Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Горно-Алтайский государственный университет»
Кафедра алгебры, геометрии
и методики преподавания математики

АЛГЕБРА

Учебно-методический комплекс

Для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению
010100 Математика

Горно-Алтайск
РИО Горно-Алтайского госуниверситета
2009

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Горно-Алтайского государственного университета

УДК 512.57
ББК 22.14
П88

Алгебра: учебно-методический комплекс (для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению 010100 Математика) / Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2009. – 124 с.

Составители:
Пуркина В.Ф., кандидат педагогических наук,
доцент кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета
Кайгородов Е. В., ст. лаборант
кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета
Рецензенты:
Кириченко Т. Ф., кандидат педагогических наук, доцент
кафедры алгебры и МПМ Санкт-Петербургского
государственного педагогического университета
им. А. И. Герцена
Деев М. Е., кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Горно-Алтайского государственного университета

Пособие содержит учебно-методические материалы по дисциплине «Алгебра» для студентов дневного отделения физико-математического факультета I курса по направлению «010100 Математика» и рассчитано на 1 семестр. Дисциплина «Алгебра» является общепрофессиональной дисциплиной федерального компонента ОПД Ф.02 для данного контингента студентов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КВАЛИФИКАЦИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БАКАЛАВРА

Бакалавр математики подготовлен к выполнению деятельности в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления; программно-управленческому обеспечению научно-исследовательской, проектно-конструкторской и эксплуатациионно-управленческой деятельности.

Объектами профессиональной деятельности бакалавра математики являются научно-исследовательские центры, органы

управления, образовательные учреждения, промышленное производство. Исходя из своих квалификационных возможностей, выпускник по направлению 010100 Математика может занимать должности: математик, инженер-программист (программист) и др. в соответствии с требованиями Квалификационного справочника должностей руководителей, бакалавров и других служащих, утвержденного постановлением Минтруда России от 21.08.98 № 37.

2. НАБОР КОМПЕТЕНЦИЙ БАКАЛАВРА

После изучения курса «Алгебра» студенты должны:

- овладеть основными методами современной алгебры;
- приобрести опыт использования алгебраических методов в процессе решения задач смежных математических дисциплин (геометрии, мат. анализа и т. д.)
- получить представление о роли алгебры в системе математического знания и перспективах ее применения в естественных и гуманитарных науках.

3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дисциплина «Алгебра» является общепрофессиональной дисциплиной федерального компонента. Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса дневных отделений физико-математических факультетов по направлению «010100 Математика» и рассчитано на один семестр.

3.1. Цели и задачи дисциплины

1) Познакомить студентов 1 курса с основными понятиями и методами современной алгебры;
2) Научить применять их в процессе решения различных задач;
3) Раскрыть роль современной алгебры в системе математического знания;

4) Сформировать у студентов алгебраическую составляющую математической культуры.

3.2. Обязательные требования к минимуму содержания дисциплины

В результате изучения курса «Алгебра» студенты должны овладеть следующим материалом:

n-арные операции на множествах. Алгебры. Подалгебры. Модели. Гомоморфизмы алгебр. Группа. Аксиомы группы. Подгруппа, достаточные условия подгруппы. Кольцо, поле, линейное векторное пространство.

Определители и их свойства. Системы линейных уравнений методы их решения. Поле комплексных чисел.

Теория делимости в кольце Z. Теория делимости в кольце многочленов P[x]. Методы нахождения корней многочлена из кольца P[x].

3.3. Распределение часов

Семестр	Учебные занятия						Контроль
	Общий объем	В том числе					
		аудиторные				Самост. работа	
		всего	из них				
			лекции	практич.	лабор.		
1	148	108	54	54	-	40	зач. экз.

3.4. Технологическая карта учебного курса «Алгебра»

№ п/п	Темы	Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. занятия
			лекции	практ.	
Модуль 1					
1	Понятия об основных алгебраических структурах	20	6	6	8

Модуль 2					
2	Матрицы и определители	22	8	8	6
Модуль 3					
3	Системы линейных уравнений, методы их решения	20	6	8	6
Модуль 4					
4	Комплексные числа	16	6	4	6
Модуль 5					
5	Теория делимости в кольце Z	22	8	6	8
Модуль 6					
6	Теория делимости в кольце P[x]	48	20	22	6
Форма итогового контроля		Зачет и экзамен			

3.5.Содержание дисциплины

Основные алгебраические структуры

N-арные операции на множествах. Алгебры. Подалгебры. Типы алгебр: группа, кольцо, поле, линейное пространство. Кольцо матриц. Определители и их свойства, методы вычисления.

Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений методы их решения: Гаусса, Крамера, матричный.

Кольца и поля

Поле комплексных чисел. Кольцо целых чисел. Отношение делимости в кольце Z и его свойства. Кольцо многочленов P[x]. Отношение делимости в кольце многочленов от одной переменной и его свойства.

3.5.1. Лекционный курс — 54 часа

Лекция №1

Понятия об основных алгебраических структурах. Алгебры, подалгебры. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр.

Лекция №2

Алгебры с одной бинарной алгебраической операцией. Группа, аксиомы группы. Мультипликативная и аддитивная форма записи. Группы конечные и бесконечные. Подгруппа. Достаточные условия подгруппы.

Лекция №3

Кольцо, поле, линейное пространство. Арифметическое n-мерное векторное пространство. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис пространства.

Лекция №4

Алгебры матриц. Матрицы типа $(n\times m)$ и квадратные матрицы. Операции над матрицами. Свойства операций. Группа, кольцо и линейное пространство матриц.

Лекция №5

Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Элементарные матрицы. Обратимые матрицы. Условия обратимости матрицы. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений.

Лекция №6

Перестановки и подстановки. Четные и нечетные подстановки. Конечная группа подстановок и ее знакопеременная подгруппа.

Лекция №7

Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Определитель произведения матриц. Способы вычисления определителя.

Лекция №8

Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы. Следствия системы линейных уравнений. Равносильные системы линейных урав-

нений и элементарные преобразования системы. Критерий совместности системы линейных уравнений.

Лекция №9

Методы решения систем линейных уравнений: метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса); запись и решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме (матричный метод); правило Крамера.

Лекция №10

Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородных систем линейных уравнений. Фундаментальный набор решений (базис пространства) однородных систем линейных уравнений. Связь между решениями неоднородной линейной системы и ассоциированной с ней однородной системы.

Лекция №11

Принцип расширения в алгебре. Причины, обуславливающие расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел. Построение поля комплексных чисел. Плоскость комплексных чисел. Геометрическое представление комплексных чисел.

Лекция №12

Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня квадратного из комплексного числа.

Лекция №13

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Лекция №14

Кольцо целых чисел Z. Отношение делимости в кольце Z. Свойства отношения делимости в кольце Z. Кольцо классов вычетов по модулю m. Деление с остатком в кольце Z. Теорема о делении с остатком.

Лекция №15

Наибольший общий делитель целых чисел и его свойства. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Алгоритм

Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя.

Лекция №16

Взаимно простые числа и их свойства. Наименьшее общее кратное целых чисел и его свойства. Способы нахождения наименьшего общего кратного.

Лекция №17

Простые и составные числа. Свойства простых чисел. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики и следствия из нее.

Лекция №18

Построение кольца многочленов P[x] от одной переменной над полем. Линейное пространство многочленов от одной переменной. Свойства степеней многочленов.

Лекция №19

Отношение делимости в кольце P[x] . Свойства отношения делимости в кольце P[x]. Деление с остатком в кольце P[x]. Теорема о делении с остатком.

Лекция №20

Наибольший общий делитель многочленов и его свойства. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя.

Лекция №21

Взаимно простые многочлены и их свойства. Наименьшее общее кратное многочленов и его свойства. Способы нахождения наименьшего общего кратного.

Лекция №22

Приводимые и неприводимые над данным полем многочлены. Свойства неприводимых многочленов. Теорема о разложении многочленов в произведение нормированных неприводимых множителей и следствия из нее.

Лекция №23

Корни многочлена. Деление многочлена на двучлен. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Применение схемы Горнера к решению практических задач.

Лекция №24

Многочлены над полем комплексных чисел. Основная теорема алгебры и следствия из нее. Приводимые и неприводимые над данным полем многочлены. Количество корней многочлена над полем над полем комплексных чисел. Формулы Виета.

Лекция №25

Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.

Лекция №26

Многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

Лекция №27

Методы решения алгебраических уравнений высших степеней от одной переменной. Уравнения третьей степени. Уравнения четвертой степени.

3.5.2. Практические занятия — 54 часа

Практическое занятие №1

Алгебры, подалгебры, гомоморфизмы алгебр.

Практическое занятие №2

Группа, аксиомы группы. Подгруппа. Достаточные условия подгруппы.

Практическое занятие №3

Кольцо, поле, линейное пространство.

Практическое занятие №4

Операции над матрицами. Свойства операций. Группа, кольцо и линейное пространство матриц.

Практическое занятие №5

Обратимые матрицы. Условия обратимости матрицы. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений.

Практическое занятие №6

Перестановки и подстановки. Четные и нечетные подстановки. Определители второго и третьего порядков.

Практическое занятие №7

Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Способы вычисления определителя.

Практическое занятие №8

Системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Практическое занятие №9

Решение систем линейных уравнений матричным методом и по правилу Крамера.

Практическое занятие №10

Решение однородных систем линейных уравнений.

Практическое занятие №11

Контрольная работа №1 по темам «Матрицы», «Определители квадратных матриц», «Решение систем линейных уравнений».

Практическое занятие №12

Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Практическое занятие №13

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Практическое занятие №14

Отношение делимости в кольце Z. Свойства отношения делимости в кольце Z. Деление с остатком в кольце Z. Теорема о делении с остатком.

Практическое занятие №15

Наибольший общий делитель целых чисел и его свойства. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя.

Практическое занятие №16

Взаимно простые числа и их свойства. Наименьшее общее кратное целых чисел и его свойства. Способы нахождения наименьшего общего кратного.

Практическое занятие №17

Отношение делимости в кольце P[x]. Деление с остатком в кольце P[x].

Практическое занятие №18

Наибольший общий делитель многочленов. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Линейное представление наибольшего общего делителя.

Практическое занятие №19

Наименьшее общее кратное многочленов. Способы нахождения наименьшего общего кратного многочленов.

Практическое занятие №20

Корни многочлена. Деление многочлена на двучлен. Схема Горнера. Применение схемы Горнера к решению практических задач.

Практическое занятие №21

Приводимые и неприводимые над данным полем многочлены. Формулы Виета.

Практическое занятие №22

Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.

Практическое занятие №23

Многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

Практическое занятие №24

Решение уравнений третьей степени в радикалах.

Практическое занятие №25

Решение уравнений четвертой степени в радикалах.

Практическое занятие №26

Методы решения алгебраических уравнений высших степеней от одной переменной.

Практическое занятие №27

Контрольная работа №2 по темам «Комплексные числа», «Приводимость многочленов над полями», «Решение алгебраических уравнений высших степеней».

3.5.3. Самостоятельная работа — 40 часов

Самостоятельная работа студентов рассматривается как вид учебного труда, позволяющий целенаправленно формировать и развивать самостоятельность студента как личностное качество при выполнении различных видов заданий и проработке дополнительного учебного материала.

Для успешного выполнения расчетных заданий, написания рефератов и подготовки к коллоквиуму, помимо материалов лекционных и практических занятий, необходимо использовать основную и дополнительную литературу, указанную на стр. 118 настоящего пособия.

№	Темы	Кол-во часов	Формы отчетности	Сроки
1	Кольцо матриц над полями R и C.	6	Расчетное задание	октябрь
2	Системы линейных уравнений	6	Расчетное задание	ноябрь
3	Комплексные числа.	6	Коллоквиум	ноябрь
4	Методы приближенного решения уравнений	10	Реферат	декабрь
5	Числа Мерсенна	12	Реферат	декабрь

3.5.4. Темы курсовых работ

1. Функции от матриц.
2. Нормы векторов и матриц.
3. Абелевы группы.
4. Конечные группы.
5. Свободные группы и многообразия.
6. Нильпотентные группы.
7. Классификация линейных операторов.
8. Кватернионы.
9. Измерения в линейном пространстве.

10. Метрические свойства линейного оператора.
11. Методы решения уравнений высших степеней.
12. Решение матричных уравнений.

4. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

1. Логические операции, формулы, законы логики.
2. Предикаты и кванторы.
3. Виды теорем, методы их доказательств.
4. Бинарные соответствия, их свойства.
5. Бинарные отношения на множестве, их свойства.
6. N-арные операции на множествах, их свойства.
7. Группа, подгруппа, примеры.
8. Кольцо и поле, примеры.
9. Линейное пространство над полем.
10. Кольцо матриц над полем R.
11. Обратная матрица, алгоритм ее вычисления. Решение матричных уравнений.
12. Определитель квадратной матрицы, его свойства, вытекающие из определения, методы вычисления.
13. Теорема о числе решений системы линейных уравнений.
14. Линейное пространство решений системы линейных однородных уравнений. Фундоментальная система решений.
15. Постоение поля C.
16. Тригонометрическая форма комплексного числа, операции в этой форме.
17. Алгебраическая форма комплексного числа, операции в этой форме.
18. Методы решений системы линейных уравнений (Гаусса, Крамера, матричный).
19. Отношение делимости в кольце Z, его свойства.
20. Алгоритм Евклида. НОД и НОК целых чисел, способы их вычисления.
21. Простые числа. Теорема Евклида и теорема об интервалах.
22. Основная теорема арифметики.
23. Кольцо многочленов от одной переменной.
24. Отношение делимости в кольце P[x], его свойства.

25. Приводимые и неприводимые многочлены в кольце P[x]. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители.
26. Корни многочлена, теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера.
27. Приводимость многочленов над полями C и R.
28. Теорема о рациональных корнях многочлена.
29. Метод Кардано.
30. Метод Феррари.
31. Приводимость многочленов над полями Q и R.
32. Простые числа. Теорема Евклида.
33. Кольцо и поле. Примеры.

5. ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ

Курс "Алгебра", который читается студентам в первом семестре, состоит из следующих тем:

– понятия об основных алгебраических структурах (группа, кольцо, поле, линейное пространство);
– теория делимости в кольце Z;
– теория матриц и определителей;
– системы линейных уравнений;
– поле комплексных чисел;
– теория делимости в кольце P[x].

ГЛАВА 1. Понятия об основных алгебраических структурах.

Основные знания, умения и навыки, которыми должны овладеть студенты в процессе изучения данной темы:
знать аксиоматические определения структур: группа, кольцо, поле, линейное пространство;
уметь определять, является ли данное множество относительно указанных операций группой, кольцом или полем.

§1. Алгебры. Подалгебры. Гомоморфизмы алгебр.

Условимся упорядоченную пару из двух множеств A и B обозначать через <A, B>.

Определение 1. Пусть A - непустое множество, и $\{f_i \ i \in I\}$ - множество n-арных операций f_i заданных на A. Упорядоченную пару $<A, \{ f_i \mid i \in I \}>$ называют <u>универсальной алгеброй</u> с множеством операций $\{ f_i \mid i \in I \}$, а множество A - основным множеством или <u>носителем алгебры</u>.

Пишут $<A, \{ f_i \}>$.

Замечание 1. Хотя понятия алгебра $<A, \{ f_i \}>$ и множество A различны, в том случае, когда ясно, какие операции заданы на A, говорят просто - алгебра A, т.е. алгебру отождествляют с ее носителем.

Замечание 2. В том случае, когда множество операций $\{ f_i \mid i \in I \}$ в универсальной алгебре A - конечно, его задают перечислением элементов $\{ f_i , f_2 ,...., f_K \}$ и в записи алгебры опускают фигурные скобки, то есть пишут $<A, f_i , f_2 ,...., f_K >$.

Пример 1. $<N, +, \cdot , 1>$ - алгебра натуральных чисел. Здесь множество N рассматривается вместе с бинарными операциями сложения, умножения, а также с нуль-арной операцией фиксации единицы.

Пример 2. <Z, -, 0> - алгебра целых чисел. На основном множестве Z рассматриваемой алгебры заданы две операции: бинарная - вычитание и нулъ-арная - фиксация нуля.

Пример 3. Следующие пары <N, ->, <Z, :>, <Q, :>, <R, i> не являются алгебрами, так как рассматриваемые операции не выполняются на данных множествах.

Определение 2. Пусть на множествах A и B задано одно и то же множество операций. Алгебра $<B, \{ f_i \}>$ называется ***подалгеброй*** алгебры $<A, \{ f_i \}>$. если множество B является непустым подмножеством множества A.

Пример 4. Алгебра <H, + > является подалгеброй алгебры <Z, +>, так как $N \subset Z$, и множества их операций совпадают.

Теорема 1. Для того, чтобы непустое подмножество B множества A могло служить основным множеством для некоторой подалгебры универсальной алгебры $<A, \{ f_i \}>$

необходимо и достаточно, чтобы подмножество B было замкнуто относительно каждой операции f_i.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $B \subset A$ и $<B, \{ f_i \}>$ - подалгебра алгебры $<A, \{ f_i \}>$. Так как $<B, \{ f_i \}>$ - алгебра, то каждая операция f_i выполнима на B, т. е. множество B замкнуто относительно всех операций f_i.

Достаточность. Пусть $B \subset A$ и B замкнуто относительно каждой операции f_i заданной на A. Это значит, что все операции f_i выполнимы на B.

Кроме того, так как $B \subset A$, каждая операция f_i будучи однозначной на A, однозначна и на B. Следовательно, $<B, \{ f_i \}>$ - алгебра, более того -подалгебра алгебры $<A, \{ f_i \} >$. **Теорема доказана**.

Пример 5. Рассмотрим алгебру $<Z, \cdot>$. Подмножество Z^- отрицательных чисел множества Z не является подалгеброй, так как Z^- незамкнуто относительно заданной бинарной операции умножения.

Пример 6. Рассмотрим алгебру $<Z, \cdot, 0>$. Подмножество N не является подалгеброй, так как в N нет нуля, т.е. N незамкнуто относительно нуль-арной операции**.**

Определение 3. Пусть $<A, f>$ и $<B, g>$ - алгебры с n-арными операциями f и g. Отображение φ: $A \to B$ множества A в множество B называется *гомоморфизмом алгебры A в алгебру B*, если выполняется условие:

$$\forall a_1 \ldots, a_n \in A, \varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) = g(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \quad (*),$$

которое назовем - ***условием гомоморфности***. Говорят также, что отображение φ сохраняет операцию f алгебры A.

Замечание 1. Если f – нуль-арная операция, то она выделяет какой-то элемент (a) алгебры A, и операция g - также нуль-арная - выделяет какой-то элемент (b) алгебры B, то в этом случае условие гомоморфности (*) примет вид: $\varphi(a) = b$.

Замечание 2. Если $<A, *>$ и $<B, \#>$ - алгебры с бинарными операциями, то условие гомоморфности запишется в виде: $\forall a, b \in A, \varphi(a*b) = \varphi(a) \# \varphi(b)$.

Пример 7. Отображение lg: $R^+ \to R$ является гомоморфизмом алгебры $<R^+,\cdot>$ на алгебру <R, +>. Действительно, $\forall$ a, $b \in R^+$, $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$.

Определение 4. Алгебры <A, $\{f_i\}$> и <B, $\{g_i\}$> называются: однотипными, если существует биективное отображение множества $\{f_i\}$ на множество $\{g_i\}$, при котором соответственные операции f_i и g_i имеют один и тот же ранг.

В случае, если множества операций, заданных на A и B- конечны, определение однотипных алгебр можно сформулировать так:

Определение 4*. Алгебры <A, $f_1...,f_k$> и <B, $g_1...,g_m$> называются <u>однотипными,</u> если число их операций одинаково (k = m) и эти операции можно упорядочить так, что f_i и g_i (i = 1,..., к) будут иметь одинаковые ранги.

Пример 8. Алгебры <Q, +, :> и <C, ·, -> являются однотипными, а алгебры <Z, +, · > и <R, +, ·, :> однотипными не являются, так как число операций, заданных на Z и R, различно.

Пример 9. Алгебры <N, +, ·> и <Z, - , 1> разнотипны, так как на N обе операции бинарные, а на Z операция вычитания - бинарная, а операция фиксации единицы - нуль-арная.

Определение 5. <u>Гомоморфизмом алгебры</u> <A, $\{f_i\}$> <u>в однотипную ей алгебру</u> <B, $\{g_i\}$> называется отображение φ: $A \to B$ такое, что при каждом $i \in I$ выполняется условие гомоморфности:

$$\forall i \in I, \forall a_1...,a_n \in A\ \varphi(f_i(a_1,...,a_n)) = g_i(\varphi(a_1,...,a_n)). \quad (**)$$

Говорят также, что <u>отображение φ сохраняет все операции</u>, заданные на множестве A.

Определение 6. Алгебры A и B называются <u>гомоморфными</u> <u>алгебрами</u>, если существует гомоморфизм φ алгебры A в алгебру B. Пишут, φ: $A \to B$ — гомоморфизм.

Пример 10. Отображение lg:$R^+ \to R$ является гомоморфизмом алгебры $<R^+, \cdot, :>$ в алгебру <R+, ->, так как

$\forall$ a, $b \in R^+$, $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$, т. е. образ произведения двух элементов равен сумме образов;

$\lg(a:b) = \lg a - \lg b$ - образ частного двух элементов равен разности образов;

$\lg a^{-1} = -\lg a$ - образ обратного элемента равен противоположному элементу;
$\lg 1 = 0$ - образ единичного элемента равен нулевому элементу.

Следовательно, алгебры R^+ и R гомоморфны.

В зависимости от свойств отображений определяются различные виды гомоморфизмов.

Определение 7. Гомоморфизм φ: $A \to B$ алгебры A в алгебру B называется:
1) Мономорфизмом (или вложением A в B), если отображение φ -инъективно;
2) Эпиморфизмом (наложением A на B), если отображение φ -сюръективно;
3) Изоморфизмом, если отображение φ- биективно.

Если алгебра A изоморфна алгебре B, то пишут $A \cong B$.

Определение 8. Гомоморфизм φ: $A \to B$ алгебры A на себя называется:
1) Эндоморфизмом, если отображение φ - инъективно:
2) Автоморфизмом, если отображение φ - биективно;

Замечание: Отношение изоморфизма на множестве однотипных алгебр A, B, C, ... является отношением эквивалентности, т. е.
а) $\forall A, A \cong A$ - отношение $\cong$ рефлексивно,
б) $\forall A, B\ (A \cong B \Rightarrow B \cong A)$- отношение $\cong$ симметрично,
в) $\forall$ A, B, C, $((A \cong B)\ \&\ (B \cong C)) \Rightarrow (A \cong C)$ - отношение $\cong$ транзитивно.

Следовательно, множество однотипных алгебр разбивается на классы эквивалентности. Изоморфные алгебры считаются различными моделями одной и той же абстрактной алгебры, т.е. изоморфные алгебры по существу считаются одинаковыми относительно свойств рассматриваемых операций на множествах-носителях и могут отличаться лишь обозначениями своих элементов и их названиями. Как мы не различаем экземпляры одного и того же литературного романа, напечатанные разными шрифтами и на разной бумаге, если интересуемся только содержанием романа, так и изоморфные алгебры рассматривают в математике как своеобразные копии

друг друга, и часто, вместо изучения свойств некоторой алгебры, исследуют свойства изоморфной ей алгебры.

Понятие изоморфизма играет фундаментальную роль в математике. Это отношение позволяет классифицировать математические объекты с точки зрения свойств операций, заданных на множестве произвольной природы.

Указание 1. Для доказательства изоморфизма двух однотипных алгебр A и B нужно, либо указать конкретный изоморфизм, либо доказать существование такого изоморфизма. Исходя из определения понятия изоморфизма, укажем алгоритм решения задач такого типа. Он состоит из следующих шагов:

1. Задаем отображение φ: $A \to B$ так, что $\forall$ a, $\varphi(a) = b$;
2. Доказываем, что отображение φ является биекцией, т.е. φ удовлетворяет двум условиям:

$\forall\ b \in B, \exists\ a \in A \mid \varphi(a) = b$ - условие сюрьективности,

$\forall\ a_1, a_2 \in A, (\varphi(a_1) = \varphi(a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)$ - условие иньективности.

3.Проверяем, что φ удовлетворяет условию гомоморфности (**).

Пример 11. Доказать, что алгебры <Z, +> и <2Z, +>, где 2Z -множество четных чисел, изоморфны. Для доказательства воспользуемся указанием 1.

1) Зададим отображение φ: $Z \to 2Z$ следующим образом:

$\forall a \in Z, \varphi(a) = 2a$.

2) Докажем, что φ - сюръективно. Для любого элемента $2n \in Z$ всегда можно указать его прообраз $n \in Z$, т.е. φ - сюръективно.

Докажем, что φ -инъективно Пусть $\forall a, b \in Z$, $\varphi(a) = \varphi(b)$, значит $2a = 2b$ или $a = b$, т.е. φ -инъективно.

3) Остается доказать, что φ- гомоморфизм. Для этого нужно проверить выполнимость условия гомоморфности:

$\forall a, b \in Z, \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. (1)

Находим образ суммы, стоящей в левой части равенства (1). Получаем $\varphi(a+b) = 2(a + b) = 2a + 2b$. (2)

Затем находим сумму образов, стоящих в правой части равенства (1):

$$\varphi(a) + \varphi(b) = 2a + 2b.$$

Сравнивая (2) и (3), видим, что образ суммы равен сумме образов, т.е. выполняется условие (1). Следовательно, φ - гомоморфизм.

Таким образом, все три шага алгоритма выполнены. Следовательно,

$$<Z, +> \cong <2Z, +>.$$

Указание 2. Для того, чтобы доказать, что алгебры A и B неизоморфны нужно указать такое свойство, формулируемое в терминах некоторой операции одной из алгебр, которым другая алгебра не обладает.

Пример 12. Доказать, что алгебры <Q, +> и <Q, ·> неизоморфны.

Для доказательства воспользуемся указанием 2. Предположим, что эти алгебры изоморфны. В алгебре <Q, +> операция + обладает свойством: $\forall a \in Q$, $a = a/2 + a/2$, где $a/2$ - число рациональное.

Это же свойство в алгебре <Q, ·> записывается так : $\forall b \in Q$, $b = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$.

Однако, не для всех рациональных b число $\sqrt{b}$ - рациональное. Следовательно, предположение о том, что данные алгебры изоморфны, неверно.

§2. Группа. Аксиомы группы.

Все алгебры можно классифицировать с точки зрения свойств операций, заданных на множествах-носителях. Эта классификация позволяет выделить из множества алгебр алгебры определенного рода, которые будут одинаковы, с точностью до изоморфизма.

Прежде, чем давать определения различных родов алгебр, договоримся о терминологии. Если задана бинарная алгебраическая операция на множестве A, то в зависимости от того, какая задана операция и как она обозначена, будем говорить и писать:

В общей терминологии	В аддитивной терминологии	В мультипликативной терминологии
Операция *	Сложение +	Умножение •
Результат a * b	Сумма a + b	Произведение a • b
Нейтральный элемент e	Нуль 0	Единица 1
Симметричный элемент a'	Противоположный элемент -a	Обратный элемент a^{-1}

Определение 1. Алгебра <A, *> с одной бинарной операцией называется группоидом.

Например, <N, •>, <Z. - >, <Q\{0}, :> - группоиды, а <N, +, •>, <N, ->, <Z, :>. <Q, :> - не являются группоидами.

