11}=-27	α_{21}=-71	α_{31}=-41
α_{12}=9	α_{22}=20	α_{32}=9
α_{13}=4	α_{23}=12	α_{33}=8

Итак, вектор *(a)* в базисе $e_1e_2e_3$ имеет координаты a=(-1,-2,-4). Матрица перехода T от базиса $e_1e_2e_3$ к базису $e_1'e_2'e_3'$, будет иметь вид:

T= $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, так как $\lambda_i' = T^{-1} \cdot \lambda_i$, то для нахождения λ_i' нужно найти обратную матрицу к T. Найдите самостоятельно, что $T^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}$.

Тогда $\lambda_i'=T^{-1}\cdot\lambda_i=\begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -232 \\ 161 \\ -126 \end{pmatrix}$,

то есть a=(-232,161,-126) в базисе $e_1'e_2'e_3'$.

Проверка: $\lambda_1'e_1'+\lambda_2'e_2'+\lambda_3'e_3'$=-232·(3,1,4)+161·(5,2,1)- - 126·(1,1,-6) = (-17,-36,-11) = a.

Самостоятельно решите эту задачу первым способом и сравните со вторым способом.

ГЛАВА 2. Евклидовы пространства.

---

§ 1. Скалярное умножение в линейном пространстве.

Рассмотренные в § 1 понятия линейной зависимости, базиса, размерности и т.д. не позволяют определить метрические понятия для векторов, например, длину вектора, угол между векторами, отношение ортогональности и т.п., которые изучаются в элементарной геометрии.

Как известно, указанные метрические понятия определяются в геометрии через понятие скалярного умножения векторов.

Учитывая это, обогатим структуру конечномерного линейного пространства над полем R обобщенным понятием скалярного умножения векторов.

Пусть дано n-мерное пространство V над полем R (как было доказано в гл. 7, оно будет изоморфно арифметическому пространству R^n).

Определение 1: *Отображение* φ: $V\times V\to R$: $\forall\ a,b\in V$, $\varphi\langle a;b\rangle \mapsto (a,b)$, *где* $(a,b)\in R$ *называется скалярным умножением в пространстве V, если:*

1. $\forall\ a,b\in V,\ (a,b)=(b,a)$ (коммутативность)
2. $\forall\ a,b,c\in V,\ (a,b+c)=(a,b)+(a,c)$ (дистрибутивность)

3. $\forall\ a,b\in V,\ (\lambda a,b)=\lambda(a,b)$

4. $\forall\ a\neq 0,\ (a,a)>0$ и $(a,a)=0$, при $a=\theta$.

Замечание 1: Из этого определения следует, что а) скалярное умножение не является бинарной операцией; б) $\forall\ a\in V(a,\theta)=0,$ так как $(a,0\cdot\theta)=0\cdot(a,\theta)=0$.

Результат скалярного умножения двух векторов a и b называют скалярным произведением и обозначают (a,b).

Покажем, что в линейном пространстве V над полем R $(dim\ V=n)$ всегда можно задать так определенное скалярное умножение. Действительно, пусть $e_1,e_2,...,e_n$ база V. Разложим любые два вектора этого пространства x,y по базису, получим: $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$, $y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+...+\beta_ne_n$. Зададим отображение φ: $VxV\to R:\ (x,y)\mapsto\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n$ и проверим будут ли выполняться все условия в определении скалярного умножения:

а) $(x,y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n$

$(y,x)=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+...+\beta_n\alpha_n$, так как α_i и β_i - это действительные числа, то $\alpha_i\cdot\beta_i=\beta_i\cdot\alpha_i$, следовательно, $(x,y)=(y,x)$.

б) проверьте самостоятельно, что $\forall\ x,y,z\in V,\ (\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ и $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$,

в) $(x,x)=\alpha_1\cdot\alpha_1+\alpha_2\cdot\alpha_2+...+\alpha_n\cdot\alpha_n=\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2>0,\ \forall\ x\neq\theta$.

Итак, равенство $(x,y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n$ определяет скалярное произведение векторов x и y. Если выбрать другой базис $e_1'e_2'e_3'$ в пространстве V, то $x=\alpha_1'e_1'+...+\alpha'_ne'_n$, а $y=\beta_1'e_1'+...+\beta'_ne'_n$ и тогда, $(x,y)'=\alpha_1'\beta_1'+...+\alpha_n'\beta_n'$. То есть, в общем случае, $(x,y)'\neq(x,y)$. Итак, в пространстве V скалярное умножение можно определить в разных базах.

Однако, ниже мы покажем, что в любом V всегда существует (и не один) базис, в котором $(x,y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n$.

Определение 2: *Линейное n-мерное пространство V над R, в котором определено скалярное умножение векторов, называют евклидовым пространством.*

Замечание 2: Так как $V\cong R^n$, то $E_n=\langle R^n,+,\{\omega_\lambda\ |\lambda\in R\},\varphi\rangle$ называют стандартным евклидовым пространством.

После того, как определено скалярное произведение (a,b), можно определить понятие модуля (нормы, длины) вектора и угла между векторами.

Определение 3: *Нормой вектора (a)$\in V$ над R называется арифметическое значение корня* $\sqrt{(a,a)}$, *то есть* $||a|| \overset{df}{=} \sqrt{(a,a)}$.

Замечание 3: Из определения следует, что

а) $||a||^2=(a,a)$;

б) $||a||=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2}$;

в) $||a||\geq 0$, если $a=\theta$, то $||a||=0$;

г) $||\lambda a||=|\lambda|\cdot||a||$, действительно, $||\lambda a|| = \sqrt{(\lambda a,\lambda a)} = \sqrt{\lambda^2(a,a)} = |\lambda|\cdot||a||$.

Определение4: *Вектор (a) называется нормированным, если* $||a||=1$.

Покажем, что любой вектор b$\neq\theta$ можно нормировать, то есть умножить его на такое число λ, чтобы в результате получился нормированный вектор. Действительно, уравнение $||\lambda b||=1$ имеет решение $\lambda=\dfrac{1}{||b||}$. Следовательно, чтобы нормировать вектор *(b)* нужно каждую его координату разделить на норму вектора b.

Пример 1: Пусть $a=(1,3,2)\in R^3$. Найдем $||a||=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$, $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. Тогда вектор $e=\lambda\cdot a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}};\dfrac{3}{\sqrt{14}};\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$ будет иметь $||e||=1$, действительно, $||e||=\sqrt{\dfrac{1}{14}+\dfrac{9}{14}+\dfrac{4}{14}}=\sqrt{1}=1$.

Определение 5: *Углом между векторами x и y из пространства V над R называют угол φ ($0\leq\varphi\leq 180^o$), косинус которого равен отношению* $\dfrac{(x,y)}{||x||\cdot||y||}$.

Для того, чтобы определение было корректно, необходимо доказать, что отношение $\left|\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\right|\le 1$ для $\forall$ $x,y\in V$. Для доказательства рассмотрим вектор $\lambda x-y$, $\lambda\in R$. Скалярный квадрат этого вектора $(\lambda x-y,\lambda x-y)\geq 0$ для $\forall$ $\lambda\in R$. Распишем левую часть неравенства $\lambda^2(x,x) - \lambda(x,y) - \lambda(y,x) + (y,y) \geq 0 \Rightarrow \lambda^2(x,x) - 2(x,y) + (y,y) \geq 0$. Левая часть этого неравенства является многочленом второй степени от переменной λ. Так как, многочлен сохраняет знак для $\forall$ $\lambda\in R$, то его дискриминант будет ≤ 0, то есть $4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0 \Rightarrow (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$. Извлекая корень квадратный из левой и правой части неравенства $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$, получим:

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|\Rightarrow\left|\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\right|\le 1 \qquad (*)$$

неравенство (*) называют неравенством Коши-Буняковского.

§ 2. Ортогональные системы. Ортонормированный базис. Изоморфизм n-мерных евклидовых пространств.

Пусть дано евклидово пространство E_n.

Определение 1: *Два вектора a и b из E_n над R называются ортогональными, если (a,b)=0.*

Обозначение: $a\perp b$.

Замечание 1: Нулевой вектор будет ортогонален любому вектору. Действительно, $(\theta,a)=0 \Rightarrow \theta\perp a$.

Определение 2: *Система векторов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ в евклидовом пространстве называется ортогональной, если все векторы этой системы попарно ортогональны, то есть $(a_i,a_k)=0$, $i\neq k$, $i,k=1,2,\ldots,n$.*

Замечание 2: В пространстве R^n условие ортогональности x и y имеет вид: $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n=0$.

Пример 1: Выяснить будут ли векторы a=(1,-1,3), b=(2,2,0) и θ=(0,0,0) ортогональны.

Решение:

Вычислим (a,b), (a,θ), (b,θ). $(a,b)=0$, $(a,\theta)=0$, $(b,\theta)=0$, следовательно, система векторов a, b, θ - ортогональна.

Теорема 1: *Ортогональная система $a_1,a_2,\ldots,a_k$, состоящая из ненулевых векторов, всегда линейно независима.*

Доказательство:

Предположим противное, пусть система $a_1,a_2,\ldots,a_k$ линейно зависима. Запишем условие линейной зависимости этой системы (*): $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots\alpha_k a_k=\theta$, в этом равенстве хотя бы одно $\alpha_i\neq 0$. Пусть это будет α_1. Теперь домножим скалярно на вектор a_1 левую и правую часть равенства (*). Получим, $\alpha_1(a_1,a_1)+ \alpha_2(a_2,a_1)+\ldots+ \alpha_k(a_k,a_1)=(\theta,a_1)$. Так как все векторы системы $a_1,a_2,\ldots,a_k$ попарно ортогональны по условию, то мы получим, что $\alpha_1(a_1,a_1)=0$, так как $\alpha_1\neq 0$, то $(a_1,a_1)=0$ (так как в поле R нет делителей нуля). Тогда получаем, что вектор $a_1=\theta$, что противоречит условию теоремы. Значит, все $\alpha_1=0$ и система линейно независима.

Следствие: *Если $\dim V=n$, то любая ортогональная система из n-ненулевых векторов будет базой пространства V.*

Определение 3: *База евклидова пространства V, все векторы которой попарно ортогональны, называется ортогональной базой.*

Определение 4: *Базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ евклидова пространства V над R называется ортонормированным, если:*

а) этот базис ортогональный, то есть $(e_i,e_k)=0$ при $i\neq k$;

б) каждый из базисных векторов является нормированным: $\|e_i\|=1$.

Теорема 2 *(о существовании ортонормированного базиса): Для любой системы векторов n-мерного евклидова пространства, с числом векторов $p<n$, найдется ненулевой вектор, ортогональный всем векторам этой системы.*

Доказательство:

Пусть $\dim V=n$, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ - *база* V, $a_1,a_2,\ldots,a_p$ - произвольная система векторов из V. Обозначим через (x) искомый вектор и разложим его по базису $e_1,e_2,\ldots,e_n$, $x=x_1e_1+ x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, так как вектор (x) должен быть ортогонален a_i *(i=l,2,..,p),* то система

$$\begin{cases}(x,a_1)=0\\(x,a_2)=0\\-----\\(x,a_p)=0\end{cases} \quad (1)$$

должна иметь ненулевое решение.

Распишем систему (1) подробно, получим:

$$\begin{cases}(\mathrm{x}_1e_1+\mathrm{x}_2e_2+\ldots+\mathrm{x}_\mathrm{n}e_n,a_1)=0\\(\mathrm{x}_1e_1+\mathrm{x}_2e_2+\ldots+\mathrm{x}_\mathrm{n}e_n,a_2)=0\\----------------\\(\mathrm{x}_1e_1+\mathrm{x}_2e_2+\ldots+\mathrm{x}_\mathrm{n}e_n,a_p)=0\end{cases} \quad (2)$$

в этой системе число переменных будет больше числа уравнений (если вместо векторов подставить их координаты и вычислить скалярные произведения). Следовательно, система (1) имеет ненулевое решение, а значит, вектор $x\neq\theta$ и $x\perp a_i$ *(i=l,2,...,p).*

Замечание: Из доказанной теоремы непосредственно вытекает существование ортогонального базиса. Для его построения нужно взять произвольный вектор a_1, затем найти вектор a_2, такой, что $a_2\perp a_1$, затем найти a_3: $(a_3\perp a_1)\&(a_3\perp a_2)$ и т.д. пока не получим ортогональную базу $a_1,a_2,\ldots,a_n$ (существование векторов $a_2,a_3,\ldots,a_n$ обеспечено теоремой 2)

Теперь, чтобы получить ортонормированный базис, нужно каждый вектор ортогональной базы $a_1,a_2,\ldots,a_n$ нормировать, то есть записать систему: $e_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}$, $e_2=\frac{a_2}{\|a_2\|},\ldots,$ $e_n=\frac{a_n}{\|a_n\|}$, которая и будет ортонормированной базой евклидова пространства V над *R*..

Особая роль ортонормированного базиса состоит в том, что скалярное произведение векторов в этом базисе очень просто вычисляется через их координаты.

Действительно, если $x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \ldots + \alpha_ne_n$ и $y = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \ldots + \beta_ne_n$, то $(x,y) = \alpha_1\beta_1(e_1,e_1) + \alpha_2\beta_1(e_2,e_1) + \ldots + \alpha_n\beta_1(e_n,e_1) +\ldots+ \alpha_1\beta_n(e_1,e_n) + \alpha_2\beta_n(e_2,e_n) + \ldots + \alpha_n\beta_n(e_n,e_n) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$, так как $(a_i,a_k) = 0$ при $i \neq k$, а $(a_i,a_i) = 1$.

Вывод: Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат. Кроме этого, если $e_1,e_2,...,e_n$ - ортонормированная база и $a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$, то $\alpha_i=(e_i,a)$. Проверьте самостоятельно.

В §1 мы уже отмечали, что скалярное произведение векторов в n-мерном пространстве можно определить различными способами. Поэтому, может показаться, что в каждом случае мы будем получать различные евклидовы пространства. Однако, это не так. Мы сейчас докажем, что все n-мерные евклидовы пространства изоморфны между собой, если примем следующее определение.

Определение 5: *Два n-мерных евклидовых пространства U и V над R называются изоморфными, если существует биекция* φ: $U \to V$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $\forall\ x, y \in U$, $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$
2. $\forall\ k \in R\ \forall\ x \in U$, $\varphi(kx)=k\varphi(x)$
3. $\forall\ x, y \in U$, $(x,y)=(\varphi(x),\varphi(y))$.

Из этого определения следует, что отображение φ: $U \to V$ сохраняет операции сложения векторов, умножение вектора на скаляр и их скалярное произведение.

Теорема 3: *Любое ненулевое n-мерное евклидово пространство V над R изоморфно стандартному евклидову пространству* E_n.

Доказательство:

Пусть $dim\ V=n>0$, $e_1,e_2,...,e_n$ - ортогональная база пространств V. Произвольный вектор $a\in V$ разложим по базису, $a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$, $\alpha_i\in$R. Зададим отображение φ: $V\to E_n$, φ: $a\mapsto(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Уже было доказано, что φ - биекция и выполняются условия: а) $\forall\ a,b\in V$, $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$; б) $\forall\ k\in R$ $\forall\ a\in V$, $\varphi(ka)=k\varphi(a)$, так как V и E_n изоморфны как линейные пространства.

Остается доказать, что $\forall\ a,b\in V$, $(a,b)=(\varphi(a),\varphi(b))$. Вычислим,

$$\left.\begin{array}{r}(a,b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n\\ (\varphi(a),\varphi(b))=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n\end{array}\right|\Rightarrow(a,b)=(\varphi(a),\varphi(b)).$$

Вывод: Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует только одно евклидово пространство размерности (n), Следовательно, все теоремы элементарной геометрии будут справедливыми в любом трехмерном подпространстве любого евклидова пространства.

Пример 1: *Докажем теорему Пифагора.*

Пусть векторы *(x)* и *(y)* ортогональны, тогда, по аналогии с элементарной геометрией, вектор *(x+y)* можно назвать гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на векторах (x) и *(y)*. Умножая *(x+y)* скалярно на себя и используя ортогональность векторов *x* и *y,* мы получим, $||x+y||^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(y,y)=||x||^2+||y||^2$

Нетрудно обобщить эту теорему на случай любою числа векторов. Пусть векторы $x_1,x_2,...,x_k$ попарно ортогональны и $z = x_1 + x_2 + ... + x_k$, тогда, $||z||^2 = (x_1 + x_2 +... + x_k, x_1 + x_2 +...+ x_k) =$ $= ||x_1||^2 + ||x_2||^2 + ... + ||x_k||^2$.

