Лекция 1

Глава I.
Основы линейной алгебры

§1. Матрицы. Линейные операции над матрицами

Введем основное понятие.

Определение 1. Прямоугольная таблица действительных чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется ***матрицей*** над P порядка $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной*** порядка n.

Числа, из которых составлена матрица, называются ***элементами*** этой матрицы.

Запись матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Краткая запись: $[\,a_{ik}\,]$. В этой записи a_{ik} – элемент матрицы, стоящий в i–й строке и k–м столбце матрицы.

Обозначение: A.

Рассмотрим множество всех матриц над P фиксированного порядка $m \times n$. Обозначим это множество через $P^{m\times n}$.

В ходе исследования свойств матриц нам придется сравнивать матрицы между собой.

Определение 2. Матрицы $A = [\,a_{ik}\,]$ и $B = [\,b_{ik}\,]$ называются ***равными***, если они имеют один и тот же порядок $m \times n$ и все соответствующие элементы матриц попарно равны:

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{для всех } i = \overline{1,m} \text{ и } k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Запись: $A = B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1+2 & 2\cdot 2 \end{pmatrix}.$$

Введем операции над матрицами.

Определение 3. ***Суммой матриц*** $A = [\,a_{ik}\,]$ и $B = [\,b_{ik}\,]$ одного и того же порядка называется матрица $C = [\,c_{ik}\,]$, задаваемая равенствами

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \qquad (3)$$

Обозначение: $C = A + B$.

Нахождение суммы матриц будем называть *сложением матриц*.

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-1) \\ 3+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через O матрицу из $P^{m\times n}$, состоящую из одних нулей: $O = [\ 0\ ]$. Будем называть ее ***нулевой матрицей***. Для любой матрицы A из $P^{m\times n}$ выполняется равенство

$$A + O = A.$$

Если $A = [\,a_{ik}\,]$, то матрица $-A = [-a_{ik}\,]$ называется ***противоположной матрице*** A. Для нее выполняется равенство

$$A + (-A) = O.$$

Из равенства (3) следует, что сложение двух матриц сводится к сложению соответствующих элементов этих матриц - действительных чисел. Поэтому для любых матриц A, B, C из $P^{m\times n}$ выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ переместительное свойство;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ сочетательное свойство;
3) $A + O = A$;
4) $A + (-A) = O$.

Введем еще одну операцию над матрицами.

Определение 4. ***Произведением матрицы*** $A = [\,a_{ik}\,]$ ***на число*** α называется матрица $B = [\,b_{ik}\,]$, задаваемая равенствами

$$b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik}. \tag{4}$$

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$.

Нахождение произведения матрицы на число будем называть *умножением матрицы на число*.

Пример 3.

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot(-2) \\ 4\cdot 3 & 4\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}.$$

Из равенства (4) следует, что умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы. Поэтому для любых матриц A, B из $P^{m\times n}$ и любых действительных чисел α, β выполняются равенства:

5) $1 \cdot A = A$;
6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A$;
8) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

Рассмотрим в заключение матрицы частного вида.

Матрица порядка $1 \times n$ (*матрица-строка* длины n):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Матрица порядка $m \times 1$ (*матрица-столбец* высоты m):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Для строк и столбцов *заданной* матрицы A порядка $m \times n$ будем использовать обозначения:

$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ - i-я строка матрицы A.

$A^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ - k-й столбец матрицы A;

Столбцы матрицы A порядка $m \times n$ можно рассматривать как самостоятельные матрицы-столбцы. Поэтому над ними можно выполнять операции сложения и умножения на число. Это относится, соответственно, и к строкам матрицы.

Сравнение матриц и линейные операции над матрицами сводятся к операциям над их столбцами (строками). Например,

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A^k = B^k \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n};$$

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad C^k = A^k + B^k \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n};$$

$$B = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad B^k = \alpha A^k \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n}.$$

Итак, на множестве $P^{m \times n}$ всех матриц фиксированного порядка $m \times n$ определены две операции, обладающие свойствами 1) – 8). Операции называются *линейными*. Множество $P^{m \times n}$ является примером *линейного пространства*. Перейдем к рассмотрению этого понятия.