Определение 2. Полугруппой называется алгебра <A, *> с бинарной ассоциативной операцией:
$\forall$ a,b,c$\in$ A, (a*b)*c = a*(b*c). Можно сказать, что полугруппа - это ассоциативный группоид.

Например, <N, •>. <Z, +>, <Q, +> - полугруппы, так как операции сложения и умножения на множествах N, Z, Q - ассоциативны. Алгебры <Z, ->, <Q\{0},:> не являются полугруппами.

Определение 3. Моноидом называется алгебра <A, *>, бинарная операция которой удовлетворяет условиям:

1) $\forall$ a,b,c $\in$ A, (a*b)*c = a*(b*c) - операция ассоциативна,
2) $\exists$ e $\in$A | $\forall$ a $\in$ A, e*a = a*e = a - существует нейтральный элемент.

Можно сказать, что моноид - это полугруппа с нейтральным элементом.

Например, <Z, •> - является моноидом, так как e = 1, 1 $\in$Z, а <N, +> не является моноидом, так как e=0, 0$\notin$N.

Определение 4. Группой <G. *> называется алгебра, бинарная операция которой удовлетворяет условиям, называемым также аксиомами группы:

A_1. $\forall$ a,b,c$\in$ G, (a*b)*c = a*(b*c) (ассоциативность);

A_2. $\exists$ e $\in$ G | $\forall$a$\in$G, e*a = a*e = a (существование нейтрального элемента);

A_3. $\forall$ a $\in$ G, $\exists$ a' $\in$ G | a*a' = a'*a = e (симметризуемость каждого элемента).

Из определения видно, что любая группа является полугруппой и моноидом. Можно сказать, что группа - это моноид, каждый элемент которого имеет симметричный элемент.

В некоторых случаях, удобно использовать следующее определение группы:

Определение 4*. Алгебра <G, *> с бинарной операцией * называется группой, если выполняются следующие условия:

а) $\forall$ a,b,c $\in$ G, (a*b)*c = a*(b*c).

б) $\forall$ a,b $\in$ G, каждое из уравнений a*x = b и y*a = b имеет хотя бы одно решение.

Первое определение группы более удобно для проверки того факта, будет ли данная алгебра группой. Второе определение характеризует группу как алгебру, в которой разрешимы уравнения первой степени. Можно доказать, что определения 4 и 4* равносильны. В определении группы заложен алгоритм решения всех задач, связанных с выяснением вопроса - будет ли данная алгебра группой.

Определение 5. Группа <G, *> называется коммутативной (или абелевой), если операция * коммутативна, т.е. выполняется аксиома:

A_4. $\forall$ a,b $\in$ G, a*b = b*a (коммутативность).

Указание. Для доказательства того, что множество A с операцией * является группой, нужно.

во-первых, показать, что операция * является бинарной операцией на множестве A, т.е. выполнимой и однозначной операцией ранга 2 на A,

во-вторых, проверить выполнимость аксиом A_1, A_2, A_3 группы для алгебры <A, *>.

Если первое из этих условий не выполняется, то нет смысла в проверке аксиом.

Пример 1. Рассмотрим множество Z целых чисел относительно операции сложения. Покажем, что <Z, +> - абелева группа.

а) Операция + является выполнимой на Z, так как $\forall$ a,b$\in$Z, (a+b)$\in$Z; однозначной на Z, так как результат (a + b) определяется однозначно. Ранг операции "+" равен двум, так как в определении операции используется пара элементов (a, b) $\rightarrow$ (a + b). Следовательно, <Z, +> - группоид.

б) Операция "+" ассоциативна на Z, так как $\forall$ a,b,c$\in$ Z, (a+b)+c = a+(b +c). Следовательно, <Z, +> - полугруппа.

в) Роль нейтрального элемента будет играть число 0, так как $\forall$ a $\in$ Z, a + 0 = 0 + a = a. Следовательно, <Z, +> - моноид.

г) Для всякого целого числа существует противоположное число: $\forall$ a$\in$Z, $\exists$ (-a) | a + (-a) = (-a) - a = 0.

Следовательно, <Z, +> - группа.

д) Операция + коммутативна на Z, так как $\forall$ a,b $\in$ Z, a + b = b + a.

Таким образом, <Z, +> - коммутативная группа. Ее обычно называют аддитивной <u>группой целых чисел.</u>

Пример 2. Рассмотрим множество Z относительно операции умножения целых чисел. Выясним, алгеброй какого рода является пара <Z, •>:

а) Умножение является бинарной операцией на Z, выполнимой и однозначной. Следовательно, <Z, •> - группоид.

б) Операция умножения на Z ассоциативна, т.е. $\forall$ a,b,c$\in$Z, a(bc) = (ab)c. Следовательно, <Z, •> - полугруппа.

в) Число 1 является нейтральным элементом относительно операции умножения, так как $\forall$ a $\in$ Z, 1 • a = a • 1 = a. Значит,

<Z, •> - моноид.

г) Теперь осталось проверить аксиому существования симметричного элемента на Z относительно операции умножения. Очевидно, что все целые числа, кроме 1 и -1, не имеют обратных элементов на Z, то есть аксиома A_3 не выполняется.

Следовательно, <Z, •> - группой не является. Можно также показать, что уравнения ax = b, ya = b разрешимы не для всех целых чисел.

Пример 3. Выясним, будет ли группой множество Q^0 рациональных чисел без нуля относительно бинарной операции умножения рациональных чисел.

а) Очевидно, что умножение рациональных чисел является бинарной операцией на Q, выполнимой и однозначной. Следовательно, $< Q^0, \bullet >$ -группоид.

б) Операция умножения - ассоциативна. Следовательно, $< Q^0, \bullet >$ -полугруппа.

в) Нейтральный элемент равен 1. Следовательно, $< Q^0, \bullet >$ - моноид.

г) Кроме того, $\forall\ a \in Q^0, \exists a^{-1} \in Q^0 \mid a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$.

Итак, $< Q^0. \bullet >$ - группа. Ее обычно называют мультипликативной группой рациональных чисел. Очевидно, что группа

$< Q^0, \bullet >$ - абелева.

Определение 6. Группу <G, *> называют бесконечной, если G -бесконечное множество.

Пример 4. Пусть $\{\alpha^к\}$ - множество целочисленных степеней некоторого целого числа a. Тогда $<\{\alpha^к\}, \bullet >$ - бесконечная мультипликативная группа.

Проверьте самостоятельно!

Определение 7. Группу <G, *> называют конечной, если G - конечное множество. Число элементов множества G называют порядком группы и обозначают |G| (или 0r, или (G: 1)).

Пример 5. Рассмотрим пример конечной группы. Пусть дано множество Z и натуральное число m. Будем делить все целые числа на m. Числа, которые при делении на m будут иметь одинаковые остатки, соберем в один класс. Так как различных остатков будет m (0, 1, 2, ... , m-1), то и различных классов тоже будет m $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$.

Обозначим это множество классов символом Z_m и зададим на этом множестве операцию сложения классов по правилу: $\overline{k} \oplus \overline{s} = \overline{k+s}$

Тогда $<Z_m, \oplus>$ - будет конечной группой. Докажите это самостоятельно!

Пример 6. Доказать, что $<Zp^0, \bullet>$, где p - простое число и $\overline{k} \bullet \overline{s} = \overline{k \bullet s}$ будет тоже группой.

§3. Подгруппа. Достаточные условия подгруппы.

Определение 1. Пусть <G, *> - группа и $H \subset G$. Подалгебра <H, *> группы <G, *> называется подгруппой группы G, если алгебра <H, *> сама является группой относительно операции *.

Если H - подгруппа группы G, то пишут H < G.

Замечание. Для того, чтобы выяснить, является ли некоторое множество $H \subset G$ подгруппой группы G относительно операции *, заданной на G, достаточно проверить следующие условия:

а) $\forall a \in H, \forall b \in H, a * b \in H$ - условие замкнутости,

б) $\forall a \in H, a' \in H$ - условие симметризуемости,

называемые в дальнейшем достаточными условиями подгруппы.

Действительно, если $\forall a \in H, a' \in H$, то $a * a' \in H$. Так как $a * a' = e$, то нейтральный элемент e группы G также принадлежит и множеству H. Операция * на множестве H является ассоциативной, так как она ассоциативна на множестве G, включающем H. Итак, <H, *> - группа.

Пример 1. Рассмотрим аддитивные группы чисел <Z, +>, <2Z, +>, <Q, +>, <R, +>. Имеет место следующая цепочка 2Z<Z<Q<R.

Покажем, например, что 2Z<Z. Действительно, $2Z \subset Z$. Кроме того:

а) $\forall a, b \in 2Z, a + b \in 2Z$,

б) $\forall a \in 2Z, -a \in 2Z$.

Таким образом, достаточные условия подгруппы выполнены.

Аксиома нейтрального элемента выполнима на 2Z, так как из условий а) и б) следует, что $a + (-a) = 0$, $0 \in 2Z$. Аксиома ассоциативности тоже выполнима, так как $2Z \subset Z$. Таким образом, 2Z < Z.

Пример 2. Подгруппами абстрактной группы G будут так называемые тривиальные подгруппы - сама группа G, т е G<G и группа $E=\{e, e \in G\}$, т.е. E<G.

Пример 3. Показать, что алгебра $<R^+, +>$ не является подгруппой аддитивной группы <R, +>.

Действительно, $R^+ \subset R$. Кроме того,

а) $\forall$ a, b $\in R^+$. (a + b)$\in R^+$. - условие замкнутости выполнено,

б) $\forall a \in R^+$ $-a \notin R^+$, - условие симметризуемости не выполняется на R^+. Следовательно, алгебра < R^+ , +> не является подгруппой группы <R, +>.

§4. Кольцо, поле, линейное пространство.

Определение 1. Алгебра <A, +, •> - называется кольцом, если бинарные операции +, • удовлетворяют условиям:

1 -4) <A, +> - коммутативная группа

5) $\forall$ a, b, c $\in$ A, a • (b + c) = ab + ac

(b + c) • a = ba + ca

Из определения следует, что любое кольцо - это коммутативная группа, в которой операция сложения связана с операцией умножения левым и правым дистрибутивными законами. На операцию умножения в общем случае никаких ограничений не накладывается. Если операция умножения дополнительно обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и нейтральным элементом, то кольцо называют ассоциативно - коммутативным кольцом с единицей.

Пример 1. <Z, +, •>, <Q, +, •>, <R, +, •>, <Z_m, +, •> - коммутативные кольца.

Определение 2. Алгебра <A, +, • > называется полем, если бинарные операции сложения и умножения удовлетворяют условиям (аксиомам):

1 -4) < A, +> - коммутативная группа

5-8) <A\{0}, •> - коммутативная группа

9) $\forall$ a, b, c $\in$ A, a • (b + c) = ab + ac

(b +c) • a = ba + ca

Из определения следует, что любое поле - это аддитивная и мультипликативная группа одновременно, а также коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Пример 2. <Q, +, •>, <R, +, • >, <$Z°_P$, +, • > - поля.

Пусть дано не пустое множество V и поле F.

Элементы множества V будем обозначать малыми буквами латинского алфавита и называть векторами. Элементы поля F

будем обозначать малыми буквами греческого алфавита и называть скалярами.

Определим на множестве V бинарную операцию сложения векторов $\oplus: V \times V \to V$, $+<a, b> \to a + b$

и внешнюю композицию $w\lambda: F \bullet V \to V$

$w\lambda: <\lambda, a> \to \lambda a$ (умножение вектора на скаляр),

которую при фиксированном значении скаляра можно считать унарной операцией на множестве V.

Определение 3. Алгебра $<V, +\{w\lambda \mid \lambda \in F\}>$ называется линейным векторным пространством относительно операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, если 1-4) $<V, +>$ - коммутативная группа.

5) $\forall\, a, b \in V\ \forall\, \lambda \in F, \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

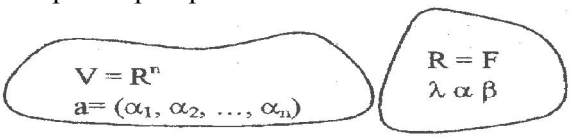
6) $\forall\, \alpha, \beta \in F\ \forall\, a \in V, (\alpha+\beta) \bullet a = \alpha a + \beta a$

7) $\forall\, \alpha, \beta \in F\ \forall\, a \in V, (\alpha \bullet \beta) \bullet a = \alpha \bullet (\beta \bullet a)$

8) $\forall\, a \in V, la = a$

Из определения следует, что любое линейное векторное пространство является аддитивной коммутативной группой.

Примеры 3. $<R^n, + \{w\lambda \mid \lambda \in R\}>$ - арифметическое линейное векторное пространство.



Роль векторов в этом пространстве играют арифметические векторы вида: $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

Операция $\oplus$ - это операция сложения таких векторов, операция $w\lambda$ -это операция умножения арифметического вектора на действительное число. Легко проверить, что эти операции удовлетворяют условиям 1-8. Покажем, например, что $<R^n, +>$ - коммутативная группа.

1. Так как операция + по определению является бинарной операцией на R^n, то $< R^n, +>$ - алгебра.

2. $\forall\, a, b \in R^n,\ a + b = b + a$

Действительно, пусть $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $b = (\beta_1\ \beta_2, ... ,\beta_n)$

Тогда $a+b=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, ..., \alpha_n+\beta_n)$, $b+a=(\beta_1+\alpha_1, \beta_2+\alpha_2, ..., \beta_n+\alpha_n)$

Так как операция сложения действительных чисел коммутативна, то a+b=b+a

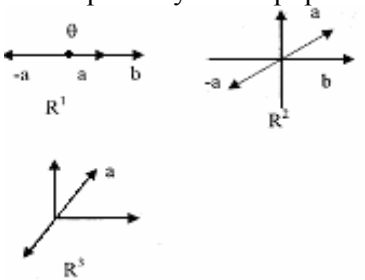
3. $\forall$ a, b, c$\in$ R^n, (a+b)+c=a+(b+c) проверяется аналогично.