Пример 2: *Докажем неравенство треугольника.*

Если x и y произвольные векторы, то вектор *(x+y)* будем называть третьей стороной треугольника, построенного на векторах (x) и (y). Используя неравенство Коши-Буняковского, мы получим $||x+y||^2 = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq ||x||^2 + 2||x||\cdot||y|| + ||y||^2 =$ $= (||x|| + ||y||)^2 \Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Таким образом, можно и дальше переносить теоремы элементарной геометрии на евклидово пространство, однако в силу доказанного выше изоморфизма, все они будут справедливы в любом n-мерном евклидовом пространстве.

§ 3. Ортогональное дополнение подпространства. Процесс ортогонализации.

Пусть дано евклидово пространство E_n, Z любое его подпространство.

Определение 1: *Вектор* $(b) \in E_n$, *называется ортогональным подпространству Z* $(b \perp Z)$, *если он ортогонален каждому вектору подпространства Z.*

Теотема 1: *Для того, чтобы вектор (b) был ортогонален подпространству Z достаточно, чтобы он был ортогонален каждому вектору базы этого подпространства.*

Доказательство:

Пусть $Z < E_n$, $(b) \in E_n$, $a_l, a_2, ..., a_к$ – база Z и $(b,a_i)=0$ ($i=1,2,\dots,k$). Покажем, что вектор (b) будет ортогонален любому вектору подпространства Z. Пусть вектор $x \in Z$, тогда, $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$. Найдем,

$$(x,b) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k, b) = \alpha_1(a_1,b) + \alpha_2(a_2,b) + ... + \alpha_k(a_k,b) = 0,$$

тогда, $b \perp x$.

Определение 2: Если $Z < E_n$, то множество $L^{\perp} \overset{df}{=} \{x \in E_n | x \perp L\}$ называется ортогональным дополнением подпространства Z.

Теорема 2: Ортогональное Дополнение $L^{\perp} < E_n$.

Доказательство:

Пусть $x, Y \in L^{\perp}$, а $z \in L$, тогда, $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y,z) = 0$, так как $(x \perp z) \& (Y \perp z) \Rightarrow (\alpha X + \beta Y) \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp} < E_n$. Опираясь на определение $L^{\perp}$ и теорему 2, можно доказать следующие утверждения:

а) $L \cap L^{\perp} = \{\theta\}$;

б) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;

в) $L \dot{+} L^{\perp} = E_n$.

Действительно, докажем а) Пусть $x \in L \cap L^{\perp} \Rightarrow (x \in L)$ & & $(x \in L^{\perp}) \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow (x = \theta)$.

б) докажите самостоятельно.

в) нужно доказать, что $E_n = L \dot{+} L^{\perp}$, это будет выполняться в том случае, если: 1. $L \cap L^{\perp} = \{\theta\}$; 2. $\forall x \in E_n$ представим в виде суммы: $x = a + b$, где $a \in L$, $b \in L^{\perp}$.

Первое условие уже доказано, докажем условие 2.

Для этого выберем в подпространстве L какой-нибудь ортогональный базис $e_l, e_2, ..., e_p$ Нам необходимо найти такой вектор $(a) \in L$, чтобы разность $(x - a) \in L$, тогда обозначив эту разность через вектор (b), получим искомое разложение $x = a + b$.

Запишем искомый вектор (a) в виде линейной комбинации базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_p$ пространства L, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p$. В этом равенстве скаляры α_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) должны быть такими, чтобы вектор $(x - a) \perp L$, где $x - a = x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_p e_p$. Для этого достаточно (см. теорему 1), чтобы он был ортогонален базисным векторам, то есть, чтобы выполнилась система равенств:

$$\begin{cases} (x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_p e_p, e_1) = 0 \\ (x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_p e_p, e_2) = 0 \\ \text{-------------------} \\ (x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_p e_p, e_p) = 0 \end{cases} \quad (1),$$

которая будет равносильна системе

$$\begin{cases} (x, e_1) - \alpha_1 (e_1, e_1) - \alpha_2 (e_2, e_1) - \ldots - \alpha_p (e_p, e_1) = 0 \\ (x, e_2) - \alpha_1 (e_1, e_2) - \alpha_2 (e_2, e_2) - \ldots - \alpha_p (e_p, e_2) = 0 \\ \text{----------------------------} \\ (x, e_p) - \alpha_1 (e_1, e_p) - \alpha_2 (e_2, e_p) - \ldots - \alpha_p (e_p, e_p) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_p$ попарно ортогональны, то $(e_i, e_k) = 0$, если $i \neq k$, и система (2) примет вид:

$$\begin{cases} (x, e_1) = \alpha_1 (e_1, e_1) \\ (x, e_2) = \alpha_2 (e_2, e_2) \\ \text{-----------} \\ (x, e_p) = \alpha_p (e_p, e_p) \end{cases}$$

Из системы (3) α_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) определяются однозначно, а следовательно, и вектор (a), который будет равен:

$$a = \frac{(x, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \frac{(x, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \ldots + \frac{(x, e_p)}{(e_p, e_p)} e_p$$

Итак, мы нашли вектор (a), тогда вектор $b = x - a$ и теорема доказана, то есть $E_n = L + L^{\perp}$.

Замечание 1: Вектор (a) называется ортогональной проекцией вектора (x) на подпространство L и обозначается $пр_L x$, а вектор (b) - ортогональной составляющей (x), относительно L.

Задача 1: Найти ортогональную проекцию вектора x = (5,2,-2, 2) на подпространство L = L(b_1, b_2), где b_1=(2,1,1,-1), b_2=(1,1,3,0).

Решение:

Пусть a =$\beta_1 b_1$ + $\beta_2 b_2$, запишем условие ортогональности вектора (x - a) с векторами b_1 и b_2:

$$\begin{cases}(x,b_1)-\beta_1(b_1,b_1)-\beta_2(b_2,b_1)=0\\(x,b_2)-\beta_1(b_1,b_2)-\beta_2(b_2,b_2)=0\end{cases}$$

Так как векторы b_1, b_2 не ортогональны (проверьте!), то вычисляя все скалярные произведения, получим систему:

$$\begin{cases}8-7\beta_1-6\beta_2=0\\1-6\beta_1-11\beta_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta_1=2\\\beta_2=-1\end{matrix}$$

Следовательно, a = $пр_L$x = 2b_1- b_2= (3, 1, -1, -2).

Задача 2: Найти ортогональное дополнение $L^\perp$ к подпространству L, порожденному векторами a_1=(1, 1, 0, -3, -1); a_2 = (1, -1, 2,-1, 0).

Решение:

Любой x $\in$ $L^\perp$ будет иметь пять координат, то есть x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), так как L < E_5. Вектор (x) будет принадлежать $L^\perp$ тогда и только тогда, когда $(x,a_1)=0$ и $(x,a_2)=0$, то есть

$$\begin{cases}1\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+3\cdot x_4+(-1)\cdot x_5=0\\1\cdot x_1+(-1)\cdot x_2+2\cdot x_3+(-1)\cdot x_4+0\cdot x_5=0\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим ее общее решение: $x_1=-x_3+2x_4+\frac{1}{2}x_5; x_2=x_3+x_4+\frac{1}{2}x_5$, которое будет определять множество векторов пространства $L^\perp$. Чтобы найти базис $L^\perp$, нужно найти фундаментальную систему решений, например, b_1=(-1, 1, 1, 0, 0), b_2=(2, 1, 0, 1, 0), b_3=(1/2, 1/2, 0, 0, 1). Тогда, $L^\perp$= L(b_1, b_2, b_3).

Задача 3: В пространстве E_n задана линейно независимая система векторов c_1, c_2,…, c_k, где k < n. Построить ортонормированный базис E_n.

Решение:

1 шаг: дополним систему $c_1, c_2, \ldots, c_k$. До базы пространства E_n (см. теорему 1 §6 гл. 7). Пусть система $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будет базой E_n. Построим на ее основе ортогональную базу E_n, $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Обозначим через $L_1 = L(a_1)$, $L_2 = L(a_1, a_2)$, …, $L_n = L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Теперь будем строить искомые векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ так, чтобы

$b_1 \in L_1$

$b_2 \in L_2$, причем, $b_2 \perp L_1$.

$b_3 \in L_3$, причем, $b_3 \perp L_2$.

$b_n \in L_n$, причем, $b_n \perp L_{n-1}$.

Для этого положим: $b_1 = a_1$, тогда, $b_2 \in L_2$, $b_2 \neq 0$ можно представить в виде: $b_2 = a_2 + \alpha_l a_1 = a_2 + \alpha_1 b_l$, $b_2 \neq 0$, так как a_1, a_2 - линейно независимы. Скаляр λ_1 найдем из условия: $(b_2, b_l) = 0$, $(b_2, b_l) = (a_2 + \alpha_1 b_l, b_l) = =(a_2, b_l) + \lambda_1 (b_1, b_l) = 0$.

Тогда, $\lambda_1 = -\dfrac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}$. Так как $b_3 \in L_3$, то

$b_3 = a_3 + \alpha_1' b_1 + \alpha_2' b_2$. Скаляры $\alpha`_1$ и $\alpha`_2$

будем искать из условий:

$$\begin{cases}(b_3,b_1)=0\\(b_3,b_2)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a_3+\alpha_1' b_1+\alpha_2' b_2,b_1)=0\\(a_3+\alpha_1' b_1+\alpha_2' b_2,b_2)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a_3,b_1)+\alpha_1'(b_1,b_1)+\alpha_2'(b_2,b_1)=0\\(a_3,b_2)+\alpha_1'(b_1,b_2)+\alpha_2'(b_2,b_2)=0\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\alpha_1' = -\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}, \alpha_2' = -\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$$

и так далее. Так как вектор $b_n \in L_n$, то представим его в виде линейной комбинации векторов L_n: $b_n = a_n + \alpha_1'' b_1 + \alpha_2'' b_2 + \ldots + \alpha_i'' b_i + \ldots + \alpha_{n-1}'' b_{n-1}$, тогда, из условий $(b_n, b_1) = 0$, $(b_n, b_2) = 0, \ldots, (b_n, b_{n-1}) = 0$ найдем все скаляры $\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots, \alpha''_{n-1}$, или короче, $(b_n, b_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots (n-1)$.

$$(b_n,b_i)=(a_n+\alpha_1'' b_1+\alpha_2'' b_2+\alpha_{n-1}'' b_{n-1},b_i) \Rightarrow (a_n,b_i)+\alpha_1''(b_1,b_i)+\ldots+\alpha_i''(b_i,b_i)+\ldots+$$

$$+\alpha_{n-1}''(b_{n-1},b_i)=0 \quad \Rightarrow \; \alpha_i'' = -\frac{(a_n,b_i)}{(b_i,b_i)}$$

Итак, мы построили ортогональную базу b_1, $b_2,...,b_n$ пространства E_n. Алгоритм построения называют процессом ортогонализации.

Теперь, чтобы построить ортонормированную базу E_n, нужно каждый вектор системы $b_1, b_2,...,b_n$ нормировать. Тогда система $e_1 = \dfrac{b_1}{\| b_1 \|}, e_2 = \dfrac{b_2}{\| b_2 \|},..., e_n = \dfrac{b_n}{\| b_n \|}$ будет ортогональной базой пространства E_n.

Задача 4: Построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на векторы

$c_1 = (2, -2, -2, 2)$, $c_2 = (3, -1, -1, 3)$, $c_3 = (2, -2, 0, 4)$.

Решение:

1 шаг: Найдем базис $L(c_1, c_2, c_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 3,$$

следовательно, c_1, c_2, c_3 - база $L(c_1, c_2, c_3)$.

2 шаг: строим ортогональную базу: $a_1 = c_1 = (2, -2, -2, 2)$

$a_2 = c_2+\lambda_1 c_1 = c_2+\lambda_1 a_1$

$(a_1, a_2) = 0 \Rightarrow (a_1, c_2 + \lambda_1 a_1) = (a_1, c_2) + \lambda_1(a_1, a_1) = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = -\frac{(a_2, c_2)}{(a_1, c_2)} = -\frac{16}{16} = -1$$

$a_2 = c_2 - a_1 = (3, -1, -1, 3) - (2, -2, 2, 2) = (1, 1, 1, 1)$.

$a_3 = c_3+\lambda`_1 a_1+\lambda`_2 a_2$. Из условий $(a_3, a_1) = 0$ и $(a_3, a_2) = 0$ находим λ_1' и λ_2'.

$$\lambda_1' = -\frac{(a_1, c_3)}{(a_1, a_1)} = -1, \quad \lambda_2' = -\frac{(a_2, c_3)}{(a_2, a_2)} = -1$$

$a_3 = c_3 - a_1 - a_2 = (2, -2, 0, 4) - (2, -2, -2, 2) - (1, 1, 1, 1) = (-1, -1, 1, 1)$.

3 шаг: нормируем каждый вектор системы a_1, a_2, a_3

$$e_1 = \frac{a_1}{\| a_1 \|} = \frac{a_1}{4} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \qquad e_2 = \frac{a_2}{\| a_2 \|} = \frac{a_2}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2});$$

$$e_3 = \frac{a_3}{\| a_3 \|} = \frac{a_3}{2} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Евклидово пространство над полем С.

Понятие евклидова пространства мы определили для конечномерных пространств над полем R.

Рассмотрим теперь любое конечномерное пространство над полем комплексных чисел. На первый взгляд, кажется естественным, что скалярное произведение двух векторов с комплексными координатами снова можно определить в виде равенства: $(x, y) = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n$ (*).

Однако, при этом теряется много важных свойств скалярного произведения, в частности, что $(x, x) > 0$. Действительно, для вектора $x = 3e_1 + 4e_2 + 5ie_3$ из равенства (*) мы получим, $(x, x) = 9 +16 - 25 = 0$. Поэтому, чтобы сохранить все свойства скалярного произведения, равенство (*) записывают в виде $(x, y) = \alpha_1\overline{\beta_1}+\alpha_2\overline{\beta_2}+\ldots\alpha_n\overline{\beta_n}$, где черта означает переход к комплексно сопряженным числам

(от $z = x + iy$ к $\overline{z} = x - iy$). В случае, когда векторы x и y имеют вещественные координаты, $\overline{\beta_i} = \beta_i$ и новое определение будет совпадать со старым, если же x и y имеют комплексные координаты, то

$(x,x)= \alpha_1\overline{\alpha_1}+\alpha_2\overline{\alpha_2}+\ldots+\alpha_n\overline{\alpha_n} =|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\ldots+|\alpha_i|^2>0$,

где $|\alpha_i|^2$ - модуль комплексного числа α_i. В нашем примере, $(x, x) = 9 + 14 + 25 = 48 > 0$. Другие два свойства скалярного произведения:

а) $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$;

б) $(a, b+c) = (a, b)+(a, c)$.

также будут выполняться (проверьте!).

Что касается свойства $(a, b) = (b, a)$, то оно для векторов с комплексными координатами изменяет свой вид: $(a,b)=\overline{(b,a)}$.

Действительно, $(a,b) = \alpha_1\overline{\beta_1}+\alpha_2\overline{\beta_2}+\ldots\alpha_n\overline{\beta_n}$,

$\overline{(b,a)} = \overline{\beta_1\overline{\alpha_1}+\beta_1\overline{\alpha_1}+\ldots+\beta_1\overline{\alpha_1}} = \alpha_1\overline{\beta_1}+\alpha_2\overline{\beta_2}+\ldots+\alpha_n\overline{\beta_n}$.

Итак, в конечномерном линейном пространстве V над полем С, скалярное произведение двух векторов определяется формулой (x, y)=$\alpha_1\overline{\beta_1}+\alpha_2\overline{\beta_2}+...\alpha_n\overline{\beta_n}$, и обладает следующими свойствами:

а) $(x,y)=\overline{(y,x)},\forall x,y\in V$

б) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),\forall x,y\in V,\forall\alpha\in C$

в) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z),\forall x,y,z\in V$

г) $(x,x)>0,\forall x\in V,x\neq\theta$

Это пространство называют комплексным унитарным пространством.

ГЛАВА 3. Линейные операторы.

§ 1. Определение линейного оператора.

Пусть даны два конечномерных линейных пространства U и V над полем F.

Определение 1: Любой гомоморфизм φ: U→V называется линейным отображением пространства U в V.