4. Роль нуля будет играть вектор Θ =(0,0 .. 0).

5. $\forall$ a $\in$V $\exists$ -a : a + (- a) = (-a) + a = Θ действительно, если a =(α_1 ,α_2, ...,α_n), то -a =(-α_1 ,-α_2, ...,-α_n), которые в сумме дадут нулевой вектор.

Итак, <R^n, +> - коммутативная группа. Остальные условия в определении линейного пространства проверить самостоятельно.

Замечание. Линейные пространства <R^1, + {wλ | $\lambda\in$R}>, <R^2, +{wλ | $\lambda\in$R}>, <R^3, +{wλ | $\lambda\in$R}> имеют наглядную геометрическую интерпретацию:



R^1 - множество радиусов-векторов на прямой;
R^2 - множество радиусов-векторов на плоскости;
R^3 - множество радиусов-векторов в пространстве.

ГЛАВА 2. Матрицы и определители.

Перечень основных знаний и умений по данной теме:

- знать, какие операции определяются на множестве Mmn(R), при каких условиях они выполнимы:
- знать основные свойства операций, определенных на множестве Mmn(R);
- знать и уметь выполнять алгоритм каждой операции;
- уметь решать матричные уравнения;

- знать определение детерминанта n-го порядка, понимать структуру этого определения;
- знать основные свойства определителя;
- уметь записать разложение определителя порядка n = 2, n = 3, n = 4:
- знать и уметь пользоваться правилом Саррюса;
- уметь приводить определитель любого порядка с помощью элементарных преобразований к «треугольному виду» и вычислять его.

§1.Матрицы. Группа и кольцо матриц.

Пусть дано поле R. тогда таблицу вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

, где $\alpha_{ik} \in R$, называют матрицей порядка m×n и обозначают короче $\|\alpha_{ik}\|$ i = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ...,m или буквами A, B, C, ...

Любая строка этой матрицы есть n-мерный арифметический вектор, а любой столбец - m-мерный арифметический вектор.

Всю матрицу можно рассматривать как m×n -мерный вектор.

Множество всех матриц с элементами из поля R принято обозначать символом Mmn(R). На некоторых подмножествах этого множества можно определить две бинарные операции (+, ·) и две унарные операции (умножение матрицы на скаляр и нахождение обратной матрицы).

<u>Операция</u> сложения матриц определяется <u>только для тех матриц из множества Mnm(R), которые имеют одинаковый порядок, т.е. одинаковое число строк и столбцов.</u>

Если $A = \|\alpha_{ik}\|$ и $B=\|\beta_{ik}\|$, то $A + B = C = \|\alpha_{ik} + \beta_{ik}\|$ i = 1, 2,... m, k= 1,2,...,n

Например, матрицы порядка 2×3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ можно сложить и в результате получим матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ того же порядка 2x3, а матрицы вида: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $(1\ 3\ 4\ 5)$ сложить нельзя, т.к. они имеют различный порядок.

Операция умножения матриц определяется только для тех матриц из множества Mmn(R), порядки которых удовлетворяют следующему требованию: число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй матрицы.

То есть, если матрица A имеет порядок m×n, то матрица B в произведении $A \cdot B$ должна иметь порядок n×s .

Тогда $A \bullet B = C = \|C_{ik}\|$. где C_{ik} находится по правилу: i-ая строка матрицы A умножается на k-ый столбец матрицы B (в смысле скалярного произведения).

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, то произведение $A \bullet B = C = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем произведение B • A, это тоже можно сделать, так как число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\bullet 1+2\bullet 0 & 1\bullet 2+2\bullet 1 & 1\bullet 3+2\bullet 2 \\ 0\bullet 1+1\bullet 0 & 0\bullet 2+1\bullet 1 & 0\bullet 3+1\bullet 2 \\ 3\bullet 1+0\bullet 0 & 3\bullet 2+0\bullet 1 & 3\bullet 3+0\bullet 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Замечания:

1. Как видим, $A \bullet B \neq B \bullet A$, то есть операция умножения матриц некоммутативна.

2. Порядок матрицы A•B связан с порядками матриц A и B, матрица A•B имеет столько же строк, сколько и матрица A и столько же столбцов, сколько их имеет матрица B.

Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ перемножить нельзя, так как их порядки не удовлетворяют требуемому условию.

Операция умножения на скаляр определяется на всем множестве Mmn(R) без ограничений: $\lambda\|\alpha_{ik}\|=\|\lambda\alpha_{ik}\|$

Пример 1: $3\bullet\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\bullet 3 & 4\bullet 3 \\ 0\bullet 3 & 1\bullet 3 \\ 2\bullet 3 & (-1)\bullet 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Определение 1. Нулевой матрицей называется квадратная матрица вида:

$0=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, у которой все элементы равны нулю.

Проверьте самостоятельно, что если матрицы A и 0 одного порядка, то A+0 = 0+A = A т.е. матрица 0 играет роль нейтрального элемента на множестве Mmn(R), относительно операции сложения.

Определение 2. Матрица (-A) называется противоположной матрице A, если (-A) + A=A+(-A) = 0

Самостоятельно проверьте, что для матрицы

$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ **-A=** $\begin{pmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & -\alpha_{nn} \end{pmatrix}$

Теорема 1. Алгебра <Mnn(R), +> - аддитивная абелева группа.

Схема доказательства:

1. Множество Mnn(R) замкнуто относительно операции сложения матриц, т.к. $\forall$A, B $\in$ Mnn(R), (A+B=C) $\in$ Mnn(R) (смотри определение операции +).

2. $\forall A, B, C \in Mnn(R)$, $(A+B)+C = A+(B+C)$ т.к. операция сложения матриц определяется через операцию сложения действительных чисел, которая ассоциативна.

3. $\forall A, B \in Mnn(R)$, $A+B = B+A$, т.к. операция сложения действительных чисел коммутативна.

4. $\exists$ нулевая матрица $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ такая, что $\forall A \in Mnn(R)$

$0 + A = A + 0 = A$

5. $\forall A \in Mnn(R)\ \exists\ (-A) = \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & -\alpha_{nn} \end{pmatrix}$ такая, что

$A + (-A) = (-A) + A = 0$

Итак. <Mnn(R), +> - абелева группа.

Определение 3. Единичной матрицей называется квадратная матрица вида:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все другие элементы равны нулю.

Проверьте самостоятельно, что если матрицы A и E одного порядка, то $A \bullet E = E \bullet A = A$, т.е., что E играет на множестве Mnn(R) роль нейтрального элемента по умножению.

Теорема 2. Алгебра <Mnn(R), +, •> - некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей и делителями нуля.

Для доказательства нужно проверить выполнимость всех условий в определении кольца:

1. Множество Mnn(R) замкнуто относительно операций, т.к. $\forall A, B \in Mnn(R)$, $(A+B) \in Mnn(R)$ и $(A \bullet B) \in Mnn(R)$
2. <Mnn(R), +> - абелева группа (см. теорему 1).
3. $\forall A,B,C \in Mnn(R)$, $A \bullet (B+C) = A \bullet B + A \bullet C$, $(B+C) \bullet A = B \bullet A + C \bullet A$.
4. $\forall A, B, C \in Mnn(R)$, $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$.
5. $\exists A, B \in Mnn(R)$, $A \bullet B \neq B \bullet A$.
6. $\exists E \in Mnn(R)$: $\forall A$, $(E \bullet A = A \bullet E = A)$.

Каждую аксиому проверьте самостоятельно.

Покажем, что в кольце Mnn(R) есть делители нуля, например, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $A \bullet B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Понятно, что таких матриц одного и того же порядка существует множество.

Запишите самостоятельно такие матрицы третьего порядка.

Теорема 3. Алгебра <Mnn(R), $+\{\omega_\lambda | \lambda \in R\}$> - линейное пространство размерности $n \times n$.

Схема доказательства:

1-4) <Mnn(R), +> - абелева группа.

5) $\forall A, B \in Mnn(R)$ $\forall \lambda \in R$: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

6) $\forall \alpha, \beta \in R$ $\forall A \in Mnn(R)$: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

7) $\forall \alpha, \beta \in R$ $\forall A \in Mnn(R)$: $(\alpha\beta) \bullet A = \alpha(\beta A)$.

8) $1 \bullet A = A$.

Роль единичного базиса играет система матриц вида:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, E_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Наприм</u>ер. В пространстве $R_{22}(R)$ матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ может быть разложена по единичному базису так:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 4. Ведущим (главным) элементом i-ой строки матрицы A называется первый отличный от нуля элемент этой строки.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 1 - ведущий элемент 1-ой строки, 3 - ведущий элемент 2-ой строки, 2 - ведущий элемент 3-ей строки.

Определение 5. Матрица A называется ступенчатой, если:

1. под ведущими элементами каждой её строки стоят нулевые элементы.

2. нулевые строчки стоят последними.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - ступенчатая матрица.

Определение 6. Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

1. Перемена местами строк матрицы;
2. Умножение строки на число, отличное от нуля;
3. Прибавление к одной строке другой, умноженной на число, не равное нулю.

Если на множестве матриц Mnn(R), задать отношение φ так: A φ B ⇔ (когда от A к B можно перейти с помощью элементарных преобразований), то это отношение будет отношением эквивалентности.

Действительно:

1. A∈ Mnn(R), A φ A (очевидно).
2. ∀A, B ∈ Mnn(R), A φ B => B φ A (достаточно совершить преобразование в обратном порядке).
3. ∀A, B, C ∈ Mnn(R), (A φ B) & (B φ C) =>(A φ C).

Если матрицы A и B эквивалентны, то будем записывать это так: A ⇔ B.

Частным случаем этого отношения будет отношение A φ B ⇔ (A=B)

Определение 7. Если $A = \|\alpha_{ik}\|$ и $B = \|\beta_{ik}\|$ i, k = 1...n, то $A = B \Leftrightarrow (\alpha_{ik} = \beta_{ik})$

Теорема 4. Любую ненулевую матрицу A ∈ Mnn(R) можно привести к ступенчатому виду. Доказательство проведите самостоятельно методом математической индукции по числу строк матрицы.

Пример 4. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Первую строку матрицы умножили на 2 и сложили со второй строкой, затем снова первую строчку умножили на 3 и вычли из третьей строки, затем 2-ю строчку умножили на 5, 3-ю на 4 и сложили.

Определение 8. Строчным рангом ступенчатой матрицы называется число ее ненулевых строк. Обозначение: rang A = k. В примере 4 rang B = 3.

Определение 9. Матрица $A = \|\alpha_{ik}\|$, где i, к = 1,2, ..., n называется обратимой (невырожденной), если существует $X \in Mnn(R)$: $A \bullet X = X \bullet A = E$.

Докажем, что такая матрица (X) единственная для A.

Предположим противное, пусть существуют матрицы X и У, удовлетворяющие определению. Тогда (X•A)•У=X•(A•У) в силу ассоциативности операции умножения матриц.

Тогда: E•У=X•E => (У=X).

Матрицу X называют обратной матрицей к матрице A и обозначают A^{-1}.

Теорема 5. Если квадратная матрица A порядка n×n обратима, то строчный ранг её ступенчатой матрицы равен n.

Доказательство: Так как матрица A обратима, то $\exists A^{-1}$: $A \bullet A^{-1} = E$ (rang E=n) => (rang A=n). (Справедлива и обратная теорема. Докажите её самостоятельно).

Теорема 6. Любую обратимую матрицу $A \in Mnn(R)$ с помощью элементарных преобразований можно привести к единичной матрице E (т.е. матрица A эквивалентна единичной матрице E).

Эта теорема является следствием теоремы 4.

Поэтому алгоритм нахождения обратной матрицы основан на том, что матрицы (A/E) и (E/A^{-1}) - эквивалентны, и состоит в следующем:

1. К квадратной матрице A справа приписывается единичная матрица того же порядка, что и A, (A/E);
2. С помощью элементарных преобразований от матрицы (A/E) переходят к матрице (E/A^{-1});
3. Записывают A^{-1} отдельно.

Замечание 1. В процессе нахождения обратной матрицы не обязательно проверять - обратима ли матрица, т.к. при элементарных преобразованиях сразу будет видно, имеет ли она обратную матрицу.

Пример 5. Найти обратную матрицу для матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rang A=3 (проверьте), значит она обратима.

Найдем A^{-1}

$$(A/E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A \bullet A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

С помощью обратной матрицы можно решать матричные уравнения, в которых роль переменной играет матрица X

Пример 6. Решить в общем виде уравнение. $X \bullet A + X = B$

Решение.

Чтобы матрицу X можно было вынести за скобки, нужно представить слагаемое $X = E \bullet X$, тогда $X \bullet (A+E) = B$. Нельзя писать, что $X \bullet (A+1) = B$, т.к. A+1 не имеет смысла во множестве Rmn(R). Если матрица (A+E) будет невырожденной, т.е. имеет обратную матрицу $(A+E)^{-1}$, то получим уравнение $X\ (A+E)\ (A+E)^{-1} = B\ (A+E)^{-1}$, т.к. умножение матриц некоммутативно, то в этом случае нужно умножать справа, тогда $X \bullet E = B \bullet (A+E)^{-1}$ или $X = B \bullet (A+E)^{-1}$

Если матрица (A+E) не имеет обратной матрицы, то исходное уравнение таким способом решать нельзя.

Пример 7. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet X \bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Представим уравнение в виде A•X•B = C
2. Выразим матрицу X: $X = A^{-1}\bullet C\bullet B^{-1}$
3. Найдем A^{-1} и B^{-1}:

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{matrix} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 6 & -3 \\ -5 & 3 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

§2. Определители, их свойства.

Пусть дано конечное множество M; в качестве такого множества можно взять $M = \{1,2,..,n\}$.

Определение 1. Биекция φ: $M \to M$ называется подстановкой n-ой степени.