Замечание 1: Из определения следует, если φ - линейное отображение U в F, то

а) φ - всюду определенное, функциональное соответствие;

б) φ - сохраняет операции, то есть $\forall$ a, b $\in$ U, $\forall$ α, β $\in$ F, φ(αa+βb) = αφ(a)+βφ(b)

Множество всех линейных отображений пространства U в V обозначают символом: Hom(U,V) = {φ| φ: U → V).

Определение 2: Гомоморфизм φ: V→V называется линейным оператором в пространстве V.

Обозначение: Hom(V,V) = {φ| φ: V→V).

Из определения 2 следует, что линейный оператор является частным случаем линейного отображения, когда U = V.

Примеры линейных операторов (линейных отображений):

1. Зададим отображение φ: $R^2\to R^2$, φ: x→λx, где $x\in R^2$. Покажем, что φ - будет линейным оператором в пространстве R^2.

Действительно: $\forall x,y\in R^2$ $\forall$ $\alpha,\beta\in R$, $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$, так как $\varphi(\alpha x+\beta y)=\lambda(\alpha x+\beta y)$, $\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y)$

Этот оператор называют оператором гомотетии:

а) при $\lambda=0$, получим оператор φ: $x\to\theta$, который каждый вектор пространства R^2 переводит в нулевой вектор. В этом случае φ - называют нулевым оператором;

б) если $\lambda=1$, то получим оператор φ: $x\to x$, который каждый вектор пространства R^2 переводит сам в себя. В этом случае φ- называют тождественным оператором;

в) если $\lambda=-1$, то получим оператор φ: $x\to -x$, который каждый вектор пространства R^2 переводит в противоположный вектор (φ - оператор перемены направления).

2. Пусть $V = U+Z$, тогда $\forall x\in V$, $x = x_1+x_2$, где $x_1\in U$, $x_2\in Z$. Зададим отображение φ: $V\to V$, φ: $x\to x_1$ Проверьте, что φ - будет линейным оператором. Его называют оператором проектирования на подпространство U.

3. Пусть дано линейное пространство V многочленов от одной переменной степени < n. Зададим отображение φ: $V\to V$, $\varphi: f\to f'$, где f' - первая производная многочлена f. Тогда, как известно, $\forall f,g\in V$, $(f+g)' = f'+ g'$ и $\forall\lambda\in R$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, следовательно, отображение φ - оператор.

Пусть φ оператор пространства V в V.

Определение 3: Множество $\mathrm{Ker}\varphi \overset{df}{=} \{x|\ \varphi(x) = \theta\}$ называется ядром линейного оператора φ.

Замечание 3: Из этого определения следует, что ядро линейного оператора является полным прообразом нулевого вектора. Обозначение произошло от английского слова «kernel» - ядро.

Теорема 1: $<\mathrm{Ker}\varphi, +, \{\omega\lambda|\ \lambda\in F\}> < V$.

Доказательство:

$\forall x, y\in\mathrm{Ker}\,\varphi, \forall\alpha, \beta\in F$ $\varphi(\alpha x+\beta y) = \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y) = \alpha\theta+\beta\theta = \theta \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha x+\beta y)\in\mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi < V$.

Определение 4: $\dim\mathrm{Ker}\varphi$ называется дефектом линейного оператора φ.

Определение 5: Множество $\mathrm{Im}\varphi \overset{df}{=} \{\varphi(x)\in V|\ \ x\in V\}$ называется образом линейного оператора φ (областью значений).

Замечание 4: Из этого определения следует, что область значений оператора φ, есть образ всего пространства V.

Теорема 2: $<\mathrm{Im}\varphi, +, \{\omega\lambda|\ \lambda\in F\}> \, < V$.
(докажите самостоятельно).

Определение 6: $\dim \mathrm{Im}\varphi$ называют рангом линейного оператора φ.

Пример 4: Пусть дано пространство R^3, его можно представить в виде прямой суммы подпространств, $R^3 = XOZ + OY$, тогда, $\forall\ x \in R^3$ можно однозначно представить в виде: $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in XOZ$, $x_2 \in OY$.

Зададим отображение φ: $R^3 \to R^3$, которое $\forall x\in R^3$, $\varphi(x) = x_1$. Очевидно, что $\mathrm{Im}\varphi$ - оператор проектирования. Ядро этого оператора $\mathrm{Ker}\varphi = OY$, $\mathrm{Im}\varphi = XOY$. $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}\varphi = 1$, $\dim \mathrm{Im}\varphi = 2$. Видим, что $\dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim R^3$. Докажем, что это равенство будет иметь место и в общем случае.

Теорема 3: Если $\varphi\in \mathrm{Hom}(V, V)$ и $\dim V = n$, то
$\dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V$ (или дефект φ+ранг $\varphi = n$).

Доказательство:

Пусть $\varphi\in \mathrm{Hom}(V, V)$, $\dim V = n$, $\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$ и $\dim \mathrm{Ker}\varphi = k$. Выберем какую-нибудь базу подпространства $\mathrm{Ker}\varphi$ в пространстве V. Пусть система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - база $\mathrm{Ker}\varphi$. Дополним ее до базы пространства V $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Образы векторов этой базы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ будут принадлежать V. Линейная оболочка этих векторов будет порождать $\mathrm{Im}\varphi$, то есть $L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{Im}\varphi$.

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_k$- база $\mathrm{Ker}\varphi$, то $\varphi(e_1) = \theta$, $\varphi(e_2) = \theta, \ldots, \varphi(e_k) = \theta$. Поэтому, $\mathrm{Im}\varphi = L\ (\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$. Докажем, что система образов векторов $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независима. Составим условие линейной зависимости: $\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = \theta$, так как φ - линейный оператор в пространстве V, то левую часть этого равенства можно записать так: $\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = \theta \Rightarrow$

$y = (\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n) \in Ker\varphi$. Выразим этот вектор через базу $Ker\varphi$.

Получим, $y = \lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k \Rightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k - -\lambda_{k+1}e_{k+1} - \ldots - \lambda_n e_n = \theta$. Так как система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ - является базой пространства V, то все скаляры λ_i в последнем равенстве будут равны 0. Следовательно, $\dim Im\varphi = n-k$, что и требовалось доказать.

Следствие: $V = Ker\varphi \dotplus Im\varphi$.

§ 2. Линейное пространство операторов.

Пусть дано множество Hom(V,V). Определим на этом множестве следующие действия:

$\forall\ \varphi, \psi \in Hom(V, V), \forall\ x \in V, \forall\ \lambda \in F$

1. $(\varphi+\psi)(x) \overset{df}{=} \varphi(x)+\psi(x)$ - (сложение операторов).
2. $(\lambda\varphi)(x) \overset{df}{=} \lambda\varphi(x)$ - (умножение оператора на скаляр).
3. $(\varphi^\circ\psi)(x) \overset{df}{=} \varphi(\psi(x))$ - (композиция операторов).

Теорема 1: Множество Hom(V, V) относительно действий сложения операторов и умножения оператора на скаляр, является линейным пространством над полем F.

Доказательство:

1. Докажем, что $\langle Hom(V, V), +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\} \rangle$ - алгебра, то есть Hom(V, V) замкнуто относительно указанных действий:

а) $\forall\ \varphi, \psi \in Hom(V, V)$, нужно показать, что $(\varphi+\psi) \in Hom(V, V)$ и

б) $\forall\ \varphi \in Hom(V, V), \forall\ \lambda \in F\ \ \lambda\varphi \in Hom(V,V)$.

Действительно, $\forall\ x, y \in V, \forall\ \alpha, \beta \in F$

$(\varphi+\psi)(\alpha x+\beta y) = \varphi(\alpha x+\beta y)+\psi(\alpha x+\beta y) =$
$=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)+\alpha\psi(x)+\beta\psi(y) = \alpha[\varphi(x)+\psi(x)]+\beta[\varphi(y)+\psi(y)] =$
$\alpha(\varphi+\psi)(x)+\beta(\varphi+\psi)(y) \Rightarrow (\varphi+\psi) \in Hom(V, V)$.

Аналогично,

$(\lambda\varphi)(\alpha x+\beta y) = \lambda\varphi(\alpha x+\beta y) = \lambda[\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)] = \alpha\lambda\varphi(x)+\beta\lambda\varphi(y) =$
$= \alpha(\lambda\varphi)(x)+\beta(\lambda\varphi)(y) \Rightarrow \lambda\varphi \in Hom(V, V)$.

2. Теперь докажем, что $\langle Hom(V, V),+ \rangle$ - абелева группа, то есть

а) $\forall$ φ, ψ $\in$ Hom(V, V), φ+ψ = ψ+φ
б) $\forall$ φ, ψ, δ $\in$ Hom(V, V), (φ+ψ)+δ = φ+(ψ+δ)
в) $\exists$ δ $\in$ Hom(V, V), $\forall$ φ $\in$ Hom(V, V), δ+φ = φ+δ = φ
г) $\forall$ φ $\in$ Hom(V, V), $\exists$ (-φ): φ+(-φ) = (-φ)+φ = δ

Для доказательства равенств а, б, в, г достаточно взять любой вектор x$\in$V, подействовать на него оператором левой части равенства, а затем оператором правой и сравнить полученные результаты.

Например,

$$\left.\begin{array}{c}\forall x \in V, (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x) \\ (\psi+\varphi)(x) = \psi(x)+\varphi(x) = \varphi(x)+\psi(x)\end{array}\right| \Rightarrow (\varphi+\psi) = (\psi+\varphi).$$

Равенства б, в, г докажите самостоятельно.

3. Осталось проверить выполнимость следующих аксиом в определении линейного пространства:

а) $\forall$ λ $\in$ F , $\forall$ φ, ψ $\in$ Hom(V, V), λ(φ+ψ) = λψ+λφ
б) $\forall$ α, β $\in$ F, $\forall$ φ $\in$ Hom(V, V), (α+β)φ = αφ+βφ
в) $\forall$ α, β $\in$ F, $\forall$ φ $\in$ Hom(V, V) , (αβ)φ = α(βφ)
г) $\forall$ φ $\in$ Hom(V, V), 1φ = φ.

Проделайте это самостоятельно.

Итак, <Hom(V, V), +, $\{\omega_\lambda | \lambda \in R\}$> - линейное пространство.

Пример 1: В линейном пространстве R^2 заданы два отображения: φ: $R^2 \to R^2$, где φ - поворачивает $\forall$x$\in$ R^2 на угол α относительно оси OY и ψ: $R^2 \to R^2$, растягивающий вектор (x) в (к) раз, где k$\in$N.

Легко проверить, что φ и ψ - линейные операторы. Действительно, покажем, что φ $\in$ Hom(R^2, R^2). $\forall$ x, y $\in$ R^2, φ(x+y) = φ(x)+φ(y) (если векторы (x) и (y) сначала сложить, а потом повернуть вокруг оси OY на угол α, то мы получим тот же результат, если сначала каждый вектор повернем вокруг оси OY на угол α, а затем полученные векторы сложим).

Аналогично, $\forall$λ$\in$F, φ(λx) =φλ(x) (если вектор x растянуть (сжать) в λ раз, а затем повернуть на угол α, то получится тот же результат, если вектор (x) сначала повернуть на угол α, а затем растянуть (сжать) в λ раз).

Какой смысл будут иметь операции $(\varphi+\psi)$, $(\varphi \circ \psi)$ и $(\lambda\varphi)$ в этом случае?

$(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ - (вектор (х) повернули на угол α, вектор (х) растянули в (к) раз, а затем полученные векторы сложили).

$(\varphi \circ \psi)(X) = \varphi(\psi(x))$ - (вектор (х) растянули в (к) раз, а затем повернули на угол α).

$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ - (вектор (х) повернули на угол α, а затем растянули (сжали) в λ раз).

§ 3. Матрица линейного оператора, изоморфизм пространств Hom(V, V) и $M_{nn}(F)$.

Пусть дано конечномерное линейное пространство V над полем F, линейное пространство операторов $\langle Hom(V, V), +, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\}\rangle$, $\dim V = n$. Выберем в пространстве V базу (1) $e_1, e_2, ..., e_n$, тогда, для $\forall\varphi \in Hom(V, V)$ образы базисных векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)$ будут принадлежать снова пространству V над F и линейно выражаться через базу (1)

$$\begin{array}{l} \varphi(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n \\ \varphi(e_2) = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{2n}e_n \\ \text{-----------------------------} \\ \varphi(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{array} \qquad (2)$$

Систему равенств (2) запишем в матричной форме (3) $\varphi(e_i) = e_i M_\varphi$, где $\varphi(e_i) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)), e_i = (e_1, e_2, ..., e_n)$

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение: Матрица M_φ - называется матрицей линейного оператора φ в фиксированной базе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Замечания:

1. Из определения матрицы M_φ следует, что в фиксированной базе она определяется однозначно.

2. Если перейти к другому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, матрица M_φ также изменится, так как координаты векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ изменятся, а они являются столбцами матрицы M_φ.

3. Соответствие ϕ: $Hom(V, V) \to M_{nn}(F)$ будет отображением, так как φ - всюду определено и функционально ($\forall \varphi \in Hom(V, V)\ \exists!\ M_\varphi \in M_{nn}(F)$: $\phi(\varphi) = M_\varphi$).

Задача 1: Пусть дано пространство R^3, его базис e_1, e_2, e_3: $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$:

а) φ_0 - оператор проектирования на плоскость XOZ;

б) φ_1 - оператор проектирования в начало координат.

Найти матрицы M_{f_0} и M_{f_1}.

Решение:

а) $$\begin{aligned} \varphi_0(e_1) &= \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \lambda_{13}e_3 \\ \varphi_0(e_2) &= \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}e_3 \\ \varphi_0(e_3) &= \lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3 \end{aligned} \qquad M_{f_0} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(e_1) &= e_1 = (1,0,0) \\ \varphi_0(e_2) &= \theta = (0,0,0) \\ \varphi_0(e_3) &= e_3 = (0,0,1) \end{aligned}$$

Так как в единичном базисе координаты векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ и $\varphi(e_3)$ останутся без изменения, то $M_{f_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

б) $$\begin{aligned} \varphi_1(e_1) &= \theta \\ \varphi_1(e_2) &= \theta \Rightarrow M_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_1(e_3) &= \theta \end{aligned}$$

Теорема 1: Отображение Φ: $Hom(V, V) \to M_{nn}(F)$, $\Phi: \varphi \mapsto M_\varphi$ будет биекцией.

Доказательство:

Пусть дано отображение Φ: $Hom(V, V) \to M_{nn}(F)$, которое $\forall \varphi \in Hom(V, V)$ ставит в соответствие единственную матрицу M_φ в фиксированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Докажем, что это отображение будет сюръективным, то есть $\forall A \in M_{nn}(F)$ $\exists\ \varphi \in Hom(V, V)$: $\Phi(\varphi) = A$.

Возьмем произвольную квадратную матрицу $A \in M_{nn}(F)$, ее строчки обозначим через векторы a_1, a_2,..., a_n:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} = a_1 \\ = a_2 \\ \dots \\ = a_n \end{matrix}$$

Составим любую линейную комбинацию базисных векторов пространства V над F, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$ и такую же комбинацию векторов a_i, то есть $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Зададим отображение φ: $V \to V$, такое, что $\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 a_1 + {} + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$, короче можно записать, что $\varphi(e_i) = a_i$. Покажем, что это отображение будет линейным оператором в пространстве V. Для этого нужно проверить выполнимость условия гомоморфности отображения φ, то есть, что $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in F$ а) $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ и $\varphi(\lambda x) = \varphi\lambda(x)$

Так как векторы $x, y \in V$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - база V, то

$$\left. \begin{matrix} x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \\ y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n \end{matrix} \right| \Rightarrow x + y = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n.$$

а) Тогда $\varphi(x+y) = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)a_n$

$$\left. \begin{matrix} \varphi(x) = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \\ \varphi(y) = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_1 a_n \end{matrix} \right| \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)a_n,$$

то есть $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$

б) $$\left. \begin{matrix} \varphi(\lambda x) = \lambda\alpha_1 a_1 + \lambda\alpha_2 a_2 + \ldots + \lambda\alpha_n a_n \\ \lambda\varphi(x) = \lambda(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) = \lambda\alpha_1 a_1 + \ldots + \lambda\alpha_n a_n \end{matrix} \right| \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x).$$

Итак, φ - линейный оператор.

Теперь покажем, что отображение Φ: $\varphi \to M_\varphi$- инъективно, для этого покажем, что $\forall \varphi, \psi \in Hom(V, V)$: $\left. \begin{matrix} \varphi(e_i) = a_i \\ \psi(e_i) = a_i \end{matrix} \right| \Rightarrow \varphi = \psi.$

Пусть $x \in V$, тогда $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$

$$\left. \begin{matrix} \varphi(x) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \\ \psi(x) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \end{matrix} \right| \Rightarrow \varphi = \psi$$

Итак, отображение Ф: Hom(V, V)$\to M_{nn}(F)$ является биекцией.

Связь между координатными столбцами вектора (х) и его образа φ(х).

Пусть дано пространство V над нолем F, dimV = n, $e_1, e_2,...,e_n$ - его база. $\forall$ x $\in$ V, $x = j_1e_1 + j_2e_2 + ...+ j_ne_n$, так как $\varphi(x) \in V$, то $\varphi(x) = \delta_1e_1 + \delta_2e_2 + ... + \delta_ne_n$. Обозначим координатные столбцы векторов (х) и φ(х) через M[x] и M[φ(x)], соответственно.

Теорема 2: $M[\varphi(x)] = M_\varphi\cdot M[x]$.

Доказательство:

Так как $\varphi(e_i) = e_iM_\varphi$, то $\varphi(x) = \varphi(j_1e_1+j_2e_2+...+j_ne_n) =$
$= j_1\varphi(e_1) + j_2\varphi(e_2) +\ldots+ j_n\varphi(e_n) = j_1(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n) + j_2(\alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{2n}e_n) + \ldots + j_n(\alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n) =$
$= \delta_1e_1 + \delta_2e_2 + ... + \delta_ne_n$.

Отсюда

$$\begin{cases} \alpha_{11}j_1 + \alpha_{12}j_2 + ... + \alpha_{1n}j_n = \delta_1 \\ \alpha_{21}j_1 + \alpha_{22}j_2 + ... + \alpha_{2n}j_n = \delta_2 \\ ------------------ \\ \alpha_{n1}j_1 + \alpha_{n2}j_2 + ... + \alpha_{nn}j_n = \delta_n \end{cases} \Rightarrow M[\varphi(x)] = M_\varphi \cdot M[x].$$

Следствие: Если $\varphi \in$ Hom(V, V) с фиксированной базой и для $\forall$ x $\in$ V имеет место равенство:

$M[\varphi(x)] = B\cdot M[x]$, то $B = M_\varphi$.

Теорема 3: Линейные пространства $\langle$Hom(V, V), +, $\{\omega_\lambda|\lambda\in F\}\rangle$ и $\langle M_{nn}(F), +, \{\omega_\lambda|\lambda\in F\}\rangle$ - изоморфны.

Доказательство:

Зададим отображение Ф: Hom(V, V)$\to M_{nn}(F)$, Ф: $\varphi\to M_\varphi$. Мы уже доказали, что это отображение является биекцией (смотрите теорему 1). Остается доказать выполнение условий гомоморфности, то есть, что $\forall$ φ, ψ $\in$ Hom(V, V), $\forall$ λ $\in$ F,

а) Ф(φ+ψ) = Ф(φ)+Ф(ψ); б)Ф(λφ) = λФ(φ).

Так как $\forall\ \varphi \leftrightarrow M_\varphi$, то эти условия в матричной форме записи будут иметь вид:

а) $M_{\varphi+\psi} = M_\varphi + M_\psi$; б) $M_{\lambda\varphi} = \lambda M_\varphi$.

Докажем а) Пусть $\forall x\in V$, тогда $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$. Векторы $\varphi(x)$, $\psi(x)\in V$, разложим их по базису пространства V, получим,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)=j_1e_1+j_2e_2+\ldots+j_ne_n\\ \psi(x)=\delta_1e_1+\delta_2e_2+\ldots+\delta_ne_n\end{array}\right| \Rightarrow \varphi(x)+\psi(x)=(\varphi+\psi)(x)=(j_1+\delta_1)e_1+\ldots+(j_n+\delta_n)e_n.$$

Тогда, $$M[(\varphi+\psi)(x)] = \begin{pmatrix} j_1+\delta_1 \\ --- \\ j_n+\delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \\ -- \\ j_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ -- \\ \delta_n \end{pmatrix} =$$

$$= M[\varphi(x)] + M[\psi(x)] = M_\varphi M[x] + M_\psi M[x] = (M_\varphi + M_\psi)M[x]$$

по следствию из теоремы 2, $M_{\varphi+\psi} = M_\varphi + M_\psi$.

Аналогично можно доказать условие(δ) (докажите самостоятельно).

Итак, $Hom(V, V) \cong M_{nn}(F)$.

Следствие: $M_{\varphi\circ\psi} = M_\varphi \cdot M_\psi$.

Замечание: Равенства: $M_{\varphi+\psi} = M_\varphi+M_\psi$, $M_{\lambda\varphi} = \lambda M_\varphi$. $M_{\varphi\circ\psi} = M_\varphi\cdot M_\psi$ - справедливы, если операторы φ и ψ заданы своими матрицами <u>в одном базисе</u>.

Установим связь между матрицами M_φ и $M`_\varphi$ линейного оператора φ в разных базах.

Теорема 4: $M'_\varphi = T^{-1}\cdot M_\varphi \cdot T$.

Доказательство:

Пусть $\varphi \in Hom(V,V)$, $\left.\begin{array}{l} 1) e_1, e_2, \ldots, e_n \\ 2) e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \end{array}\right|$ - базы V.

M_φ - матрица оператора φ в базе 1)

M'_φ - матрица оператора φ в базе 2).

Связь между базами 1) и 2) выражается равенством

(3) $e'_i = e_iT$ (где T - матрица перехода от базы 1) к базе 2)).

Связь между базисными векторами и их образами имеет вид:

$$\varphi(e_i) = e_i \cdot M_\varphi (4)$$
$$\varphi(e'_i) = e'_i \cdot M'_\varphi (5)$$

Подставим в равенство (5) вместо e'_i, e_i T (см. равенство 3). Получим:

$\varphi(e'_i T) = e_i T M`_\varphi$

$\| \qquad \|$

$\varphi(e_i) T = e_i T M`_\varphi$

$\| \qquad \|$

$e_i M_\varphi \cdot T = e_i T \cdot M`_\varphi \Rightarrow M_\varphi \cdot T = T \cdot M`_\varphi \Rightarrow M`_\varphi = T^{-1} \cdot M_\varphi \cdot T$

Определение: Матрицы A и B из $M_{nn}(F)$ называются подобными над полем F, если существует обратимая матрица $T \in M_{nn}(F)$, такая, что $A = T^{-1}BT$.

Следствие 1 из теоремы 4: Матрицы линейного оператора $\varphi \in Hom(V, V)$ в разных базах подобны.

Следствие 2: Если $AfB \Leftrightarrow (A = T^{-1}BT)$, то отношение f - отношение эквивалентности на множестве $M_{nn}(F)$ (докажите самостоятельно).

Задача 1: Линейный оператор φ в пространстве R^3 имеет в базисе e_1, e_2, e_3 матрицу $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Показать, что система векторов $a_1 = e_1+e_2-e_3$, $a_3 = -e_1-2e_2$, $a_3 = 2e_2+e_3$ образуют базис R^3, и найти матрицу M'_φ в этом базисе.

Решение:

Так как векторы a_i (i = 1, 2, 3) разложены по базису e_1, e_2, e_3, то их координаты в этом базисе известны $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (-1, -2, 0)$, $a_3 = (0, 2, 1)$. Ранг матрицы, составленной из координат этих векторов будет равен 3.

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ (проверьте!)}$$

Следовательно, система a_1, a_2, a_3 - линейно независима и является базой пространства R^3.

Матрица M'_φ в этом базисе может быть найдена из равенства $M'_\varphi = T^{-1}M_\varphi T$, где T - матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1,a_2,a_3.
Так как a_i уже выражены через e_i, то матрица T будет равна матрице:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Остается найти обратную матрицу к T.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(проверьте!)}$$

$$\textit{Тогда},\quad M'_\varphi = T^{-1}\cdot M_\varphi \cdot T =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -13 \\ -11 & 21 & -17 \\ -7 & 13 & -11 \end{pmatrix}$$

Задача 2: Линейный оператор φ в пространстве R^4 задан матрицей $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Найти Ker φ, Im φ и их размерности.

Решение:

По определению ядра линейного оператора: Ker φ={x∈V|φ(x)=θ}. Так как оператор φ задан матрицей M_φ, то равенство φ(x) = θ будет иметь вид: $M_\varphi \cdot X=0$, или

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, Ker φ совпадает с линейным подпространством решений однородной системы линейных уравнений. Найдем его, решая систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&2\\2&3&1&1\\1&2&1&-1\\1&0&-1&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&1&1&-3\\0&-1&-1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_4=0\\x_2+x_3-3x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3-3x_4-2x_4\\x_2=3x_4-x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3-5x_4\\x_2=3x_4-x_3\end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	1	0
5	3	0	1

c_1 = (l, -1, 1, 0); c_2 = (-5, 3, 0, 1) - фундаментальная система решений и одновременно база Ker φ, то есть Ker φ = L(c_1, c_2), dim Ker φ = 2.

По определению области значений (образа оператора φ)

Im φ = L(φ(e_1), φ(e_2), φ(e_3), φ(e_4)).

Координатные столбцы векторов (φ(e_1), φ(e_2), φ(e_3), φ(e_4)) являются столбцами матрицы M_φ, следовательно, Im φ = L(a_1, a_2, a_3, a_4), где a_1 = (1, 2, 1, 1); a_2 = (1, 3, 2, 0); a_3 = (0, 1, 1, -1)**;** a_4 = (2, 1, -1, 5), dim Im φ = rang M_φ = rang φ = 2.

Существует способ параллельного построения баз Ker φ и Im φ, основанный на элементарных преобразованиях строк матрицы.

Пусть оператор φ задан матрицей M_φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V (dim V = n). Составим матрицу $(E|M_\varphi)$ и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к виду: $(E|M_\varphi)\Leftrightarrow(B|C)$, где C – ступенчатая матрица.

Тогда ненулевые строки матрицы C будут образовывать базу Im φ, а все строки матрицы B, имеющие нулевое продолжение в матрице C, образуют базу Ker φ (докажите этот факт самостоятельно).

Пример*: Оператор φ в пространстве R^n задан матрицей: $M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти базу Ker φ и базу Im φ.

Решение:

$$(E|M_\varphi) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \text{база}Ker\varphi\left\{\begin{array}{r} b_1 = \\ b_2 = \end{array}\right. \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} = a_1 \\ = a_2 \end{array}\right\} - \text{база}\,\mathrm{Im}\varphi \\ \\ \\ \end{array}$$

§ 4. Обратимые линейные операторы пространства V.

Пусть дано пространство V над полем F, φ ∈ Hom(V, V).

Определение 1: Оператор φ ∈ Hom(V, V) называется обратимым (невырожденным), если существует ψ ∈ Hom(V,V) такой, что $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \varepsilon$ (где ε- тождественный оператор).

Теорема 1: Любой обратимый оператор пространства V над F в фиксированном базисе имеет единственный обратный оператор.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть g и ψ два обратных оператора к φ. Тогда, по определению (1)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \circ \psi = \varepsilon \\ \varphi \circ g = \varepsilon \end{array}\right| \Rightarrow (\varphi \circ \psi = \varphi \circ g) \Rightarrow (\forall x \in V, (\varphi \circ g)(x) = (\varphi \circ \psi)(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi(g(x) = \varphi(\psi(x))) \Rightarrow (g(x) = \psi(x)) \Rightarrow (g = \psi).$$

Замечание 1: Обратный оператор к φ обозначается φ^{-1}.

Теорема 2: Если $\varphi \in Hom(V, V)$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Оператор φ обратим;
2. φ - биекция $V \to V$;
3. $Ker\ \varphi = \{\theta\}$;
4. дефект $\varphi = 0$;
5. $Im\ \varphi = V$
6. $rang\ \varphi = \dim V$;
7. Матрица M_φ, - обратима.

Доказательство:

$1 \to 2$) Пусть $\varphi \in Hom(V, V)$ обратим, докажем, что $\varphi: V \to V$ - биекция, то есть φ инъективно и сюрьективно.

Действительно, пусть $\forall x, y \in V$, $\varphi(x) = \varphi(y)$, так как φ - обратим, то существует единственный φ^{-1} такой, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) \Rightarrow (\varepsilon(x) = \varepsilon(y)) \Rightarrow (x = y)$, итак, φ - инъекция; $\forall \varphi(x) \in V$, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varepsilon(x) = x$, который $\in V$, итак, φ - сюръективно.

$2 \to 3$) Если φ - биекция $V \to V$, то очевидно, что

$3 \to 4$) $Ker\ \varphi = \theta\}$ и дефект $\varphi = 0$, так как дефект $\varphi = \dim Ker\ \varphi$.

$4 \to 5$) Так как $\dim V = \dim Im\ \varphi + \dim Ker\ \varphi \Rightarrow$
$\dim V = \dim Im\ \varphi = rang\ \varphi$ и $V = Im\ \varphi$.

$6 \to 7$) Пусть $rang\ \varphi = \dim V$, докажем, что матрица M_φ - обратима. Действительно, так как $Im\ \varphi = \{\varphi(x) | x \in V\}$, то для базы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V, $L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = Im\ \varphi$, а так как $\dim Im\ \varphi = \dim V$ следует, что система $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ - линейно независима, тогда и координатные столбцы этих векторов будут линейно независимы, а они, в свою очередь, являются столбцами матрицы линейного оператора φ, M_φ. Следовательно, $rang\ M_\varphi = n$ и она будет обратима.

$7 \to 1$) Пусть матрица M_φ - обратима, докажем, что оператор φ - обратим.

Действительно, так как матрица M_φ - обратима, то существует единственная матрица M^{-1}_φ такая, что $M_\varphi M^{-1}_\varphi = M^{-1}_\varphi M_\varphi = E$. Тогда, в силу изоморфизма линейных пространств $M_{nn}(F)$ и $Hom(V,V)$, будем иметь: $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{1} \circ \varphi = \varepsilon$, а это означает, что оператор φ - обратим.

§ 5. Инвариантные подпространства.

Пусть дано линейное пространство V над полем F, $\dim V = n$, $Z < V$, $\varphi \in Hom(V,V)$.

Определение 1: Подпространство Z называется инвариантным относительно оператора φ, если

$$\forall\, x\in Z,\ \varphi(x)\in Z.$$

Замечание 1: Из определения следует, что образ подпространства содержится в Z, то есть $\varphi(Z) \subseteq Z$.

Пример 1: Нулевое подпространство и само пространство V будут инвариантными относительно любого оператора φ из Hom(V,V), так как $\varphi(\theta) = \theta$ и $\varphi(V) \subset V$.

Пример 2: В пространстве R^2 задан оператор φ: $R^2 \to R^2$, который $\forall(x = (x_1,\ x_2))$ ставит в соответствие $(x_1,\ -x_2)$ (симметрия относительно оси OX). Тогда, одномерные подпространства OX и OУ из R^2 будут инвариантными относительно φ, так как $\varphi(OX) = OX$ и $\varphi(OY) = OY$.

Пример 3: Для любого $\varphi \in Hom(V, V)$, Ker φ и Im φ - инвариантные подпространства. Это следует из определений Ker φ и Im φ.

Выясним, какой вид будет иметь матрица линейного оператора $\varphi \in Hom(V,V)$, если V равно прямой сумме двух инвариантных подпространств.

Итак, пусть

$$V = U \dot{+} Z,\ \varphi \in Hom(V, V),\ \dim V = n,\ \varphi(Z) \subset Z,\ \varphi(U) \subset U.$$

Так как сумма $V = U \dot{+} Z$ - прямая, то

$$\dim V = \dim U + \dim Z.$$

Пусть $\dim U = k$, тогда $\dim Z = (n-k)$. Если система векторов $a_1,a_2,\dots,a_k$ будет базой U, а система $a_{k+1},\dots,a_n$ - базой Z, то система векторов $a_1,a_2,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_n$ - будет базой V.