Обозначим множество всех подстановок на множестве M через $S_n \overset{df}{=} \left\{ \varphi \middle| \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .. & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & .. & f(n) \end{pmatrix} \right\}$.

Докажите самостоятельно, что $|S_n| = n!$

Определим на множестве S_n операцию композиции двух подстановок (биекций) $\forall x \in M$ $x(\varphi \circ \psi)=(x\varphi)\psi$.

Замечание 1. Из определения следует, что композиция двух подстановок будет снова подставной, т.е. множество S_n замкнуто относительно операции композиции (по теореме о композиции биекций).

Пример 1. Найти композицию двух подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ видим, что $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, т.е. операция (°) некоммутативна.

Пусть дано множество $M=\{ l,2,..,i ,k,...n\}$.

Запишем одну из перестановок этого множества, например, (1,2,...i, k…n)

Будем говорить, что пара элементов (i, к) образует инверсию, если:

1. i > k.
2. i стоит впереди (слева) от к.

Определение 2. Перестановка называется четной, если в ней четное число инверсий и нечетной, если в ней нечетное число инверсий.

Пример 2. Пусть M = {1,2,3,4,5}, (3,1,4,2,5) одна из его перестановок.

Определим число инверсий в этой перестановке. Для этого поступаем так:

Находим наименьший элемент (это 1), зачеркиваем его и считаем, сколько элементов стоит впереди 1, которые больше 1. Видим, что это одно число 3, затем зачеркиваем двойку и считаем, со сколькими элементами она находится в инверсии и так продолжаем до последнего числа:

1+2+0+0+0=3. Следовательно, перестановка (3.1,4,2,5) - нечетная.

Определение 3. Подстановка $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ называется четной, если перестановка, стоящая в ее нижней строке, будет четной.

Пример 3. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - нечетная (проверьте!)

Определение 4. $\mathrm{Sg}\, n\, \varphi = \begin{cases} 1, \text{если } \varphi - \text{четная} \\ -1, \text{если } \varphi - \text{нечетная} \end{cases}$

Запись: Sgn φ =1 читается так: "знак подстановки φ равен 1".

Из определения следует, что Sgn ε = 1, действительно, подстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ - четная.

$\mathrm{Sg}\, n\, \varphi^{-1} = \mathrm{Sg}\, n\, \varphi$, $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

Определение 5.

Подстановка $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ называется транспозицией элементов (i, k).

Теорема 1. Sg n τ = -1 Докажите самостоятельно.

Теорема 2. Алгебра <Sn, O> конечная группа.

Проверьте самостоятельно аксиомы:

1. $\forall\ \varphi, \psi, \delta \in Sn\ \ (\varphi \circ \psi) \circ \delta = \psi \circ (\varphi \circ \delta)$
2. $\exists\ \varepsilon \in Sn: \forall\ \varphi \in Sn\ (\varepsilon \circ \varphi = \varphi \circ \varepsilon = \varphi)$
3. $\forall\ \varphi \in Sn\ \exists\ \varphi^{-1} \in Sn: \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon$
4. $|Sn| = n!$

Эту некоммутативную группу называют симметрической группой подстановок степени (n) и обозначают σ_n=<Sn, O>

Обозначим через An - множество всех четных подстановок группы σ_n

Теорема 3. <An, °> - подгруппа группы σ_n, ее называют знакопеременной группой подстановок n-ой степени.

Докажите самостоятельно.

Определение 6. Определителем (детерминантом) n-го порядка квадратной матрицы A = $\|\alpha_{ik}\|$, i, к=1, 2, 3, ...,n называют сумму вида:

$$\sum_{\varphi \in S_n} \mathrm{Sgn}\ \varphi\ \alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \dots \alpha_{n\varphi(n)},$$

где $Sn = \left\{ \varphi \mid \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Sgn}\ \varphi = \begin{cases} 1, если \varphi - четная \\ -1, если \varphi - нечетная \end{cases}$$

Обозначается эта сумма короче символами det A или |A|. Если это определение проговорить словами, то получится следующее:

«Определителем n-го порядка квадратной матрицы A называют алгебраическую сумму всевозможных членов, каждый из которых представляет собой произведение n-элементов, взятых <u>по одному и только одному</u> разу из каждой строки и

каждого столбца матрицы A, знак любого члена определяется четностью (нечетностью) подстановки его индексов».

Непосредственно из определения определителя n-го порядка следует истинность следующих утверждений:

1. Определитель n-го порядка имеет n! членов.

Действительно, суммирование введется по всем подстановкам $\varphi \in Sn$, а множество Sn имеет ровно n! членов, так как на множестве M = {1, 2,...,n} из n элементов можно задать n! подстановок (каждая подстановка является биекцией $\varphi : M \to M$).

2. Половина членов определителя будет иметь знак (+), половина - (-), так как половина подстановок будут четными, половина - нечетными.

3. Определитель, в котором какая-то строка или столбец нулевые, будет равен нулю.

Действительно, в этом случае <u>каждый</u> член определителя $\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \ldots \alpha_{n\varphi(n)}$ в качестве одного из сомножителей будет содержать ноль.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя n-го порядка имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя (суммы).

Действительно, тогда

$$\sum_{\varphi \in Sn} \operatorname{sgn}\varphi \cdot k\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} = k \cdot \sum_{\varphi \in Sn} \operatorname{sgn}\varphi \cdot \alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} = k \det A$$

Используя определение детерминанта n-го порядка, найдем разложение определителя 3-го порядка.

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_3} \operatorname{sgn} \varphi \cdot \alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{3\varphi(3)}$$

Матрица A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ $S_3 = \left\{ \varphi \mid \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) \end{pmatrix} \right\}$

Найдем все подстановки из множества S_3 и определим их четность.

$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - четная; $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ - нечетная;

$\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ - нечетная; $\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ - четная;

$\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ - нечетная; $\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ - четная;

Теперь запишем разложение определителя 3-го порядка:

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_3} \operatorname{sgn}\varphi \cdot \alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \alpha_{3\varphi(3)} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} -$$

$$\alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32}$$

Из этого разложения видно, что члены со знаком "+" и со знаком "-" выбираются по схемам, которые носят название "'Правило Саррюса".

Пример 4: Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \bullet 1 \bullet 5 + 2 \bullet 2 \bullet 0 + 3 \bullet 0 \bullet 0 - 0 \bullet 1 \bullet 0 - 3 \bullet 2 \bullet 5 - 0 \bullet 2 \bullet 1 = 5 - 30 = -25$$

Опираясь на определение детерминанта, можно записать его разложение для порядка n = 4, n = 5, ... Но при этом число членов определителя будет стремительно возрастать.

При n = 4 определитель будет иметь 4! = 1•2•3•4 = 24 члена, при n = 5 уже 5! = 1•2•3•4•5 = 120 членов, при n = 6, 6! = 1•2•3•4•5•6 = 120 • 6 = 720 членов и т.д. Поэтому определители порядка выше n = 3 вычисляют, <u>опираясь не на его определение, а на его свойства.</u>

Основную роль при этом играет такое свойство: элементарные преобразования над строчками (столбцами) определителя n-го порядка не изменяют его значения. Поэтому определитель любого порядка с элементами из поля R может быть приведен к так называемому «треугольному» виду:

Например:

а) $\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}$

б) det A= $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & . & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & . & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_{1n}\alpha_{2(n-1)}\dots\alpha_{n1}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

$=1\cdot(-1)\cdot(-6)\cdot 6 = 36$

Понятия минора и алгебраического дополнения элемента α_{ik} определителя n-го порядка позволяют вычислять определители путем разложения их по строке или столбцу, а так же понижать порядок определителя.

Определение 7. Минором M_{ik} элемента α_{ik} определителя n-го порядка называется определитель (n-1) порядка, который получается из данного определителя путем вычеркивания i - й строки и k - го столбца.

Определение 8. Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента α_{ik} определителя n-го порядка называют минор M_{ik}, взятый со знаком $(-1)^{i+к}$, т.е. $A_{ik} = (-1)^{i+к} M_{ik}$,

Пример 5. Вычислить A_{23} элемента α_{23} определителя $|A| = = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

1. Находим минор M_{23} элемента α_{23}. Дня этого вычеркиваем вторую строчку и третий столбец, получаем определитель:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11$

2. Итак. $M_{23} = -11$. Тогда $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = 11$

Теорема 4. Докажите,

что det A = $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \dots + \alpha_{1n}A_{1n}$

(самостоятельно).

ГЛАВА 3. Системы линейных уравнений, методы их решения.

Основными понятиями этой темы служат понятия: система линейных уравнений, ее расширенная матрица, элементарные преобразования систем и матриц, их взаимосвязь.

Определение 1. Системой (s) линейных уравнений с (n) переменными называется система вида:

$$1)\ \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sn}x_n = \beta_s \end{cases} (1)$$

где $\alpha_{ik} \in R$ (i=1, 2, ..., s) (k=1, 2,..., n)

2) Систему (1) можно записать короче в виде: $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$

i = 1, 2,...,s, α_{ik} называют коэффициентами, $x_1, x_2, \ldots, x_n$- переменными, β_i- свободными членами, $\alpha_{11}x_1, \ldots, \alpha_{sn}x_n$ - членами уравнений.

Определение 2. Решением системы уравнений (1) называется набор чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ таких, что при их подстановке соответственно вместо x_1, x_2,.., x_n каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

В этом случае говорят, что набор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ удовлетворяет системе (1). Решить систему - это значит найти все ее решения (или доказать, что их не существует).

Определение 3. Две системы уравнений

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$ и $j_{i1}x_1 + j_{i2}x_2 + \ldots + j_{in}x_n = \delta_i$

называются равносильными (эквивалентными), если каждое решение одной системы является решением другой, и обратно: каждое решение второй является решением первой.

Другими словами, можно сказать, что равносильные системы имеют одно и то же множество решений.

Заметим, что эквивалентные системы могут иметь разное число уравнений. Например,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

а также то, что две системы, не имеющие решений, будут считаться эквивалентными, исходя из определения 3.

Определение 4. Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае - несовместной; если она имеет единственное решение, то она называется определенной, если больше одного решения, то неопределенной.

Определение 5. Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называют следующие преобразования:

1. Перемена местами уравнений системы.
2. Умножение уравнений на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному из уравнений системы другого, умноженного на число.
4. Удаление из системы нулевого уравнения.

Докажите, что всякое элементарное преобразование системы (1) приводит к системе, равносильной данной.

Таблицу A=$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{sn} \end{pmatrix}$ называют матрицей системы 1)

Матрицу B=$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{sn} & \beta_s \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы 1).

Матрицу B также называют табличной записью системы 1), а запись 1)-полной записью системы. Ясно, что по табличным записям всегда можно воспроизвести полную запись.

Например, пусть

B= $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$, тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Табличная запись системы 1) более компактна, чем полная запись и более удобна для проведения элементарных преобразований системы линейных уравнений. Например, при умножении уравнения на число все коэффициенты и свободный член умножаются на это число. Следовательно, в табличной записи все элементы соответствующей строки матрицы умножаются на это число. Таким образом, элементарные преобразования системы линейных уравнений можно заменить соответствующими элементарными преобразованиями системы строк расширенной матрицы B.

Теорема 1. Пусть система (1) имеет расширенную ступенчатую матрицу B, ведущие элементы которой $\alpha_{1s}, \alpha_{2p}, ...\alpha_{rl}$, тогда если последний ведущий элемент α_{rl} удовлетворяет условиям:

1) l=n+1 -система будет несовместной,

2) (l=n)&(r=n) - система будет определённой,

3) (r<n)&(l≠n+1) - система будет неопределённой,

На этой теореме основан универсальный метод решения любой системы линейных уравнений, который называют методом Гаусса или методом последовательного исключения переменных.

Основные шаги алгоритма этого метода:

I. Записывается расширенная матрица B данной системы.

II. Затем матрица B с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду.

III. На основании теоремы определяется решение данной системы.

Пример 1. Решить систему с помощью метода Гаусса.

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

<u>Решение.</u> 1. Записываем матрицу B

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

2. Приводим ее к ступенчатому виду

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

3. Записываем ступенчатую систему на основе полученной ступенчатой матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad -x_3 + 5x_4 - x_5 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -6 \end{cases}$$

Последнее уравнение системы противоречиво, следовательно, система не имеет решений.

b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

<u>Решение.</u>

Записываем соответствующую данной системе матрицу B и приводим её к ступенчатому виду.

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -9 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

По полученной матрице запишем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

В этом случае система имеет единственное решение (0, 2, 1,0) (проверьте!)

в) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

<u>Решение.</u>

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -22 \\ 0 & 7 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \div 11 \\ \div 3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Система имеет множество решений. В этом случае поступают следующим образом: по числу оставшихся уравнений выбирают главные переменные. Пусть это будут x_1 x_2 x_3 . Остальные будут свободными, то есть x_4 . Выразим главные переменные через свободные (поднимаясь по системе снизу вверх):

$$* \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 + 2 \cdot 0 - 3(2 - x_4) - x_4 = -4 + 2x_4 \\ x_2 = -2 + x_3 + x_4 = -2 + 2 - x_4 + x_4 = 0 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

Возьмём для свободного переменного произвольное числовое значение, тогда, снова поднимаясь по системе * снизу вверх, получим однозначно определенные значения для главных переменных. Пусть x_4=1.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = -4 + 2 \cdot 1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 - 1 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Так как свободным переменным мы можем давать любые числовые значения, то будем получать бесконечное множество решений системы.

Замечание 1. Теорему (1) можно сформулировать в терминах ранга матриц. Действительно, пусть rang A=r_1 , rangB= r_2, где A -матрица системы (1), B - расширенная матрица системы (1)

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{\alpha_{s1} \quad \alpha_{s2} \quad \dots \quad \alpha_{sn}}_{A} & & & & \beta_s \end{array}\right)$$

Теорема 1. (Теорема Кронекера-Капелли).