Найдем матрицу M_φ. Для этого нам нужно найти координаты векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2),\dots, \varphi(e_n)$ в базе $a_1, a_2,\dots, a_k,\dots,a_n$. Так как $\varphi(e_1), \varphi(e_2),\dots, \varphi(e_k)\subset U$, а $\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}),\dots, \varphi(e_n)\subset Z$ то получим:

$$\varphi(a_1)=\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\ldots+\alpha_{1k}a_k+0+0+\ldots+0$$
$$\varphi(a_2)=\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\ldots+\alpha_{2k}a_k+0+0+\ldots+0$$
$$-------------------------$$
$$\varphi(a_k)=\alpha_{k1}a_1+\alpha_{k2}a_2+\ldots+\alpha_{kk}a_k+0+0+\ldots+0$$
$$\varphi(a_{k+1})=0+0+\ldots+0+\alpha_{k+1,k+1}a_{k+1}+\ldots+\alpha_{k+1,n}a_n$$
$$\varphi(a_{k+2})=0+0+\ldots+0+\alpha_{k+2,k+1}a_{k+1}+\ldots+\alpha_{k+2,n}a_n$$
$$-------------------------$$
$$\varphi(a_n)=0+0+\ldots+0+\alpha_{n,k+1}a_{k+1}+\ldots+\alpha_{nn}a_n$$

Или $M_\varphi=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, то есть матрица M_φ будет иметь четыре клетки, две из которых нулевые.

Можно доказать и обратное утверждение. Если в некотором базисе пространстве V (dim V = n) матрица $M_\varphi=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, то

$V=U\dot{+}Z$, где U, Z - инвариантные подпространства относительно оператора φ. (докажите самостоятельно).

Особый интерес представляет следующая задача: описать линейные операторы φ∈Hom(V, V), матрицы которых в некотором базисе имеют диагональный вид: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \lambda_2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \lambda_n \end{pmatrix}$

Решение этой задачи будет дано в следующем пункте.

§ 6. Одномерные инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Пусть дано линейное пространство V над F, dim V = n. Покажем, что его одномерные инвариантные подпространства играют особую роль при исследовании структуры любого линейного оператора φ ∈ Hom(V, V).

Определение 1: Скаляр $\lambda \in F$ называется собственным значением оператора $\varphi \in Hom(V, V)$, если в V существует $(x \neq \theta)$ такой, что $\varphi(x) = \lambda x$, вектор x - называется собственным вектором оператора φ, принадлежащим собственному значению λ.

Замечание 1: $\forall x \neq \theta\ \exists!\ \lambda \in F$: $\varphi(x) = \lambda x$, так как из условий:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = \lambda_1 x \\ \varphi(x) = \lambda_2 x\end{array}\right| \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2).$$

Покажем, что любой собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство и наоборот, любой вектор одномерного инвариантного подпространства будет собственным.

Действительно, если $x \neq \theta$, $x \in V$ и $\varphi(x) = \lambda x$, то

а) $L(x) = \{kx\}$, тогда $\varphi(kx) = k\varphi(x) = k\lambda x = k_1 x \Rightarrow k_1 x \in L(x)$, то есть $L(x)$ - одномерное инвариантное подпространство.

б) Пусть $U \subset V$, $\varphi(U) \subset U$ и $\dim U = 1$, тогда V $(x \neq \theta) \in U$ и $\varphi(x) \subset U \Rightarrow \varphi(x) = \lambda x \Rightarrow x$ - собственный вектор оператора φ.

Итак, задача нахождения одномерных инвариантных подпространств в пространстве V над F и задача нахождения собственных векторов и собственных значений оператора φ - эквивалентны.

Пример: Пусть в пространстве R^2 над R задан оператор гомотетии $\varphi = \lambda x$, тогда, $\forall (x \neq \theta) \in R^2$, $\varphi(x) = (\lambda\varepsilon)(x) = \lambda\varepsilon(x) = \lambda x$. Следовательно, любой вектор $x \neq \theta$ в этом пространстве будет собственным и принадлежит собственному значению λ.

Одномерные инвариантные подпространства, порожденные собственными векторами, будут представлять собой множество векторов, расположенных на прямых, проходящих через начало координат.

Не всякий линейный оператор пространства V над F имеет хотя бы один собственный вектор (одномерное инвариантное подпространство), например, в пространстве R^2 над R оператор φ. поворачивающий каждый вектор (x) на угол 90° вокруг начала координат против часовой стрелки, не будет иметь ни одного собственного вектора, так как $\forall x \in R^2$ $(x \neq \theta)$ и $\varphi(x)$ не будут коллинеарными.

Для того, чтобы исследовать вопрос о существовании собственных векторов, выведем уравнение, которому удовлетворяют все собственные значения оператора φ, если они существуют.

Пусть линейный оператор $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ имеет собственные значения, для которых $\exists$ ($x \neq 0) \in V$: $\varphi(x) = \lambda x$. (1)

Равенство (1) можно записать в виде (2) $\varphi(x) = \lambda\varepsilon(x) \Rightarrow \varphi(x)\text{-}\varepsilon(x) = \theta \Rightarrow (\varphi\text{-}\lambda\varepsilon)(x)+\theta \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi\text{-}\lambda\varepsilon)\backslash\{\theta\}$.

В силу изоморфизма линейных пространств $M_{nn}(F)$ и $\mathrm{Hom}(V, V)$, в полученном равенстве $(\varphi\text{-}\lambda\varepsilon)(x) = \theta$ заменим операторы их матрицами в некотором фиксированном базисе $e_1, e_2,\dots,e_n$, $\varepsilon \leftrightarrow E$, $\varphi \leftrightarrow M_\varphi$, тогда получим, что $(M_\varphi \text{-}\lambda E)X = 0$ (3).

Если записать матрицы M_φ, E и X и выполнить указанные действия, то уравнение 3 будет равносильно системе:

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ --------------------- \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Это однородная система и она должна иметь ненулевое решение, т.к. собственный вектор $x = (x_1, x_2,\dots,x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе 4), по определению отличен от θ. Следовательно, определитель этой системы должен быть равен 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} (\alpha_n - \lambda) & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & (\alpha_{22} - \lambda) & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & (\alpha_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Таким образом, любое собственное значение (λ) линейного оператора φ должно удовлетворять уравнению (5). Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: если $\lambda \in F$ удовлетворяет уравнению (5), то оно будет собственным значением оператора, т.к. в этом случае система (4) будет иметь ненулевые решения $x = (x_1, x_2,\dots,x_n)$, которые и будут собственными векторами оператора φ.

Вычислив определитель в уравнении (5), мы получим алгебраическое уравнение n - ой степени относительно λ.

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (6)$$

Многочлен $f(\lambda)$ называется характеристическим многочленом линейного оператора $\varphi \in Hom(V, V)$.

Покажем, что он не зависит от выбора базиса в пространстве V над F.

Действительно, мы знаем, что матрицы оператора φ в разных базах подобны, т.е. $M`_\varphi = T^{-1}M_\varphi T$.

Тогда $| M`_\varphi - \lambda E| = |T^{-1}M_\varphi T - \lambda E| = |T^{-1}M_\varphi T - T^{-1}\lambda ET| =$ $= | T^{-1}(M_\varphi - \lambda E)T | = | T^{-1}|\cdot| M_\varphi - \lambda E|\cdot|T| = |M_\varphi - \lambda E|$.

Итак, $f(\lambda) = |M_\varphi - \lambda E|$ не зависит от выбора базиса, поэтому можно говорить о характеристическом многочлене и уравнении, не указывая, в каком базисе задана матрица оператора M_φ.

Степень многочлена $f(\lambda)$ определяется порядком матрицы M_φ, а порядок матрицы определяется размерностью пространства V, следовательно, в n -мерном пространстве оператор φ не может иметь более (n) собственных значений.

Итак, мы показали, что скаляр $\lambda \in F$ будет собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Однако, не любое поле F алгебраически замкнуто, т.е., не $\forall$ $f(\lambda)$ над полем F имеет хотя бы один корень.

а) Мы уже приводили пример линейного оператора φ в пространстве R^2 (поворот на угол 90°), который не имеет собственных векторов и собственных значений. Его характеристический многочлен

$$\lambda(x) = \begin{vmatrix} \cos\varphi_0 - \lambda & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $f(x) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_0 + 1 = 0$. Если $\varphi_0 \neq n\pi$, $n = 0, \pm1, \ldots$, то это уравнение над полем R корней не имеет.

б) Если F = C, то в силу основной теоремы алгебры, многочлен $f(\lambda)$ всегда будет иметь комплексный корень, таким образом в пространстве C^n над C любой линейный оператор φ имеет (хотя бы одно) собственные значения, а следовательно, и собственные векторы.

в) Нулевой вектор не является собственным по определению. Однако, если его добавить к множеству V^{λ}, то V^{λ} будет подпространством V, т. е. будет справедлива следующая теорема.

Теорема 1: Все собственные векторы, принадлежащие одному собственному значению, образуют подпространство в пространстве V.

Доказательство:

Обозначим через $V^{(\lambda)} = \{x \in V | \varphi(x) = \lambda x\}$. Покажем, что $V^{(\lambda)}$ замкнуто относительно операции сложения векторов и умножения на скаляр (то есть проверим достаточные условия подпространства). Пусть $\forall$ x, y $\in V^{(\lambda)}$, докажем, что $\forall$ $\alpha, \beta \in F$, $(\alpha x+\beta y) \in V^{(\lambda)}$. Действительно, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) =$ $= \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$, итак, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) \Rightarrow$ $(\alpha x + \beta y) \in V^{(\lambda)}$.

Замечание 1: Подпространство $V^{(\lambda)}$ представляет собой множество ненулевых решений однородной системы (4), его базисом будет фундаментальная система решений системы (4).

Определение 2: Подпространство $V^{(\lambda)}$ называется собственным подпространством оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Замечание 2: Если многочлен f(λ) имеет кратный корень λ_0, то возникает вопрос - как связана размерность $V^{(\lambda)}$ с кратностью корня? На первый взгляд, может показаться, что они всегда совпадают. Однако в общем случае это не так. Например, если оператор φ в пространстве R^2 задан матрицей $M_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ k & \lambda_0 \end{pmatrix}$, где $k \neq 0$, $k \in R$, тогда характеристический многочлен $f(x) = (\lambda_0-\lambda)^2$. Он имеет двукратный корень $\lambda = \lambda_0$. Система (4) в данном случае принимает вид: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ kx_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$ и имеет единственное (с точностью до числового множителя) решение $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Таким образом, собственное подпространство оператора φ, $V^{(\lambda)}$ будет иметь размерность равную 1, а кратность корня была равна 2. Следовательно, в общем случае dim $V^{(\lambda)} \le$ кратности корня λ.

в) Если многочлен $f(\lambda)$ в поле F имеет (n) различных корней (собственных значений линейного оператора φ, то в пространстве V над F можно найти (n) различных собственных векторов, решая систему (4).

Теорема 4: Собственные векторы $(x_1, x_2,...,x_n)$ линейного оператора φ, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ линейно независимы.

Доказательство:

Проведем методом математической индукции по числу векторов (n).

1. Для $n = 1$, x_1 - линейно независим, так как $x_1 \neq \theta$.
2. Предположим, что теорема верна для (n-1) вектора, то есть система $x_1, x_2,...,x_{n-1}$ - линейно независима.
3. Докажем, что теорема верна для n - векторов. Предположим противное, пусть система $x_1, x_2,...,x_n$ - линейно зависима, то есть в равенстве $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_n x_n = \theta$, например, $\alpha_1 \neq 0$. Применяя к этому равенству оператор φ, получим:

$\alpha_1\varphi(x_1)+ \alpha_2\varphi(x_2)+\dots+ \alpha_n\varphi(x_n) = =\alpha_1\lambda_1 x_1+\alpha_2\lambda_2 x_2+\dots+\alpha_n\lambda_n x_n =\theta$. Умножим первое равенство на λ_n и вычтем его из последнего равенства: $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_n)x_2+\dots+\alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n = \theta$ (*)

В равенстве (*) по индуктивному предположению все α_i должны быть равны нулю. Однако, коэффициент $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n) \neq 0$, так как $\alpha_i \neq 0$ и разность $(\lambda_1-\lambda_n) \neq 0$ потому, что $\lambda_1 \neq \lambda_n$. Получили противоречие.

Следовательно, наше предположение было неверно и векторы $x_1, x_2,...,x_n$ линейно независимы.

Так как dim V = n, то эту систему линейно независимых векторов можно выбрать в качестве базиса пространства V. Выясним, какой вид будет иметь матрица линейного оператора φ в этом базисе. Так как

$$\begin{array}{l} \varphi(x_1) = \lambda_1 x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n \\ \varphi(x_2) = 0x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + 0x_n \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ \varphi(x_n) = 0x_1 + 0x_2 + \dots + \lambda_n x_n \end{array}, \text{ то } \quad M_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \lambda_2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Итак, 1) матрица линейного оператора φ в n - мерном пространстве V над F, построенная в базисе из его собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеет диагональный вид, а ее диагональные элементы - это собственные значения оператора φ.

2) пространство $V = V^{(\lambda 1)} \overset{\circ}{+} V^{(\lambda 2)} \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} V^{(\lambda n)}$

$(\dim V = \dim V^{(\lambda)} + \dim V^{(\lambda 1)} + \ldots + \dim V^{(\lambda n)})$

Задача 1: В пространстве R^3 матрица линейного оператора φ имеет вид:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Выяснить, можно ли эту матрицу привести к диагональному виду путем перехода к новому базису?

Решение:

а) Найдем собственные значения линейного оператора φ. Для этого решим характеристическое уравнение: $|M_\varphi - \lambda E| = 0$, которое в данном случае имеет вид:

$$|M_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & 2 \\ 1 & (1-\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{vmatrix},$$

то есть оператор φ имеет три различных собственных значения.

б) Найдем собственные векторы, принадлежащие каждому λ_i. Для этого решим матричные уравнения $(M_\varphi + E)x = 0$, $(M_\varphi - E) = 0$ и $(M_\varphi - 2E)x = 0$, которые определяют соответствующие однородные системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Найдем их общее решение, фундаментальную систему решений и собственные подпространства $R_i^{(\lambda i)}$.

а) $\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$; Ф.С.Р.: $a_1 = (-1, 1, 0)$; $R_1^{(-1)} = L(a_1)$

б) $\begin{cases} x_2 - \textit{любое} \\ x_1 = x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$; Ф.С.Р.: $a_2 = (0, 1, 0)$; $R_2^{(1)} = L(a_2)$.

в) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}x_3 \end{cases}$; Ф.С.Р.: $a_3 = (2/3, -1/3, 1)$; $R_3^{(2)} = L(a_3)$.

Так как векторы a_1, a_2, a_3 - линейно независимы (они принадлежат различным собственным значениям), то они образуют базис в пространстве R^3. В этом базисе матрица оператора φ будет иметь вид:

$$M'_{\varphi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

так как

$$\varphi(a_1) = -1\cdot a_1,\ \varphi(a_2) = 1\cdot a_2,\ \varphi(a_3) = 2\cdot a_3.$$

Кроме этого, мы можем записать, что $R^3 = R_1^{(-1)} \dot{+} R_2^{(1)} \dot{+} R_3^{(2)}$.

Найдем необходимые и достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора φ пространства V над C к диагональной форме.

Теорема 2: Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ все попарно различные собственные значения линейного оператора φ пространства V над C (dim V = n), $U_1^{(\lambda 1)}, U_2^{(\lambda 2)}, \ldots, U_p^{(\lambda p)}$ - соответствующие им собственные подпространства, то $\dim U_1^{(\lambda 1)} + \dim U_2^{(\lambda 2)} + \ldots + \dim U_p^{(\lambda p)} \le n$.

Доказательство:

Над полем C характеристический многочлен $f(\lambda) = |M_\varphi - \lambda E|$ имеет ровно (n) корней, с учетом их кратности. Любое собственное подпространство $U_i^{(\lambda i)}$, где i = 1, 2,..., p, будет иметь размерность не превосходящую краткость корня λ_i (собственного значения оператора, см. п.).

Поэтому $\dim U_1^{(\lambda 1)} + \dim U_2^{(\lambda 2)} + \ldots + \dim U_p^{(\lambda p)} \le n$.

Теорема 3: Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ - собственные значения линейного оператора φ, а $U_1^{(\lambda 1)}, U_2^{(\lambda 2)}, \ldots, U_p^{(\lambda p)}$ - соответствующие им собственные подпространства, тогда матрица M_φ приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда $\dim U_1^{(\lambda 1)} + \dim U_2^{(\lambda 2)} + \ldots + \dim U_p^{(\lambda p)} = \dim V$.

Доказательство:

Необходимость: Пусть $M_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \lambda_2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \lambda_n \end{pmatrix}$. Тогда оператор φ имеет (n) линейно независимых собственных векторов, каждый из которых принадлежит только одному собственному значению из λ_i $(1 \le i \le p)$. По теореме 2 будем иметь, что $\dim U_1^{(\lambda 1)} + \dim U_2^{(\lambda 2)} + ... + \dim U_p^{(\lambda p)} = n$ (*).