Система: $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + ..\alpha_{in}x_n = \beta_i$ где i=1, 2, ..., k будет:

1) совместной, если rang A = rang B;
2) совместной и неопределённой, если rang A = rang B < n;
3) несовместной, если rang A ≠ rang B.

Пример 2. Выяснить, совместна ли система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

Составляем расширенную матрицу B и одновременно находим ранги матриц A и B**.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ Rang A=2, Rang B=3}$$

Значит, система не имеет решений

Понятие обратимой матрицы лежит в основе матричного метода решения систем линейных уравнений.

В отличие от универсального (общего) метода Гаусса, этот метод имеет существенные ограничения, так как его можно применять лишь для решения систем вида:

$$1)\ \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases}$$

матрица A = $\|\alpha_{ik}\|$которых должна быть обратима. Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения (2) A·X=B, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Так как A - обратима, то найдя матрицу A^{-1}, из уравнения (2) можно выразить матрицу X= A^{-1} B.

Замечание. Здесь важно соблюдать порядок умножения матриц (слева или справа), так как умножение матриц некоммутативно.

Пример 3. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 6 \\ \qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда система в матричной форме будет иметь вид: (*)A·X=B

Так как rang A=3 и ее порядок 3x3, то $\exists\ A^{-1}$: A^{-1} A=A A^{-1} = E. Если равенство (*) домножить слева на A^{-1}, то получим:
$A^{-1}AX = A^{-1}B$ => X= A^{-1} B

Чтобы теперь найти X, нужно вычислить A^{-1} и найти произведение $A^{-1}B$.

(A|E)=

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

Проверка:

$$\begin{cases} 4 + (-2) - 1 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Понятие определителя n-го порядка позволило разработать ещё один локальный метод решения систем линейных уравнений. Если дана система (n) уравнений с n переменными

$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$ где i=1, 2, ...,n

и определитель матрицы этой системы отличен от нуля, то есть $|A| \neq 0$, то решение этой системы можно вычислить по формулам Крамера: $X_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ i = 1, 2,…, n, где |A| - определитель матрицы A данной системы, а определители $|A_i|$ получаются из определителя |A| путём последовательной замены i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 4. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Вычисляем определитель матрицы A этой системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12-2+0-0-8+3=5$$

Заменив в этом определителе первый столбец столбцом свободных членов, получим определитель $|A_1|$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+0+0+8+1+0=13$$

Заменив в определителе $|A|$ второй столбец столбцом свободных членов, получим определитель

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 34$$

Аналогично находим и вычисляем определитель•

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Тогда $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{13}{5}$; $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{34}{5}$; $x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{2}{5}$

Проверка: $\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{13}{5} - \dfrac{34}{5} = 1 \\ -2 \cdot \dfrac{13}{5} + \dfrac{34}{5} + \dfrac{2}{5} = 2 \\ 2 \cdot \dfrac{13}{5} - \dfrac{34}{5} + 4 \cdot \dfrac{2}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

С системой (1) $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$ где i=1, 2, ..., k всегда можно связать систему (2) $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n = 0$, которая называется системой линейных однородных уравнений. Эта система всегда совместна, так как вектор Θ = (0, 0,..., 0) является её решением, кроме этого, для этой системы всегда rang A=rang B, т.к. столбец свободных членов равен нулю. Поэтому, если rang A<n, то система (2) будет иметь множество решений, обозначим его через M.

Теорема 2. $\langle M,+ \{\omega\lambda|\ \lambda\in R.\}\rangle$ - является линейным пространством.

Доказательство:

В данном случае не нужно проверять все аксиомы линейного пространства, т.к. решением системы (элементами множества М*)* являются арифметические векторы, то достаточно доказать, что М является подпространством R^n .

Для этого нужно взять любые два решения системы (2) и показать, что их сумма будет решением системы (2), а так же произведение любого решения на действительное число снова будет решением системы (2). Действительно: пусть $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,)$ и $c = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n,)$ - решения системы (2). Найдём $b + c = (\beta_1+ \delta_1, \beta_2+ \delta_2,\ldots, \beta_n+\delta_n)$ и подставим в систему (2), получим: $\alpha_{i1}(\beta_1+ \delta_1) + \alpha_{i2}(\beta_2+ \delta_2) + \ldots+ \alpha_{in}(\beta_n+ \delta_n) = (\alpha_{i1}\beta_1 + \alpha_{i2}\beta_2 +\ldots+ \alpha_{in}\beta_n) + +(\alpha_{i1}\delta_1 + \alpha_{i2}\delta_2 +\ldots+ \alpha_{in}\delta_n)=0+0=0$

Аналогично, $\lambda b=(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\beta_n)$,

$\alpha_{i1}(\lambda\beta_1)+\alpha_{i2}(\lambda\beta_2)+\ldots+\alpha_{in}(\lambda\beta_n) = \lambda(\alpha_{i1}\beta_1+\alpha_{i2}\beta_2 +\ldots+\alpha_{in}\beta_n) = \lambda\bullet 0 = 0$

Итак, $\langle M,+ \{\omega\lambda|\ \lambda\in R.\}\rangle$ - линейное пространство.

Базу этого пространства называют фундаментальной системой решений (Ф.С.Р.).

Покажем на конкретном примере алгоритм её нахождения.

Пример 5. Найти Ф.С.Р. для системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение.

1 шаг. Методом Гаусса находим общее решение данной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Пусть X_3, X_4 – свободные переменные, X_1, X_2 – главные.

Тогда $\begin{cases} x_2 = 3x_3 - 3x_4 \\ x_1 = x_3 - x_4 - 3x_3 + 3x_4 = 2x_4 - 2x_3 \end{cases}$ - общее решение системы .

2 шаг. Записываем таблицу:

X_1	X_2	X_3	X_4
-2	3	1	0
2	-3	0	1

свободным переменным придаём значения (1,0) и (0,1) и вычисляем главные переменные.

Тогда два вектора C_1 = (-2,3,1,0), C_2=(2,-3, 0, 1) будут базой пространства М (Ф.С.Р.).

ГЛАВА 4. Комплексные числа.

Содержание темы.

Теорема о существовании поля комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, тригонометрическая форма записи, действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Основные умения и навыки, которыми должны овладеть студенты в процессе изучения этой темы:

- уметь изображать комплексные числа на координатной плоскости в виде точек и радиус-векторов и наоборот;
- уметь находить модуль и аргумент $\forall z \in C$, переходить от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и наоборот;
- уметь выполнять арифметические операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, понимать их геометрический смысл;
- использовать полученные знания при решении задач алгебры и геометрии.

Все теоретические положения и практические выводы этой темы вытекают из теоремы о существовании поля комплексных чисел.

Теорема 1: Существует единственное, с точностью до изоморфизма, поле С, в котором выполняются следующие условия:

1. Поле R является подполем поля С.

2. $i^2 = -1$

3. $\forall z \in C \ \exists x, y \in R: z = x + iy$

Запись комплексного числа z в виде x + iy называется его алгебраической формой, при этом (x) называют действительной частью комплексного числа, iy - мнимой частью, а (y) – коэффициентом мнимой части. Обозначение: Re z - действительная часть, Im z - мнимая часть комплексного числа.

Так как $(z = x + iy) \in (C = R \times R)$, то с геометрической точки зрения, любое комплексное число имеет две равноправные геометрические интерпретации (модели).

а) точка координатной плоскости A (x, y);

б) радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ с концом в точке с координатами (x, y)

Геометрический подход к понятию комплексного числа позволяет записывать его в так называемой тригонометрической форме.

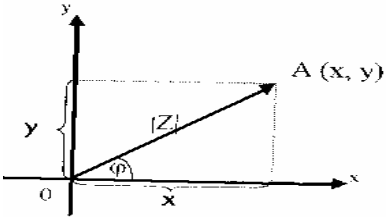
Для этого вводятся понятия модуля и аргумента комплексного числа.

Определение 1: Модулем комплексного числа z называется арифметическое значение корня квадратного из $x^2 + y^2$, то есть

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это понятие является обобщением понятия «абсолютная величина действительного числа», так как, если z = x + 0i, то $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

С геометрической точки зрения, модуль комплексного числа - это длина радиус-вектора OA или расстояние от начала координат до точки с координатами (x, y).



Определение 2: Аргументом комплексного числа z называют угол φ между положительным направлением оси $\overrightarrow{OX}$ и радиус - вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемым против часовой стрелки.

Из этого определения следует, что аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до числа, кратного 2π. Поэтому на практике, в качестве аргумента, обычно берут наименьший положительный или наименьший по абсолютной величине угол, который обозначают φ =arg z и находят из соотношений:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{array}{l} x = |z| \cdot \cos\varphi \\ y = |z| \cdot \sin\varphi, \end{array}$$

тогда x + iy = $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и мы получим тригонометрическую формулу записи комплексного числа.

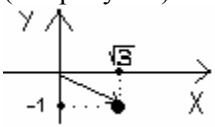
Во избежание ошибок при нахождении аргумента комплексного числа z его нужно предварительно изобразить на координатной плоскости.

Модуль и аргумент комплексного числа z являются известными из курса геометрии полярными координатами точки, соответствующей числу z. При этом полярной осью служит ось $\overrightarrow{OX}$

Понятие модуля и аргумента комплексного числа z позволяют записать это число в тригонометрической форме.

Пример 1. Комплексное число z = $\sqrt{3} - i$ записать в тригонометрической форме.

1. Изобразим данное комплексное число на координатной плоскости. Это будет радиус-вектор с концом в точке ($\sqrt{3}$, -1) (см. рисунок)



2. Найдем его модуль | z | = | $\sqrt{3} - i$ | = $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

3. Найдем аргумент из соотношений

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = -\pi/6 \text{ или } \varphi = 11\pi/6$$

Таким образом,

$$z=\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Существование двух форм записи одного и того же комплексного числа $z = x + iy = |z|\ (\cos\varphi + \sin\varphi)$ позволяет выполнять алгебраические операции на множестве C в той форме, которая наиболее удобна в каждом конкретном случае.

Теорема 2. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

1. $z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$
2. $z_1-z_2 = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$
3. $z_1\cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2+y_2y_1)}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}},\ z_2\neq 0$
5. $z_1^{\,n}=(x_1+iy_1)^n=x_1^n+\dfrac{nx_1^{\,n-1}\cdot(iy)^1}{1!}+\dfrac{n(n-1)x_1^{\,n-2}\cdot(iy)^2}{2!}+\ldots+(iy)^n$

На практике обычно формулы 3), 4) не запоминают, а руководствуются такими мнемоническими правилами:

а) чтобы перемножить два комплексных числа, нужно перемножить их как два двучлена;

б) чтобы разделить z_1 на $z_2 \neq 0$, нужно числитель и знаменатель домножить на комплексное число, сопряженное знаменателю и выполнить указанные действия ($z = x - iy$ называют сопряженным по отношению к $z = x + iy$).

Извлечение $\sqrt[n]{z}$ в алгебраической форме практически не используется.

Пример 2. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 1 + 3i$

$z_1 + z_2 = -1 + 8i$

$z_1 - z_2 = -3 + 2i$

$z_1 \bullet z_2 = (-2 + 5i)(1 + 3i) = (-2 - 6i + 5i + 15i^2) = -17 - i$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(-2+5i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}=\frac{-2+6i+5i-15i^2}{10}=\frac{13+11i}{10}=\frac{13}{10}+\frac{11i}{10}=1{,}3+1{,}1i$$

$$z_2^4=(1+3i)^4=1^4+4\cdot1^3\cdot(3i)+6\cdot1^2(3i)^2+4\cdot1(3i)^3+(3i)^4=$$
$$=1+12i-54-108i+81=28-96i$$

Теорема 3. Если $z_1=|z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2=|z_2|(\cos\psi+i\sin\psi)$, то

1) $z_1\bullet z_2= |z_1|\ |z_2|\ [\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)]$

2) $z_1^n = |z_1|^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)], z_2 \neq 0$

4) $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right]$ k = 0,1, 2,.., (n-l)

Операции сложения и вычитания в тригонометрической форме на практике не выполняются.

Пример 3.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\right] = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

$$z_1^5 = 2^5(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi) = 2^5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^4\sqrt{2} - i\cdot 2^4\sqrt{2} = 2^4\sqrt{2}(-1 - i)$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{6} + i\sin 5\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos 7\frac{\pi}{6} + i\sin 7\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

Операции над комплексными числами также могут быть осмыслены с геометрической точки зрения. Так, операциям

сложения и вычитания двух комплексных чисел соответствуют операции сложения и вычитания двух векторов по правилу параллелограмма.

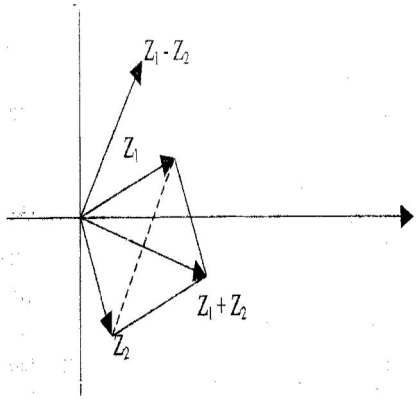


рис.1

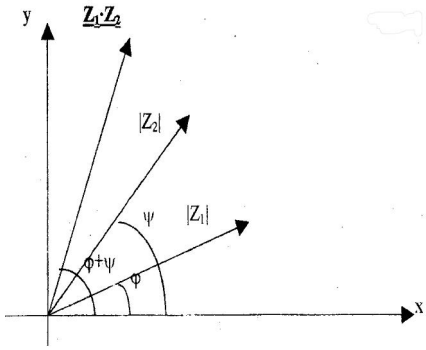


рис. 2

Пример 4. Пусть $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 - 3i$. Найти $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$ геометрически.

Изображаем каждое комплексное число в виде радиус-вектора, затем строим параллелограмм и находим вектор, соответствующий $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$ (см. рис.1)

Геометрический смысл произведения двух комплексных чисел можно выяснить, если перемножить эти числа в тригонометрической форме. Пусть $Z_1 = |Z_1|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = |Z_2| (\cos\psi + i \sin\psi)$, $Z_2 \neq 0$, тогда

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2| [\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi+ \psi)]$

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, аргументы складываются. Следовательно, чтобы умножить комплексное число z_1 на z_2 нужно длину вектора z_1 изменить в $|z_2|$ раза (растянуть или сжать), а затем полученный вектор повернуть вокруг начала координат на угол $\arg z_2$ (см. рис. 2).

Геометрический смысл операции $\sqrt[n]{z}$ состоит в делении окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ на n равных частей.

Пример 5. Вычислить $\sqrt[4]{-4}$ и изобразить все его значения геометрически.

Представим комплексное число z = - 4 в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент. $|-4|=4\arg(-4)=\pi$, $-4 = 4 (\cos\pi + i \sin\pi)$

Тогда $$\sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}[\cos(\frac{\pi + 2\pi k}{4}) + \sin(\frac{\pi + 2\pi k}{4})]$$

k = 0,1,2,3

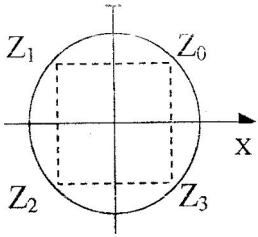
Придавая параметру (k) значения 0, 1,2, 3, получим четыре значения корня четвертой степени из -4.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$$

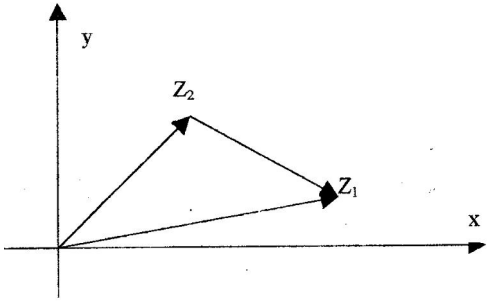
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos 7\frac{\pi}{4} + i\sin 7\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i$$



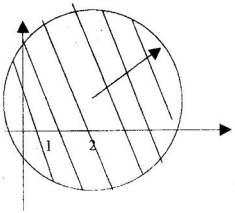
Изобразим найденные корни на комплексной плоскости, они делят окружность радиуса $\sqrt{2}$ на четыре равные части. Кроме этого, мы вписали в эту окружность правильный четырехугольник (квадрат).

Часто при решении задач используется геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел, как расстояния между двумя точками на плоскости. $|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2)$



Задача 1. Найти геометрическое место точек, для которых $|z - (2 + i)| < 3$

Геометрический смысл этого неравенства состоит в том, что расстояние от точки (2, 1) до точек (x, y) не должно быть больше трех единиц.



Это значит, что искомым геометрическим местом точек является открытый круг (точки окружности ему не принадлежат) с центром в точке (2, 1) и радиусом $r = 3$

Этот ответ на вопрос задачи можно было получить и алгебраически, используя определение модуля

$|(x + iy) - (2 + i)| < 3 \quad \Rightarrow \quad |(x- 2) + i(y -1)| < 3 \quad \Rightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < 3 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 < 9$

Из курса геометрии известно, что равенство $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$ есть уравнение окружности с центром в точке (2, 1) и $r = 3$, тогда искомым г.м.т. будет внутренняя часть этого круга.

ГЛАВА 5. Теория делимости в кольце Z.

Основные знания, умения и навыки, которыми должны овладеть студенты в процессе изучения этой темы:

- знать определения отношений делимости без остатка и с остатком и их свойства;
- знать определения НОК, НОД, их связь, свойства и методы нахождения;
- знать алгоритм Евклида и уметь использовать его для нахождения НОД двух целых чисел;
- знать и уметь находить каноническое разложение натурального числа на простые множители.

§1. Отношение делимости в Z и его свойства.

Определение 1. Целое число (a) делится на целое число ($b \neq 0$), если $\exists\, q \in Z : a=bq$

Обозначается: a/b и читается "a делится на b", или "b делит a".

a – делимое,

b – делитель,

q – частное.

Это отношение есть частичная бинарная операция на Z, т.к. $\overline{\forall (a,b)\ \exists q : q = bq}$. Например, 4 не делится на 3. С другой стороны, это отношение будет трехместным предикатом на множестве Z.

Свойства:

1. Отношение делимости рефлексивно. Действительно: $\forall\, a \in Z$ a/a, т.к. $\exists\, 1 \in Z : a = a \cdot 1$

2. Отношение делимости транзитивно. Действительно:

$\forall\, a, b, c \in Z$ (a/b & b/c) => (a/c), т.к. из того что (a/b) $\Rightarrow$

$\exists\, q_1 \in Z : a=bq_1$, а из того что (b/c) $\Rightarrow \exists\, q_2 \in Z : b=cq_2$, тогда

$a = cq_2q_1 = cq_3$ => (a/c)

3. Отношение делимости антисимметрично, т.к. $\forall\, a, b \in Z$ из того что (a/b & b/a) => [(a = b) v (a = -b)]

Следовательно, отношение делимости не является отношением эквивалентности, а будет отношением частичного порядка на множестве Z.

Определение 2. Целое число (a) делится на ($b \in Z$ & $b \neq 0$) с остатком, если $\exists$ q, r $\in$ Z : a = bq + r, где 0 < r < |b| a – делимое.
b – делитель, q - неполное частное, r — остаток.

Замечание 1. Из определения следует, что остаток всегда число неотрицательное.

Пример 1. Разделить - 49 на 17. Получим: - 49 = 17 • (-3)+2

Теорема 1. В кольце Z любое целое число (a) можно разделить на целое число ($b \neq 0$) с остатком, единственным образом.

1. Покажем возможность деления.

Пусть bq - наибольшее кратное числа b, которое не превосходит (a), тогда $bq \leq a \leq b(q+l) \Rightarrow 0 \leq a-bq \leq b$ положим, что a-bq = r, тогда получим, что a = bq + r, где 0< r <|b|.

2. Докажем единственность такого представления. Предположим противное,

Пусть $a=bq_1+r_1$, $0<r_1<|b|$ и $a= bq_2+r_2$ $0< r_2 <|b|$ =>
=> $b(q_1 -q_2) = (r_1-r_2)$ => $(r_2-r_1)/b$, а т.к. $|r_2-r_1|<|b|$ =>
=> $(r_2-r_1) = 0$ => $(r_2 = r_1)$

Т.к. $b \neq 0$ то из равенства $b(q_1-q_2) = 0 \Rightarrow (q_1-q_2) = 0 \Rightarrow (q_1 = q_2)$.

§2.НОД(a, b), НОК(a, b). Алгоритм Евклида.

Определение 1. Целое число $d \in Z$, ($d \neq 0$) называется общим делителем чисел $a_1,a_2,..a_k$, если каждое a_i(i=1,2,..., к) делится на d.

Определение 2. Целое число $d \in Z$, ($d \neq 0$) называется наибольшим общим делителем чисел $a_1,a_2,... ,a_к$ если:

1 d - общий делитель всех a_i

2. d - делится на любой другой общий делитель этих чисел

Обозначение: НО Д (a_1 ,a_2,. . a_k)= d или (a_1 ,a_2,…,a_k) = d

Пример 1. Даны числа: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 48

Числа 2 и 4 являются общими делителями этих чисел Число 4 является наибольшим общим делителем данных чисел, т е НОД (4, 8, 12, 16, 20, 24, 48) = 4

Задача 1. Доказать, что d = (a, b) определяется однозначно с точностью до знака.

Доказательство.

Пусть $d_1 = (a, b)$ & $d_2 = (a, b) \Rightarrow (d_1 / d_2)\&(d_2 / d_1) \Rightarrow [(d_1 = d_2) \vee (d_1 = -d_2)]$.

Замечание 1. Обычно берется положительное значение d = (a,b).

Существует метод, который позволяет доказать существование НОД (a, b) и находить его для любой пары целых чисел, его называют алгоритмом Евклида. Он основан на двух леммах:

Лемма 1. Если (a /b), то (a,b)=b.

Лемма 2. Если $a = bq + r$, где $a, b, r \neq 0$, то $(a, b) = (b, r)$.

Алгоритм Евклида.

1 Шаг. Делим a на ($b \neq 0$), если a /b, то (a, b) = b по лемме 1, если $a = bq_0 + r_1$, то $(a, b)=(b, r_1)$

2 Шаг. Делим b на r_1 если $(b / r_1) \Rightarrow (b, r_1) = r_1$, если $b = r_1q_1+r_2$, то $(b, r_1) = (r_1, r_2)$.

3 Шаг. Делим r_1 на r_2 и т. д.

Поскольку остатки, получаемые в процессе деления, убывают и являются натуральными числами, то на каком-то шаге получим остаток, равный нулю, т.е. $r_{n-1} = r_nq_n$ и тогда $(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Задача 2. Доказать, что последний неравный нулю остаток в алгоритме Евклида является наибольшим общим делителем чисел (a) и (b).

<u>Решение</u>: Применим к числам (a) и (b) алгоритм Евклида:

$a = bq_o+r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$

$b = r_1q_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$

. . . . . .

$r_{n-2}=r_{n-1} \bullet q_{n-1} + r_n \qquad 0 \leq r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_nq_n + 0$

Из первого равенства по лемме 2 будем иметь:

$$(a, b) = (b, r_1)$$

Из второго равенства алгоритма Евклида тоже по лемме 2 будем иметь $(b, r_1) = (r_1\ r_2)$ и т. д.

Из последнего равенства $(r_{n-1}, r_n) = r_n$ по лемме 1. Т.е. получили цепочку равенств $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots$ $=(r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$

Итак, $(a, b)=r_n$.

Пример 2. Найти d = (3220,1550) с помощью алгоритма Евклида

Решение:

$$
\begin{array}{r|l}
-3220 & 1550 \\ \cline{2-2}
3100 & 2 \\ \cline{1-1}
-1550 & 120 = r_1 \\ \cline{2-2}
120 & 12 \\ \cline{1-1}
-350 & \\
240 & \\ \cline{1-1}
-120 & 10 = r_2 \\ \cline{2-2}
10 & 12 \\ \cline{1-1}
20 & \\
-20 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Итак, $(3220, 1550) = 10 = r_2$

Задача 3. Доказать, что если d=(a,b), то $\exists x, y \in Z$: $d = ax + by$.

Решение:

Применим к числам a и b алгоритм Евклида:

$a = bq_0 + r_1$

$b = r_1 q_1 + r_2$

$r_i = r_2q_2 + r_3$

.....

$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-2} + r_{n-1}$

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + d, \quad (d = r_n)$

Тогда, последовательно выражая, из последнего равенства, $d = r_{n-2} - r_{n-1} q_n$ (*) из предпоследнего $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-2}$ и т.д.

Из первого $r_1 = a-bq_o$ и последовательно подставляя их в равенство (*) получаем: $d = ax + by$.

§3. Взаимно простые числа и их свойства.

Определение1. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются взаимно-простыми, если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$

Определение 2. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются попарно взаимно-простыми, если $\forall i,s$ $(i, s = 1, 2, .., к, i \neq s, (a_i, a_s) = 1)$.

Если числа удовлетворяют определению 2, то они удовлетворяют и определению 1. Обратное утверждение в общем случае неверно, например: (15, 21, 19)= 1, но (15, 21) = 3

Теорема (критерий взаимной простоты)

$(a, b) = 1 \Leftrightarrow \exists\, x, y \in Z: ax + by = 1$

Доказательство:

Докажем необходимость. Пусть (a, b) = 1. Выше мы показали, что если d=(a,b), то $\exists\, x, y \in Z : d = ax + by$.

Т.к. в этом случае d =1, то будут $\exists\, x, y \in Z$ (определяемые из алгоритма Евклида): $1 = ax + by$.

Достаточность. Пусть (*) $ax + by = 1$, докажем, что (a, b)=1. Предположим, что (a, b) = d, тогда в левой части равенства (*)
(a /d) & $(b /d) \Rightarrow (ax + by) /d \Rightarrow (1/d) \Rightarrow (d=l) \Rightarrow (a, b) = 1$.

§4. НОК целых чисел и его свойства.

Определение 1. Общим кратным конечного множества целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, отличных от нуля, называют целое число m, которое делится на все числа a_i (i=l, 2,…, к)

Определение 2. Целое число (m) называется наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, отличных от нуля, если:

1 m - является их общим кратным;

2 (m) делит любое другое общее кратное этих чисел.

Обозначение: $m = НОК (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $m = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$

Пример. Даны числа: 2, 3, 4, 6, 12.

Числа 12, 24. 48. 96 являются общими кратными чисел 2, 3, 4, 6, 12 Наименьшим общим кратным будет число 12. т.е.
[2, 3, 4, 6, 12] = 12

НОК определяется однозначно с точностью до порядка следования сомножителей. Действительно, если предположить,

что $m_1 = [a, b]$ &$m_2 = [a, b] \Rightarrow (m_1 / m_2)$ & (m_2 / m_1) => $[(m_1 = m_2) \vee (m_1 = - m_2)]$. Между наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем двух целых чисел существует зависимость, которая выражается формулой: $[a, b] = ab/(a, b)$ (выведите ее самостоятельно)

Эта связь позволяет утверждать, что для любой пары целых чисел, отличных от нуля, существует их наименьшее общее кратное. Действительно, (a, b) – всегда можно однозначно вывести из алгоритма Евклида и по определению $(a, b) \neq 0$, тогда дробь $a \cdot b/(a, b) \neq 0$ и будет определена однозначно.

Наиболее просто НОК двух целых чисел вычисляется в том случае, когда (a,b)= 1, тогда $[a, b] = a \cdot b/1 = a \bullet b$

Например, $[21, 5] = 21 \cdot 5/1 = 105$, т. к. $(21, 5) = 1$.