Достаточность: пусть имеет место равенство (*). Тогда, выбрав базис в каждом из подпространств $U_1^{(\lambda 1)}, U_2^{(\lambda 2)}, \ldots, U_p^{(\lambda p)}$ и объединив эти базисы в одну систему, мы получим (n) линейно независимых собственных векторов. В базисе из этих векторов матрица M_φ будет иметь диагональный вид.

Задача 2: Выяснить, можно ли матрицы операторов φ и ψ пространства R^3

$M_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & -4 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $M_\psi = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ привести к диагональному виду?

Решение:

а) найдем собственные значения оператора φ из уравнения:

$$|M_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} (5-\lambda) & 0 & -2 \\ 8 & (1-\lambda) & -4 \\ 12 & 0 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(1+\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1).$$

Первый корень имеет кратность 2, поэтому сразу ответить на вопрос задачи нельзя, надо найти сумму размерностей собственных подпространств $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(-1)}$. Если $\dim U_1^{(1)} + \dim U_2^{(-1)} = 3$, то матрица M_φ приводится к диагональному виду, если $\dim U_1^{(1)} + \dim U_2^{(-1)} < 3$, то нет (см. теорему 3).

Найдем $U_1^{(1)}$, из системы: $\begin{cases} 4x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 = 0 \\ 12x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Ф.С.Р.:

$a_1 = (1, 0, 2)$; $a_2 = (0, 1, 0)$, $U_1^{(1)} = L(a_1, a_2) \Rightarrow \dim U_1^{(1)} = 2$.

$U_2^{(-1)}$ найдем из системы: $\begin{cases} 6x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 12x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Ф.С.Р.:

$a_3 = (1, 2, 3) \Rightarrow U_2^{(-1)} = L(a_3) \Rightarrow \dim U_2^{(-1)} = 1$.

Следовательно, $\dim U_1^{(1)} + \dim U_2^{(-1)} = 2+1 = 3$. Поэтому матрица M_φ приводится к диагональной форме и в базисе a_1, a_2, a_3 имеет вид:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

б) В этом случае характеристический многочлен

$$f(x) = \begin{vmatrix} (6-\lambda) & -5 & -3 \\ 3 & (-2-\lambda) & -2 \\ 2 & -2 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

имеет кратный корень $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

Подпространство $U_{(1)}$ задается системой уравнений:

$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, для которой Ф.С.Р. состоит из одного вектора a_1 (найдите его!), откуда, $U_1^{(1)} = L(a_1) \Rightarrow \dim U_1^{(1)} = 1$.

Собственное подпространство $U_2^{(2)}$ задается системой

$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$, ее Ф.С.Р. состоит тоже из одного вектора a_2 (найдите его!). Тогда, $U_2^{(2)} = L(a_2) \Rightarrow \dim U_2^{(2)} = 1$.

Итак, $\dim U_1^{(1)} + \dim U_2^{(2)} = 2 < 3$, следовательно, матрица M_ψ к диагональному виду не приводится.

Выше мы рассмотрели необходимые и достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора φ пространства V над C к диагональной форме.

Если матрица оператора φ в пространстве V над F ($\dim V = n$) в некотором базисе $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет иметь диагональную форму: $M_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_n & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & . & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$, то оператор φ называют оператором простой структуры. С геометрической точки зрения, действие этого оператора сводится к “растяжению” координат вектора в данном базисе. Однако, такими операторами не исчерпывается все множество линейных операторов пространства V над полем F , поэтому поиск базиса пространства V, в котором матрица оператора имела бы наиболее простой вид, является одной из важных задач линейной алгебры. Такая база была найдена и получила название жордановой базы (К. Жордан 1838-1922). В этой базе любая матрица M_φ линейного оператора φ конечномерного векторного пространства V над полем F будет иметь жорданову форму:

$$\begin{pmatrix}
. & \lambda_1 & 1 & 0 & . & . & 0 & . & & & & \\
. & 0 & \lambda_1 & 1 & . & . & 0 & . & & & & \\
. & . & . & . & . & . & 0 & . & & 0 & & \\
. & 0 & 0 & . & \lambda_1 & . & 0 & . & & & & \\
. & . & . & . & . & .. & . & . & & & & \\
 & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
 & & & & & & & .. & . & . & . & \\
 & & 0 & & & & & & \lambda_p & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & . & 0 & \lambda_p & . & 0 \\
 & & & & & & & . & . & . & . & \\
 & & & & & & & . & 0 & 0 & . & \lambda_p
\end{pmatrix}$$

, при условии, что все характеристические числа оператора содержатся поле F. В настоящее время известны различные методы построения жордановой базы. Одни опираются на теорию λ- матриц, другие используют метод триангуляции или геометрические методы. Все эти методы весьма громоздки. Наиболее простой способ построения жордановой базы для линейного оператора, собственные значения которого принадлежат полю F, разработан Чуркиным В. А. (НГУ) на основе параллельного вычисления ядер и образов оператора с помощью элементарных преобразований строк. (см. пример*, рассмотренный выше)

Имеет место следующая

Теорема:

Пусть φ - линейный оператор в векторном пространстве V над полем F, имеющий в некоторой базе матрицу M_φ, и пусть все корни его характеристического многочлена $f(\lambda)=\det(M_\varphi - \lambda E)$ содержатся в поле F. Тогда:

1) Пространство V является прямой суммой корневых подпространств $V_\alpha = Ker(\varphi - \alpha\varepsilon)^k$, где $\alpha -$корень f(λ), ε - тождественный оператор, $k = k_\alpha$ - минимальное число с условием, что V(φ - $\alpha\varepsilon$)^к= V(φ - $\alpha\varepsilon$)$^{к+1}$;
2) Многочлен

$$\mu(\lambda) = \prod_\alpha (\lambda - \alpha)^{k_\alpha}$$

делит f(λ), аннулирует оператор φ и является минимальным по степени ненулевым многочленом со свойством, μ(φ)=0. Суть метода раскроем в процессе решения задачи.

Задача: Найти жорданову форму матрицы оператора φ, заданного в некотором базисе пространства V матрицей:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

<u>*1. Шаг*</u>. Находим все корни характеристического многочлена $f(\lambda) = \det(M_\varphi - \lambda E)$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 & 2 \\ 6 & (5-\lambda) & 1 & -4 \\ 2 & -1 & (-1-\lambda) & 4 \\ 2 & 1 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^3 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \quad \lambda_4 = 0$$

2. Шаг. Выбираем одно из собственных значений, например, λ_1=2 и находим матрицу $(M_\varphi - 2E) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = N$

3. Шаг. Составляем матрицу $(E|M_\varphi - 2E)$ и с помощью элементарных преобразований строк приводим ее к матрице $(B_1|C_1)$, где C_1 должна быть ступенчатой матрицей.

$$(E|M_\varphi - 2E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & \underline{2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (B_1|C_1)$$

4. Шаг. Вычисляем матрицу $C_1 \bullet N$=

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Шаг. Составляем матрицу $(B_1|C_1|C_1 \cdot N)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее к матрице $(B_2|C_2)$, где C_2- ступенчатая матрица

$$(B_1|C_1|C_1 \cdot N) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 2 & \underline{-4} \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ c_1 = \\ c_2 = \\ c_3 = \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} = c_4 \\ \\ = (B_2|C_2) \\ \\ \end{array}$$

Мы получили базы двух корневых подпространств U=L(c_1,c_2,c_3) и Z=L(c_4).

6. Шаг. Преобразуем базу корневого подпространства U=L(c_1,c_2,c_3) в жорданову базу. Вторая строка матрицы содержит два ненулевых вектора (1,1,0,0) и (4,2,0,-2). Т. к. dimU=3, то нужно дополнить их еще одним ненулевым вектором из третьей строки – (-4,-1,1,0). Векторы: b_1=(1,1,0,0), b_2=(4,2,0,-2), b_3=(-4,1,1,0) составляют жорданову базу для корневого пространства U=L(c_1,c_2,c_3).

7. Шаг. Корневое пространство Z=L(c_4) одномерно, вектор c_4=(4,2,2,-4) образует его жорданову базу.

8. Шаг. Т. к. $V=U\dot{+}Z$, то система векторов b_1, b_2, b_3, c_4 будет базой пространства V. Найдем в этом базисе матрицу линейного оператора φ. Для этого вычислим образы базисных векторов

$\varphi(b_1) = b_1 \bullet (M_\varphi - 2E) = (4,2,0,-2)$

$\varphi(b_2) = b_2 \bullet (M_\varphi - 2E) = (0,0,0,0)$

$\varphi(b_3) = b_3 \bullet (M_\varphi - 2E) = (0,0,0,0)$

$\varphi(c_4) = c_4 \bullet (M_\varphi - 0E) = (0,0,0,0)$

и найдем их координаты в базисе b_1, b_2, b_3, c_4

$\varphi(b_1) = 2\bullet b_1+1\bullet b_2 +0\bullet b_3+0\bullet c_4$

$\varphi(b_2) = 0\bullet b_1+2\bullet b_2 +0\bullet b_3+0\bullet c_4$

$\varphi(b_3) = 0\bullet b_1+0\bullet b_2 +2\bullet b_3+0\bullet c_4$

$\varphi(c_4) = 0\bullet b_1+0\bullet b_2 +0\bullet b_3+0\bullet c_4$

$M'_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Матрица M'_φ имеет жорданову форму.

6. ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ

Практическое занятие №1
Понятие векторного пространства над полем. Примеры линейных пространств.

Выяснить, образует ли векторное (линейное) пространство над полем *R* указанное множество относительно заданных операций:

1. n-мерные арифметические векторы, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x_1+x_2+...+x_n=0$;
2. Векторы плоскости с началом в точке О, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке О;
3. Векторы плоскости с началом в точке О, концы которых лежат на данной прямой;
4. n-мерные арифметические векторы, являющиеся решениями данной системы линейных уравнений;
5. n-мерные арифметические векторы, являющиеся решениями однородной системы линейных уравнений;
6. Векторы множества R^n, координаты которых целые числа;
7. Многочлены с действительными коэффициентами, имеющие данный корень $\alpha\in R$;
8. Множество всех многочленов n-ой степени с действительными коэффициентами;
9. Многочлены четной степени с действительными коэффициентами;
10. Многочлены нечетной степени с действительными коэффициентами;
11. Множество всех многочленов степени $\leq n$ с действительными коэффициентами;
12. Множество матриц вида: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ с действительными элементами.
13. Множество обратимых матриц второго порядка с элементами из поля *R;*

14. Множество вырожденных матриц третьего порядка с элементами из поля *R;*

15. Квадратные матрицы, суммы диагональных элементов которых равны нулю;

16. Квадратные матрицы n-го порядка, перестановочные со всеми матрицами n-го порядка;

17. Множество функций $f{:}R\to R$, принимающих значение α в данной точке x_0;

18. Множество функций $f{:}R\to R$, имеющих конечное число точек разрыва;

19. Множество функций, принимающих значение 0 во всех точках некоторого множества $A\subset R$..

Практическое занятие №2
Подпространства векторного пространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка системы векторов.

1. Дано линейное пространство: $<M_{nn}(R),+,\{\omega_\lambda \ |\lambda\in R\}>$. Выяснить, будут ли указанные подмножества, его линейными подпространствами:

а) $U=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in R\right\}$; б) $L=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| 1\in R\right\}$;

в) $S=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle| a\in R\right\}$; г) $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a & 3b & 3c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in R\right\}$.

2. Дано линейное пространство $<R^n,+,\{\omega_\lambda \ |\lambda\in R\}>$. Выяснить, будет ли $U<R^n$, $L<R^n$, $S<R^n$, $K<R^n$, если:

а) $U=\{x=(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n \ |\alpha_i\in N\}$

б) $L=\{x=(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n \ |\alpha_i\in Z\}$

в) $S=\{x=(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n \ |\alpha_i\in Q\}$

г) $K=\{x=(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n \ |\alpha_i\in R\}$.

3. Найти любое подпространство пространства решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

4. В пространстве R^5 построить несколько подпространств.

Практическое занятие №3
Сумма линейных подпространств. Примеры.

1. Доказать теорему 2 и 4 (гл.1, п.3).
2. В пространстве R^3 указать все прямые сумму подпространств.
3. Пусть $U_1, U_2, ..., U_k$<V. Доказать, что их сумма будет прямой тогда и только тогда, когда любой ее вектор однозначно представляется в виде: $y_1+y_2+...+y_k$, $(y_i \in U_i,\ i=1,2,...,k)$.

Практическое занятие №4
Пересечение линейных подпространств.

1. Всегда ли пересечение двух подпространств является подпространством?
2. Всегда ли объединение двух подпространств является подпространством?
3. Какую размерность в пространстве R^5 может иметь пересечение двух трехмерных подпространств?
4. Построить всевозможные пересечения трех двумерных подпространств трехмерного евклидова точечно-векторного пространства. Описать их геометрический смысл.

Практическое занятие №5
Линейные многообразия, их свойства.

1. Будет ли $M=a+L$ линейным подпространством пространства V?

2. Доказать, что если $L,U<V$, то многообразия $(a+L) \cap (b+U) \neq \varnothing \Leftrightarrow (a-b) \in (L+U)$.

3. Доказать, что если $(a+L)\cap(b+U)\neq\varnothing$) то это пересечение будет многообразием с направлением $L\cap U$.

4. Доказать, что если $V=U\overset{\circ}{+}L$, то $(a+L)\cap(b+U)=\{\theta\}$.

5. Найти вектор сдвига и направляющее подпространство для линейного многообразия решений системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+5x_2+3x_3-x_4=2 \\ x_1+x_2-6x_3+4x_4=1 \\ x_1+3x_2+4x_3-2x_4=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2 \\ x_1-2x_2+2x_3+x_4=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-2x_3=2 \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1+x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_2+x_3-3x_4=-1 \end{cases}$.

Практическое занятие №6

Линейная зависимость и независимость системы векторов арифметического n–мерного векторного пространства. Базис и ранг системы векторов. Базис пространства.

1. Доказать, что система векторов S, содержащая нулевой вектор θ, всегда линейно зависима.

2. Доказать, что система векторов S, содержащая два одинаковых вектора, линейно зависима.

3. Доказать, что любая подсистема линейно независимой конечной системы векторов - линейно независима.

4. Доказать, что если система S линейно зависима, то $S\cup\{b_1,b_2,...,b_s\}$ - линейно зависима, где $b_1,b_2,...,b_s$ - любая система векторов.

5. Доказать, что если система S - линейно независима, а система $S\cup\{b\}$ - линейно зависима, то b - есть линейная комбинация системы векторов S.

6. Доказать, что ранг системы векторов не изменится, если к этой системе добавить (удалить) вектор, являющийся линейной комбинацией векторов данной системы.

7. Доказать, что при элементарных преобразованиях строк матрицы, ее строчный ранг не изменится.

8. Доказать, что строчный ранг любой матрицы равен ее столбцовому рангу.

9. Найти базис и ранг системы векторов:

а) a_1=(l,-3,4,2);
a_2=(0,-1,3,4);
a_3=(2,-6,8,4);
a_4=(0,-3,9,12).

б) b_1=(1,-1,3,-1);
b_2=(3,-4,0,1);
b_3=(0,0,0,3).

Практическое занятие №7
Свойства линейной зависимости системы векторов арифметического n–мерного векторного пространства.

1. Доказать, что система векторов $a_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},...,\alpha_{1n})$, $a_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},...,\alpha_{2n}),...,a_n=(\alpha_{n1},\alpha_{n2},...,\alpha_{nn})$ образует базис пространства R^n тогда и только тогда, когда определитель $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & ... & \alpha_{1n}\\ - & - & -\\ \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nn}\end{vmatrix} \neq 0.$

2. Найти $2a_1$-$3a_2$+a_3-$4a_4$, если a_1=(-1,3,-2); a_2=(-4,7,1); a_3=(5,-6,0); a_4=(0,2,-3).

3. Решить уравнение: $3(a-2x)-(b-x)-2(c-x)=\theta$, где a=(1,-2,3,4); b=(0,1,0-2,1); c=(1,2,0,-3).

4. Линейно выразить вектор b=(1,3,-5) через векторы a_1=(l,-l,2); a_2=(3,1,-1); a_3=(2,2,-3).

5. При каких значениях (λ) вектор $b=(1,3,-5,\lambda)$ является линейной комбинацией векторов a_1=(-1,-1,0,1); a_2=(3,-1,0,2); a_3=(0,0,1,-2)?

6. Исследовать линейную зависимость системы векторов:

а) a_1=(1,-2,1,-1);
a_2=(2,-1,1,3);
a_3=(1,1,0,4):

б) a_1=(-2,1,3,4);
a_2=(0,2,-1,1);
a_3=(1,3,-1,0).

a_4=(1.0,3,-1);

7. Исследовать линейную зависимость векторов a_1=(1,λ,0,2); a_2=(-2,1,1,0); a_3=(0,1,2,3); a_4=(-1,3,1,1) в зависимости от параметра λ.

8. Найти размерность и базис пространства решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$

9. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -11 \\ 1 & 7 & 4 & -25 \\ -2 & 4 & 2 & -13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$.

Практическое занятие №8
Базис и размерность суммы и пересечения векторных подпространств.

1. Дополнить систему: a_1=(1,3,4,0,1), a_2=(0,1,-1,3,2) до базы пространства R^5 над R.

2. Пусть $L_1 < V$ и $L_2 < V$. Доказать, что

а) если $dim(L_1+L_2)=1+dim(L_1 \cap L_2)$, то сумма L_1+L_2 равна одному из этих подпространств, а пересечение $L_1 \cap L_2$ - другому;

б) если $dim\ L_1+dim\ L_2>dim\ V$, то $L_1 \cap L_2 \neq \{\varnothing\}$.

3. Найти размерность и базис пространства C над R.

4. Найти размерность и базис пространства C над C.

5. Дополнить вектор z=2+3i до базы C над R.

6. Найти размерность и базис векторного пространства матриц второго порядка с элементами из поля C над

а) полем C; б) над полем R.

7. Какую размерность в пространстве R^7 может иметь пересечение двух подпространств размерности четыре и шесть?

8. Найти размерность и базис линейной оболочки следующей системы векторов:

а) $a_1=(1,1,1,1,0)$
$a_2=(1,1,-1,-1,-1)$
$a_3=(2,2,0,0,-1)$
$a_4=(1,1,5,5,2)$
$a_5=(1,-1,-1,-1,0)$

б) $b_1=(1,0,0,-1)$
$b_2=(2,1,1,0)$
$b_3=(1,1,1,1)$
$b_4=(1,2,3,4)$
$b_5=(0,1,2,3)$

9. Найти размерность суммы и пересечения линейных подпространств пространства R^n, порожденных системой векторов:

а) $U(a_1a_2a_3)$ $Z(b_1b_2b_3)$
$a_1=(1,1,1,1)$ $b_1=(1,2,0,2)$
$a_2=(1,-1,1,-1)$ $b_2=(1,2,1,2)$
$a_3=(1,3,1,3)$ $b_3=(3,1,3,1)$

б) $U(a_1a_2a_3)$ $Z(b_1b_2b_3)$
$a_1=(2,-1,0,2)$ $b_1=(3,-1,-1,0)$
$a_2=(3,-2,1,0)$ $b_2=(0,-1,2,3)$
$a_3=(1,-1,1,-1)$ $b_3=(5,-2,-1,0)$

в) $U(a_1a_2a_3)$ $Z(b_1b_2)$
$a_1=(1,1,0,0,-1)$ $b_1=(1,0,1,0,1)$
$a_2=(0,1,1,0,1)$ $b_2=(0,2,1,1,0)$
$a_3=(0,0,1,1,1)$

г) $U(a_1a_2)$ $Z(b_1b_2b_3)$
$a_1=(2,5,-6,5)$ $b_1=(1,2,-1,-2)$
$a_2=(-1,2,-7,-3)$ $b_2=(3,1,1,1)$
$b_3=(-1,0,1,-1)$

10. Найти базис и размерность пространства решений для системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2+2x_4=0 \end{cases}$.

11. Найти размерность и базис линейного пространства многочленов степени $\leq n$ от одной переменной над полем R.

12. Найти все базисы и размерность линейного пространства матриц вида: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ с элементами из поля Z_2.

Практическое занятие №9
Изоморфизм линейных пространств.

1. Пусть f- изоморфизм пространства U на V над полем F. Докажите, что $\varphi(\theta)=\theta'$.

2. Докажите, что изоморфные линейные пространства имеют одинаковую размерность.

3. Укажите любой изоморфизм пространства V^3 на R^3.

4. Докажите, что группа $\langle Z,+\rangle$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства.

5. Докажите, что группа $\langle Z_n,+\rangle$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства над полем R, тогда и только тогда, когда, n - простое число.

6. Будут ли изоморфны два пространства:

$$\langle M,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}\rangle \text{ и } \langle R^2,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}\rangle,$$

где

$$M=\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \in R, \beta \in R \right\}?$$

7. Докажите, что пространство матриц с действительными элементами вида: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ изоморфно пространству C над R.

8. Докажите, что линейное пространство многочленов степени ≤ 2 над полем R изоморфно арифметическому пространству R^3.

9. Найти базис и размерность линейного пространства $L(f_1,f_2,f_3)$, если $f_1=3+x+2x^2$, $f_2=-2+x-x^2$, $f_3=1+2x+x^2$.

Практическое занятие №10
Координаты вектора в разных базисах пространства.

1. Найдите координаты вектора

$$a=(6,0,-5)$$

пространства R^3 в базисах:

а) $e_1=(3,0,0)$ б) $e_1'=(1,-1,0)$

$e_2=(0,2,0)$ $e_2'=(1,2,3)$

$e_3=(0,0,1)$ $e_3'=(0,1,-1)$

2. Найдите координаты вектора

$$z=8+9i$$

пространства C над R в базисах:

а) $z_1=\frac{1}{2}$ б) $z_1'=2-i$

$z_2=-3i$ $z_2'=4i$

3. Найдите координаты вектора

$$a=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

пространства M_{22} над полем R в базисе:

$$e_1=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите координаты вектора $f(x)=6-5x+x^2$ вещественного пространства многочленов степени ≤ 3 в базисах:

а) $f_1(x)=-2$ б) $g_1(x)=1$

$f_2(x)=-x$ $g_2(x)=x-1$

$f_3(x)=2x^2$ $g_3(x)=(x-1)^2$

$f_4(x)=x^3$ $g_4(x)=(x-1)^3$

5. Как изменятся координаты данного вектора (b). если:

а) в заданном базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$ поменять местами любые два его вектора?

б) вместо базиса $e_1,e_2,\dots,e_n$ взять базис $e_n,e_{n-1},\dots,e_2,e_1$?

Практическое занятие №11
Преобразование координат при изменении базиса. Матрица перехода от старого базиса к новому.

1. Найти матрицы переходов от базиса e_1,e_2,e_3 пространства R^3 к базису e_1',e_2',e_3', а также координаты вектора (a)=(3,5,-4) в этих базисах, если

а) $e_1=(1,0,0)$ б) $e_1'=(1,1,0)$
$e_2=(0,1,0)$ $e_2'=(0,1,1)$
$e_3=(0,0,1)$ $e_3'=(1,0,1)$

2. В пространстве многочленов степени ≤ 3 над полем R найти матрицы перехода T от базиса $1,x,x^2,x^3$ к базису $1,(x+1),(x+1)^2,(x+1)^3$ и обратно.

3. Пусть $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица перехода от базиса a_1,a_2,a_3 к базису b_1,b_2,b_3. Найдите координаты вектора $a=3a_1-a_2+2a_3$ во втором базисе и координаты вектора $b=4b_1-b_2+3b_3$ в первом базисе.

4. В пространстве $M_{22}(R)$ найдите матрицы перехода от базиса

$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $e_1'=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2'=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_4'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и обратно, а также координаты вектора $a=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ в каждом из этих базисов.

5. Может ли матрица $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ служить матрицей перехода от базиса $e_1=(1,-1,0)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(0,1,1)$ к новому базису в пространстве R^3? Если да, то найдите этот базис.

Практическое занятие №12
Скалярное умножение в векторном пространстве. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского.

1. Докажите, что в n-мерном пространстве многочленов степени ≤(n-1) над полем R скалярное произведение двух многочленов можно определить формулой $(f,g)=\int\limits_b^a f(x)\cdot g(x)dx$.

2. Найдите длины арифметических векторов a=(3,2,1,1,1), b=(-5,0,$\sqrt{3}$,-2,$\sqrt{3}$).

3. Определите угол между векторами a и b

а) a=(2,1,3,2), b=(1,2,-2,1);

б) a=(4,0,2,0,4), b=(3,3,3,3,0).

4. Нормируйте векторы a=($\sqrt{2}$,3,-1,0), b=(-1,2,5,-7).

5. Докажите, что в неравенстве Коши-Буняковского равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.

Практическое занятие №13
Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис.

1. Доказать, что если (x) ортогонален векторам $y_1, y_2,...,y_n$, то он будет ортогонален к любой их линейной комбинации.

2. Доказать, что в любом n-мерном евклидовом пространстве справедлива теорема косинусов.

3. Доказать, что подпространство векторов $L< E_n$, отогональных ненулевому вектору $(b)\in E_n$, имеет размерность (n-1).

4. Из системы векторов пространства R^4: a_1=(2,-3,2,4), a_2=(1,-2,2,-3), a_3=(-1,0,3,-7), $a_4=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$,

$a_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ выбрать подсистему попарно ортогональных векторов.

5. Доказать, что система векторов $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - \frac{1}{2}$, $f_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ является ортогональным базисом пространства многочленов степени $n \le 2$, в котором скалярное произведение задано формулой: $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$.

6. Построить ортонормированный базис подпространств, натянутых на системы векторов:

а) $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ $a_1 = (1, 2, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1, 0)$, $a_4 = (1, 3, 0, 1)$

б) $K(b_1, b_2, b_3, b_4)$ $b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (1, -1, 1, 4)$, $b_3 = (1, 3, 1, 3)$, $b_4 = (1, 2, 0, 2)$

7. В евклидовом пространстве R^4 для подпространства L решений системы уравнений построить ортогональный базис:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Найти ортонормированный базис фундаментальных систем решений для системы уравнений:

а) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

9. В пространстве C над R ортонормировать систему векторов $z_1 = -3+4i$ $z_2 = 2+3i$, если для $z_1 = a_1+b_1i$, $z_2 = a_2+b_2i$, $(z_1, z_2) = a_1a_2+b_1b_2$.

10. В пространстве R^5 найти базис $L^{\perp}$, если $L(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (1, 2, 0, 3, -1)$, $a_2 = (1, -1, 1, 0, -2)$, $a_3 = (2, 1, 1, 3, -3)$.

Практическое занятие №14
Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора.

1. Доказать, что ортогональное дополнение суммы двух подпространств равно пересечению ортогональных дополнений слагаемых, $(U+Z)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.
2. Доказать, что $(U \cap Z)^{\perp} = U^{\perp} + Z^{\perp}$.
3. Доказать, что ортогональное дополнение V над R равно нулевому пространству.
4. Доказать, что $0^{\perp} = V$.
5. В евклидовом пространстве R^4 подпространство L задано системой уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ Найти ортогональные базисы L, $L^{\perp}$, R^4
6. В пространстве R^4 найти ортогональную проекцию (a) и ортогональную составляющую (b) вектора x = (-4, -1, -3, 4), относительно подпространства L, порожденного векторами $a_1 = (1, 1, 1, 1)$; $a_2 = (1, 2, 2, -1)$; $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

Практическое занятие №15
Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора. Процесс ортогонализации системы векторов.

1. Доказать, что ортогональная проекция каждого вектора линейного многообразия a_0+L на подпространство $L^{\perp}$ совпадает с ортогональной проекцией на $L^{\perp}$ вектора a_0.
2. Найти расстояние от точки, заданной вектором (c), до линейного многообразия, заданного системой уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$
3. Доказать, что среди всех векторов подпространства $L < E_n$ наименьший угол с данным вектором $x \in E_n$, образует ортогональная проекция (a) вектора (x) на L.

4. Найти наименьший угол между вектором $x \in R^4$ и $L < R^4$, натянутым на векторы $a_1 = (3, 4, -4, -1)$; $a_2 = (0, 1, -1, 2)$; $x = (2, 2, 1, 1)$.

5. В пространстве R^5 подпространство $U = L(a_1, a_2)$, $Z = (b_1, b_2, b_3)$. Найти ортонормированные базисы $P = U \cap Z$ и $P^{\perp}$, если $a_1 = (1, -1, 0, 1, -1)$; $a_2 = (0, -1, 1, -1, 1)$ и $b_1 = (-1, 0, 0, 1, -1)$; $b_2 = (0, 0, 1, 1, 1)$; $b_3 = (-2, 0, 0, 2, -1)$.

Практическое занятие №16

Контрольная работа №1 по темам «Линейные многообразия», «Пересечение и сумма векторных подпространств», «Преобразование координат при изменении базиса».

Задача 1: Найти ортонормированные базисы суммы и пересечения линейных подпространств U и Z пространства R^3, если $U = L(a_1, a_2, a_3)$, а $Z = (b_1, b_2, b_3)$:

1. $a_1 = (1, 2, 1)$	$b_1 = (1, 2, 2)$
$a_2 = (1, 1, -1)$	$b_2 = (2, 3, -1)$
$a_3 = (1, 3, 3)$	$b_3 = (1, 1, -3)$
2. $a_1 = (2, 1, 0)$	$b_1 = (1, 1, 2)$
$a_2 = (1, 2, 3)$	$b_2 = (-1, 3, 0)$
$a_3 = (-5, 2, 1)$	$b_3 = (2, 0, 3)$
3. $a_1 = (1, 0, 0)$	$b_1 = (0, 0, 1)$
$a_2 = (1, 1, 0)$	$b_2 = (0, 0, -1)$
$a_3 = (2, 2, 0)$	$b_3 = (0, 0, 3)$
4. $a_1 = (-1, 0, 1)$	$b_1 = (1, -1, 2)$
$a_2 = (-2, 0, 2)$	$b_2 = (3, -3, 6)$
$a_3 = (0, 0, 1)$	$b_3 = (2, 2, 4)$
5. $a_1 = (2, -1, 0)$	$b_1 = (2, -1, 0)$
$a_2 = (-1, 0, 0)$	$b_2 = (0, 0, 3)$
$a_3 = (0, 0, 1)$	$b_3 = (0, 1, 1)$
6. $a_1 = (-1, -1, -2)$	$b_1 = (0, 0, 1)$
$a_2 = (0, -2, 3)$	$b_2 = (1, -3, 0)$
$a_3 = (-1, 0, -1)$	$b_3 = (0, 0, 4)$

7. $a_1 = (1, -1, -1)$ $b_1 = (1, -1, 0)$
$a_2 = (-1, 0, 1)$ $b_2 = (0, 0, 2)$
$a_3 = (3, -1, 4)$ $b_3 = (-1, 0, 0)$
8. $a_1 = (1, -1, 2)$ $b_1 = (-1, 0, 2)$
$a_2 = (2, -2, 4)$ $b_2 = (-2, 0, 4)$
$a_3 = (3, -3, 6)$ $b_3 = (-3, 0, 6)$
9. $a_1 = (-1, 3, 2)$ $b_1 = (2, -1, 3)$
$a_2 = (-3, 9, 6)$ $b_2 = (4, -2, 6)$
$a_3 = (-2, 6, 4)$ $b_3 = (6, -3, 9)$
10. $a_1 = (-1, 3, 2)$ $b_1 = (-1, -1, 5)$
$a_2 = (-3, 9, 6)$ $b_2 = (1, 1, -5)$
$a_3 = (0, 0, 5)$ $b_3 = (0, 0, 1)$

Задача 2: В евклидовом пространстве R^4 найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора (x) на подпространство $U = L(a_1, a_2, a_3)$:

1. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$
$a_2 = (6, 6, 2, 1)$
$a_3 = (1, 1, -1, -4)$
$x = (3, -1, 3, 4)$

2. $a_1 = (3, 1, 1, 3)$
$a_2 = (2, 1, 1, 2)$
$a_3 = (6, 2, 0, 6)$
$x = (3, 2, 0, 9)$

3. $a_1 = (3, 2, 0, 1)$
$a_2 = (1, -1, 1, 1)$
$a_3 = (3, 2, 2, -4)$
$x = (-20, 16, 31, 0)$

4. $a_1 = (1, -3, -3, 1)$
$a_2 = (3, -3, -3, -1)$
$a_3 = (3, 1, 1, 2)$
$x = (7, -2, -8, 2)$

5. $a_1 = (2, 3, -1, -8)$
$a_2 = (-2, 0, 1, 5)$
$a_3 = (-1, 5, -3, -13)$
$x = (4, 5, -4, 3)$

6. $a_1 = (2, 3, 2, 1)$
$a_2 = (2, 1, 2, 1)$
$a_3 = (3, 5, 3, -1)$
$x = (-6, -1, 8, 3)$

7. $a_1 = (3, 2, -2, 1)$
$a_2 = (-1, -1, 1, 2)$
$a_3 = (4, 3, -3, 1)$
$x = (5, 7, 1, 6)$

8. $a_1 = (1, 2, 3, 0)$
$a_2 = (4, -6, 8, -5)$
$a_3 = (1, -3, 6, -4)$
$x = (-1, -1, 5, 7)$

9. $a_1 = (2, 3, 8, -8)$
$a_2 = (1, 3, -4, 4)$
$a_3 = (3, 1, 1, 1)$
$x = (4, 5, -1, 5)$

10. $a_1 = (2, 4, 3, -5)$
$a_2 = (3, 2, 2, 2)$
$a_3 = (1, -1, -4, 1)$
$x = (-1, 9, 1, 2)$

Практическое занятие №17
Понятие линейного оператора пространства V над полем F. Матрица линейного оператора.

1. Дано линейное пространство $<M_{nn}(R), +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\}>$. Докажите, что отображение φ: $M_{nn}(R) \to M_{nn}(R)$, которое $\forall A \in M_{nn}(R)$ ставит в соответствие матрицу A^t (где A^t - транспонированная матрица к матрице A), будет линейным оператором.

2. Доказать, что $< Im\varphi, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\}> <V$, где φ - оператор в пространстве V.

3. Выяснить, будут ли отображения

а) φ: $R^3 \to R^3$, $\forall x \in R^3$, $\varphi(x) = 3x$

б) ψ: $R^3 \to R^3$, $\forall x \in R^3$, $\psi(x) = (x_1+к, x_2+к, x_3+к)$, где $k \in R$, линейными операторами в пространстве R^3.

4. Выяснить, будет ли линейным оператором отображение φ: $R^3 \to R^3$, если:

а) $\forall x \in R^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x)=(x_1+3, x_2, x_3)$

б) $\forall x \in R^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x)=(x_1-x_2+x_3, x_3, x_2)$.

Практическое занятие №18
Ядро (Ker φ) и образ (Im φ), дефект и ранг линейного оператора.

1. Показать, что отображение φ: $R^3 \to R^3$, переводящее строку (x_1, x_2, x_3) в строку:

а) $(0, 0, x_3)$

б) $(x_1, x_2, \alpha x_3)$, $\alpha \in R$

в) $(x_1, -x_2, x_3)$,

является линейным оператором. В каждом случае найти матрицу M_φ в базисе: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, а также Ker φ и Im φ. Указать геометрическую интерпретацию.

2. Векторы $a_1=(1, 1, 0)$, $a_2=(1, 1, 1)$, $a_3=(0, 2, 2)$, $b_1=(1, 2, 2)$, $b_2 = (1, 0, 1)$, $b_3 = (0, 0, 1)$ в пространстве R^3 заданы в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Линейные операторы φ и ψ этого пространства имеют матрицы M_φ и M_ψ соответственно в базисах a_1, a_2, a_3 и

b_2, b_2, b_3. Найти матрицы линейных операторов $(\varphi+\psi)$, $(\varphi^\circ\psi)$ в базисе e_1, e_2, e_3.

3. Пусть $a_1=(1, 1, 0)$, $a_2=(0, 1, 1)$, $a_3=(1, 1, 1)$, $b_1=(2, 0, 1)$, $b_2 = (0, 1, 3)$, $b_2 = (1, -1, 0)$ - векторы линейного пространства R^3, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу линейного оператора φ в этом же базисе, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3.

4. Пусть φ и ψ - линейные операторы пространства R^3, заданные матрицами: $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $M_\psi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ соответственно в базисах a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Найти матрицы операторов $(\varphi+\psi)$ и $(\varphi^\circ\psi)$ в базисе a_1, a_2, a_3, а также размерность ядра каждого из операторов, если:

$a_1 = (1, 0, 0)$ $b_1 = (1, 1, 0)$
$a_2 = (0, 1, 0)$ $b_2 = (0, 1, 1)$
$a_3 = (0, 0, 1)$ $b_3 = (1, 0, 1)$

Практическое занятие №19
Теорема о связи размерностей Ker φ и Im φ линейного оператора.

1. Доказать, что множество M - векторов пространства R^4, отображающихся линейным оператором в один и тот же вектор, является линейным многообразием в R^4. Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига многообразия M, если φ в некотором базисе имеет матрицу:
$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Линейный оператор φ пространства R^4 задан матрицей
$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
в базисе e_1, e_2, e_3, e_4- Найти ядро и область значений, а также дефект и ранг оператора φ.

3. В пространстве многочленов степени $\leq n\text{-}1$ от одной переменной задано отображение φ: $f(x) \to f'(x)$. Доказать, что это отображение является линейным оператором. Найти его матрицу M_φ в базисе 1, x, x^2,..., x^{n-1}, а также $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ и их размерности.

4. Доказать, что $\mathrm{Ker}\varphi \dot{+} \mathrm{Im}\varphi = V$.

Практическое занятие №20
Операции над линейными операторами и их свойства.

1. В пространстве R^3 задано отображение: φ: $R^3 \to R^3$, которое $\forall x \in R^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, ставит в соответствие $2x$, то есть $\varphi(x)=2x$ и отображение ψ: $R^3 \to R^3$, которое $\forall x \in R^3$, $\psi(x)=-x$. Выяснить, будут ли эти отображения линейными операторами в пространстве R^3. Если, да, то раскрыть смысл операций $(\varphi+\psi)$, $(\varphi \circ \psi)$, $\lambda\varphi$, $\lambda\psi$.

2. В пространстве R^3 заданы отображения: φ: $R^2 \to R^2$ и ψ: $R^2 \to R^2$, которые все векторы проектируют на ось OX и OY соответственно. Доказать, что φ и ψ - линейные операторы и раскрыть смысл операций $(\varphi+\psi)$ и $(\varphi \circ \psi)$.

3. Почему из линейности отображения φ следует, что $\varphi(0)=0'$?

4. Докажите, что обратному линейному оператору соответствует обратная матрица.

Практическое занятие №21
Связь между матрицами линейных операторов в различных базисах.

1. Докажите, что матрица, отвечающая произведению отображений φ и ψ, равна произведению матрицы отображения ψ на матрицу отображения φ.

2. Как изменится матрица линейного преобразования A, если в системе координат $e_1, e_2, ..., e_n$ переставить какие-либо два вектора, например, e_1 и e_2.

3. Линейное преобразование A четырехмерного пространства имеет в системе координат e_1, e_2, e_3, e_4 матрицу

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Какова будет матрица этого преобразования, если в качестве новой системы координат взять:

а) e_1, e_3, e_2, e_4;

б) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$?

Практическое занятие №22
Действия над матрицами линейных операторов в различных базисах.

1. Докажите, что сумма двух линейных преобразований есть линейное преобразование.

2. Докажите, что матрица произведения линейных преобразований равна произведению матриц этих преобразований.

3. Пусть P — бесконечномерное пространство всех многочленов от λ. Обозначим через D операцию дифференцирования, а через S — опрацию умножения многочленов на λ. Показать, что обе операции линейны и что между ними существуют соотношения $S^n D - DS^n = nS^{n-1}$.

4. Почему преобразование S, указанное в предыдущей задаче, нельзя рассматривать в пространстве многочленов степени не выше n?

Практическое занятие №23
Обратный оператор. Способы его вычисления.

1. В пространстве R^4 в базисе a_1, a_2, a_3, a_4 оператор φ задан матрицей:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$ Выяснить, обратим ли оператор φ ?

2. Будет ли обратимым оператор проектирования на плоскость ХОУ в единичном базисе пространства R^3?

3. Линейный оператор φ пространства R^3 в базисе $a_1 = (0,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 1)$ задан матрицей:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Существует ли обратный оператор к φ ? Если да, то какова его матрица в заданном базисе?

б) Найдите полный прообраз вектора $y = -a_1+2a_3$ при заданном операторе φ.

4. Докажите, что полный прообраз любого вектора (а), при задании линейного оператора φ пространства R^4, является линейным многообразием в R^n.

5. Линейный оператор φ пространства R^4 задан в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицей: $$M_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Выяснить, обратим ли оператор φ ?

б) Найти многообразие М пространства R^4, которое служит полным прообразом вектора $y = -3e_1+13e_2-14e_3+13e_4$.

6. Доказать, что оператор дифференцирования

а) является вырожденным (необратимым) в пространстве многочленов степени $\leq n$;

б) является невырожденным в пространстве функций с базисом ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$).

7. Будет ли обратимым оператор поворота плоскости на угол α в произвольном ортонормированном базисе пространства R^3?

Практическое занятие №24
Инвариантные подпространства.

1. В пространстве R^2 задан оператор поворота на угол πk ($k \in Z$) любого одномерного подпространства. Описать все подпространства, инвариантные относительно φ.
2. Выяснить, какой вид имеет матрица линейного оператора $\varphi \in Hom(V, V)$, если V содержит одно инвариантное подпространство Z.
3. Доказать, что если в некотором базисе пространства V ($\dim V = n$) матрица $M_\varphi = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, то $V = U \dot{+} Z$, где U, Z - инвариантные подпространства.
4. Доказать, что если φ - обратимый линейный оператор пространства V ($\dim V = n$), то любое $U < V$, инвариантное относительно φ, будет инвариантно относительно φ^{-1}.

Практическое занятие №25
Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, его характеристический многочлен.

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов пространства R^4, заданныхх матрицами:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -5 & 9 \\ 16 & -6 & 10 & 15 \\ 10 & 6 & -10 & 6 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 8 \\ 7 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & -3 & -6 & -10 \\ 11 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 8 & -4 & 3 \\ -1 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ е) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Зная собственные значения линейного оператора φ, заданного матрицей A, найти собственные значения оператора φ^{-1}.

3. Доказать, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают при любых квадратных матрицах A и B.

4. Зная собственные значения линейного оператора φ, заданного матрицей A, найти собственные значения оператора $\varphi \circ \varphi$.

Практическое занятие №26
Собственные подпространства оператора. Связь их размерности с кратностью корней характеристического многочлена.

1. Пусть λ — некоторое собственное значение линейного оператора φ, действующего на линейном пространстве L. Обозначим через K множество всех векторов $x \in L$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = \lambda x$. Доказать, что K — подпространство линейного пространства L.

2. Докажите, что ненулевые собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

3. Пусть L — двумерное векторное пространство над полем R. Найти собственные векторы и собственные значения для каждого из следующих отображений φ:

а) φ — симметрия относительно оси, проходящей через начало;

б) φ — поворот на угол α вокруг начала.

4. Пусть L — векторное пространство матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с элементами из поля R. Найти собственные векторы и собственные значения отображения

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Найти размерности собственных подпространств для отображения φ.

Практическое занятие №27

Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов. Необходимые и достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.

1. Докажите, что матрица отображения φ в некотором базисе тогда и только тогда является диагональной, когда этот базис состоит из собственных векторов отображения φ.

2. Докажите, что сумма размерностей всех собственных подпространств не превосходит размерности пространства L.

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ, заданного в некотором базисе пространства R^3 матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов пространства R^3 можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти все подпространства пространства R^3, инвариантные относительно линейного оператора φ, заданного в некотором базисе матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие №28
Жорданова форма матрицы линейного оператора.

1. Найти какую-нибудь матрицу, подобную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 13 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Найти жорданову форму матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Привести примеры всевозможных жордановых клеток второго и третьего порядков.

Практическое занятие №29
Контрольная работа №2 по темам «Линейные операторы», «Собственные значения и собственные векторы линейного оператора».

Задача 1: Матрица оператора φ пространства R^3 задана в единичном базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу этого оператора в базисе a_1, a_2, a_3:

1. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (-1,2,2)$

2. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (2,1,0)$, $a_2 = (-3,0,1)$, $a_3 = (-3,-1,3)$

3. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (2,2,-1)$, $a_2 = (2,-1,2)$, $a_3 = (-1,2,2)$

4. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (-2,2,-2)$, $a_3 = (-3,2,-1)$

5. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (1,-5,-1)$, $a_2 = (-1,3,1)$, $a_3 = (-1,1,-1)$

6. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (-2,2,-6)$, $a_2 = (3,0,-3)$, $a_3 = (-1,-2,3)$

7. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (3,1,1)$, $a_2 = (-3,-3,-2)$, $a_3 = (1,2,1)$

8. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (3,2,4)$, $a_3 = (1,1,2)$

9. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (5,-2,5)$, $a_2 = (-5,1,5)$, $a_3 = (-1,0,1)$

10. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (2,-1,1)$, $a_2 = (1,1,-2)$, $a_3 = (-4,3,4)$

Задача 2: Найти размерность ядра и образа линейного оператора φ, заданного матрицей в некотором базисе пространства R^5.

1-10) $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & n \\ 3 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, где n = 1, 2,…,10.

Задача 3: Выяснить, приводима ли матрица оператора φ к диагональному виду, путем перехода к новому базису в пространстве R^3, если да, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

1. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

5. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

9. $M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 10. $M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

7 . ГЛОССАРИЙ

База конечной системы векторов — максимальная линейно независимая подсистема данной системы векторов.

Линейная оболочка — множество линейных комбинаций конечной системы векторов.

Линейно зависимая система векторов — конечная система векторов, в которой хотя бы один вектор есть линейная комбинация остальных векторов системы.

Линейное многообразие — любой класс эквивалентности по отношению сравнимости по подпространству.
Линейное отображение — любой гомоморфизм одного линейного пространства в другое.
Ранг системы — число векторов в любой ее базе.
Ядро линейного оператора — множество векторов линейного пространства, образы которых равны нулевому вектору.

8. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

8.1. Основная литература

1. Алгебра и теория чисел. / Под. ред. Н.Я. Виленкина. Изд.2-е. — М.: Просвещение, 2004. – 192 с.
2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. Учебник для вузов. – М.:Физматлит, 2003.- 320 с.
3. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 2005. – 559 с., ил
4. Куликов, Л.Я., Москаленко, А.И., Фомин, А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 2001. – 288 с..
5. Курош, А.Г. Курс высшей математики, — Изд.11-е. М.: Наука, 2006. – 432 с.
6. Фаддеев, Д.К., Соминский, И.С. Сборник задач по высшей алгебре, — М.: Наука. 2002. – 304 с.
7. Пуркина, В.Ф. Алгебра. Часть I. Горно-Алтайск, Универ-Принт, 2001. - 102 с.
8. Пуркина, В.Ф. Алгебра. Горно-Алтайск, 2006. - 240 с.

8.2. Дополнительная литература

1. Ван-дер Варден, Б. Л. Алгебра.- М.: Наука,1979. - 648 с., ил.
2. Калужнин, Л. А. Введение в общую алгебру. - М.: Наука, 1973.

1. Сборник задач по алгебре. Под. ред. А.И. Кострикина. — М.: Наука,1987, -352 с.
2. Кострикин, А. М. Основные структуры алгебры. - М.: 2001.
3. Скорняков, Л. А. Элементы алгебры. - М.: Наука, 1980.
4. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. Основы теории групп. - М.: Наука, 1977.
5. Мальцев, А. И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970.
6. Воеводин, В. В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1980.
7. Ленг, С. Алгебра. - М.: Издательство Мир, 1968.
8. Белоногов, В. А. Задачник по теории групп. - М.: Наука, 1977.
9. Кострикин, А. И. Сборник задач по алгебре. - М.: 1995.
10. Воеводин, В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
11. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966.
12. Икрамов, Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.
13. Ильин, В.А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: МГУ, 1985.
14. Винберг, Э.Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980. – 176 с.
15. Варпаховский, Ф.Л., Солодовников, А.С. Алгебра. — Окунев, Л.Я. Высшая алгебра,— М.: Просвещение, 1966. – 333 с.

Для заметок

Учебное издание

Учебно-методический комплекс
«Линейная алгебра и геометрия»

Составители:
Пуркина Валентина Федоровна
Кайгородов Евгений Владимирович

Подписано в печать   Формат 60*84/16
Бумага офсетная. Усл.печ.л.-
Заказ №   . Тираж

РИО Горно-Алтайского госуниверситета,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1

Отпечатано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского госуниверситета,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1