§5. Простые числа и их свойства.

Определение 1. Натуральное число (p) называется простым, если $p > 1$ и не имеет положит. делителей, отличных от 1 и p.

Определение 2. Натуральное число $a > 1$, имеющее кроме 1 и самого себя другие положительные делители, называется составным.

Из этих определений следует, что множество натуральных чисел можно разбить на три класса:

а) составные числа;

б) простые числа;

в) единица.

Если a - составное, то $a = nq$, где $1<n<a$, $l<q<a$.

Задача 1. Доказать, что если $a \in Z$ и p - простое число, то $(a, p) = 1 \vee (a / p)$

Доказательство.

Пусть $d = (a, p) \Rightarrow (a /d)$ & (p /d), т.к. p - простое число, то оно имеет два делителя 1 и p. Если $(a, p) = 1$, то a и p взаимно просты, если $(a, p) = p$, то (a/p).

Задача 2. Если произведение нескольких сомножителей делится на p, то по крайней мере один из сомножителей делится на p.

Решение.

Пусть произведение $(a_1,a_2,...,a_k)/p$, если все a_i не будут делиться на p, тогда и произведение будет взаимно просто с p, следовательно, какой-то сомножитель делится на p.

Задача 3. Доказать, что наименьший отличный от 1 делитель целого числа a>1, есть число простое.

Доказательство.

Пусть $a \in Z$ и a - составное число (если a = p, то утверждение доказано), тогда $a = a_1q$.

Пусть q - наименьший делитель, покажем, что он будет простым числом. Если предположить, что q - составное число, тогда $q = q_1k$ и $a = a_1 \bullet q_1k$, т.к. $q_1<q$, то q - уже не будет наименьшим делителем, что противоречит условию задачи. Следовательно, q - простое число.

Задача 4. Доказать, что наименьший простой делитель (p) натурального числа (n) не превосходит $\sqrt{n}$.

Доказательство.

Пусть $n = pn_1$, причем $p < n_1$ и p - простое. Тогда $n \geq p^2 \Rightarrow p<\sqrt{n}$.

Из этого утверждения следует, что если натуральное число (n) не делится ни на одно простое число $p \leq \sqrt{n}$, то n – простое, в противном случае оно будет составным.

Пример 1. Выяснить, будет ли число 137 простым? $11 <\sqrt{137} <12$.

Выписываем простые делители, не превосходящие $\sqrt{137}$: 2, 3, 5, 7, 11. Проверяем, что 137 не делится на 2, на 3, на 5, на 7, на 11. Следовательно, число 137 – простое.

Теорема Евклида. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство.

Предположим противное, пусть $p_1,p_2,...,p_k$ все простые числа, где $p_1 = 2$, а p_k – самое большое простое число.

Составим натуральное число $\omega = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_к +1$, т.к. $\omega > p_i$, то оно должно быть составным, тогда его наименьший делитель будет простым (см. задачу 3). Однако ω не делится ни на p_1 , ни на p_2 ,…, ни на p_k , т.к. 1 не делится на любое p_I.

Следовательно, наше предположение о конечности множества простых чисел было неверно.

Однако существует теорема, которая утверждает, что простые числа составляют лишь небольшую часть чисел натурального ряда.

Теорема об интервалах. В натуральном ряду существует сколь угодно длинные интервалы, не содержащие ни одного простого числа.

Доказательство.

Возьмём произвольное натуральное число (n) и составим последовательность натуральных чисел (n+1)!+2, n+1)!+3,…,(n+1)!+(n+1).

В этой последовательности каждое последующее число на 1 больше предыдущего, все эти числа составные, т.к. каждое имеет более двух делителей (например, первое число делится на 1, на 2 и само на себя). При $n \to \infty$ мы получим сколь угодно длинный интервал, состоящий только из составных чисел.

Теорема Евклида и теорема об интервалах свидетельствуют о сложном характере распределения простых чисел в натуральном ряду.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число $n>1$ может быть представлено единственным образом в виде произведения простых чисел, с точностью до порядка следования сомножителей.

Доказательство.

Докажем возможность представления:

Пусть $n \in N$ и $n>1$, если n – простое число, то $n = p$ и теорема доказана. Если n – составное, то наименьший его делитель будет числом простым и $n = p_1 n_1$, где $n_1<n$.

Далее рассуждаем аналогично. Если n_1 простое число, то теорема доказана, если n_1 составное число, то $n_1 = p_2 n_2$, где $n_2 < n_1$ и тогда $n = p_1 p_2 n_2$. На каком-то шаге получим $n = p_1 p_2 \ldots p_n$, где все p_i - простые числа.

Докажем единственность разложения:

Предположим, что для числа (n) есть два различных представления: $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, $n = q_1 q_2 \ldots q_n$ и $n>k$.

Тогда получим, что $p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_n$ (1). Левая часть равенства (1) делится на p_1, тогда по свойству простых чисел (см. задача 2), по крайней мере, один из сомножителей правой части должен делиться на p_1.

Пусть $(q_1/p_1) \Rightarrow (q_1=p_1)$. Разделив обе части равенства (1) на p_1, получим равенство $p_2p_3 \ldots p_k = q_2q_3 \ldots q_n$. Повторяя прежнее рассуждение ещё (k-1) раз, мы получим равенство $1 = q_{k+1}q_{k+2} \ldots q_n$, т.к. все $q_i > 1$, то это равенство невозможно. Следовательно, в обеих разложениях число сомножителей одинаково (k=n) и сами сомножители одинаковы.

Замечание. В разложении числа (n) на простые сомножители некоторые из них могут повторяться. Обозначая буквами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ кратность их вхождения в (n), получим так называемое каноническое разложение числа (n): $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

Пример 2.

Каноническое разложение числа $588000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

Следствие 1. Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, тогда все делители числа (n) имеют вид: $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Пример 3. Все делители числа $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ получим, если в выражении $d = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$ вместо α_1, α_2, α_3, независимо друг от друга, будем подставлять значения: α_1=0, 1, 2, 3, 4, α_2=0, 1, 2, α_3 = 0, 1.

Искомые делители будут равны: 1; 2; 4; 8; 16; 3; 6; 12; 24; 48; 9; 18; 36; 72; 144; 5; 10; 20; 40; 80; 15; 30; 60; 120; 240; 45; 90; 180; 360; 720.

Следствие 2. Если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, то $(a, b) = p_1^{\lambda 1} p_2^{\lambda 2} \ldots p_k^{\lambda k}$, где $\lambda i = \min(\alpha_I, \beta_i)$
$[a, b] = p_1^{\delta 1} p_2^{\delta 2} \ldots p_k^{\delta k}$, где $\delta i = \max(\alpha_I, \beta_i)$.

Пример 4. Найти НОД(a, b) и НОК(a, b), используя каноническое разложение, если
a = 24, b = 42.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$(24, 42) = 2\cdot 3 = 6$
$[24, 42] = 2^3\cdot 3\cdot 7 = 168$

ГЛАВА 6. Теория делимости в кольце P[x].

В процессе изучения этой темы студенты должны овладеть следующими знаниями, умениями, навыками:
- знать определение многочлена f(x) нал полем P;
- уметь строить кольцо многочленов <P[x], +, •> и линейное пространство < P[x], + {ωλ, λ ∈ R} >, знать его базис, размерность и их свойства;
- знать отношение делимости в кольце P[x];
- знать и уметь находить НОК(f, g) и НОД (f, g) различными способами;
- знать методы нахождения корней многочлена в поле R, C и Q;
- уметь разложить многочлен на неприводимые множители над полем R, C и Q;
- знать формулы Виета, «схему Горнера», уметь их использовать в процессе решения разного типа задач.

§1. Построение кольца P[x].

Пусть дано произвольное поле P, его элементы будем обозначать $a_1, a_2, ..., a_n...$

Определение 1. Многочленом n - й степени от одной переменной называют выражение вида: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x+a_0$, где $a_i \in P$, $a_n \neq 0$, $n \in N^0 = N \cup \{0\}$.

Замечание. a_ix^i - называют членом многочлена; i - степенью этого члена (если $a_i \neq 0$); a_i - коэффициентом многочлена и соответствующего члена. Если $a_i = 0$, то члену a_ix^i не приписывается никакой степени, a_0x^0 - член нулевой степени, если $a_0 \neq 0$ - элемент поля P.

Для краткой записи многочленов используют знаки f(x), g(x), h(x) и т.п.

Определение 2. Многочлен $f(x)= 0x^n + 0x^{n-1} +...+ 0x + 0$ называют нуль-многочленом. Его степень также не определяется.

Определение 3. Степенью многочлена f(x) называют наивысшую из степеней его членов.

Например, $f(x)=x^3 + 3x^7 + 4x^2 + 2$, ст f (x) = 7.

Из определений (1-3) следует, что всё множество многочленов $P[x] = \{f(x)| f(x) = a_nx^n+...+ ax + a_0\}$ можно разбить на три класса:

1. нуль-многочлен $f(x)=0x^n+... +0x+0$;
2. многочлены нулевой степени ($a_i \in P$);
3. многочлены степени выше нулевой f(x), g(x)...

Если даны два многочлена f(x) и g(x), то всегда можно считать, что они содержат одинаковое число членов, т.к. недостающие члены всегда можно приписать с нулевыми коэффициентами, например:

$f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

$g(x) = 0x^5 - 0x^4 + 3x^3 + x^2 - 0x + 5$

Понятие степени позволяет задать отношение порядка на множестве многочленов P[x]:

а) либо в порядке возрастания степени их членов, например:

$f(x) = 3+4x^2-5x^4 + x^6$;

б) либо в порядке убывания степени их членов, например:

$f(x) = 3x^5-x^3 + 2x^2 + 8$;

Всё вышесказанное позволяет определить понятие алгебраического равенства двух многочленов.

Определение 4. $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, если

$f(x) = a_nx^n+a_{n-1} x^{n-1}+...+ a_1x+ a_0$ и

$g(x) = b_nx^n+b_{n-1} x^{n-1}+\ldots+b_1+b_0$, то

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (a_n = b_n) \& (a_{n-1} = b_{n-1})\& ... \& (a_0 = b_0)$

Это отношение будет:

а) рефлексивно, т.к. $\forall f(x)$, $f(x)= f(x)$;

б) симметрично, т.к. $\forall f(x), g(x)$, если $(f(x)= g(x)) \Rightarrow (g(x)= f(x))$;

в) транзитивно, т.к. $\forall f(x), g(x), h(x)$, если $[f(x)=g(x)]\&[g(x)=h(x)] \Rightarrow [f(x) = h(x)]$. (Проверьте!)

Таким образом, отношение равенства многочленов есть отношение эквивалентности на множестве P[x], в каждый класс эквивалентности попадает только один многочлен.

Замечание. Выше мы определили понятие многочлена как некоторое формальное выражение, однако понятие многочлена можно определить и с других точек зрения. Например, многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ можно рассматривать как арифметический вектор $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0...0)$, т.к. коэффициенты многочлена определяют его однозначно. Так, по вектору (3, 5, 1) можно составить многочлен $f(x) = x^2 + 5x + 3$.

С другой стороны, многочлен f(x) можно рассматривать как некоторую функцию, определённую на множестве P. Поэтому отношение равенства двух многочленов каждый раз определяется по-новому (как равенство двух арифметических векторов и как равенство двух функций).

Определим на множестве P[x] три операции:

1. $\forall f, g \in P[x], f + g = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_0 + b_0)$
2. $\forall f \in P[x], \forall \lambda \in P, \lambda f = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$
3. $\forall f, g \in P[x], f \cdot g = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \ldots + (a_0 b_i + ... + a_i b_{i-1} + a_i b_0)x^i + + ... + a_n b_m x^{n+m}$

Замечание. Из этих определений следует, что действия сложения и умножения - это бинарные операции, действие умножения на скаляр при фиксированном λ, будет унарной операцией.

Пример 1. Пусть $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4$, $g(x) = 2x^4 + x^2 + 1$, тогда

$f(x) + g(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$

$f(x) \bullet g(x) = (3x^5 + 2x^3 + 4)(2x^4 + x^2 + 1) = 6x^9 + 3x^7 + 3x^5 + 4x^7 + 2x^5 + 2x^3 + 8x^4 + 4x^2 + 4 = 6x^9 + 7x^7 + 5x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4$

$3 \bullet g(x) = 6x^4 + 3x^2 + 3$

Свойства степени многочлена вытекают из определения операций:

1. <u>свойство</u> Если $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$, то

$cm(f(x) + g(x)) \leq \max(cm\ f(x), cm\ g(x))$

2. <u>свойство</u> Если $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$,то $cm\ (f(x) \cdot g(x)) = cm\ f(x) + cm\ g(x)$

Действительно, это следует из определения операции умножения и того, что если cm $f(x) = n$, значит $a_n \neq 0$, если cm $g(x) = m$, значит $b_m \neq 0$, тогда $a_n \cdot b_m \neq 0$ т.к. $a_n, b_m \in P$, а в поле делителей нуля нет. Поэтому член $a_n \cdot b_m x^{m+n}$ многочлена $f(x) \cdot g(x)$ будет иметь наивысшую степень $(m+n)$.

Это свойство позволяет сделать вывод, о том, что множество многочленов не содержит делителей нуля.

Теорема 1. Алгебра $<P[x], +, \bullet>$ - является коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей.

<u>Доказательство.</u>

I. Нужно проверить, что множество P[x] - множество многочленов, замкнуто относительно указанных операций

II. Проверить выполнение следующих аксиом:

1. $\forall f, g \in P[x],\ f + g = g + f$
2. $\forall f, g, h \in P[x], (f + g) + h = f + (g + h)$
3. $\exists\, 0 \in P[x]: \forall f \in P[x], 0 + f = f + 0 = f$
4. $\forall f \in P[x]\ \exists (-f) \in P[x]: f + (-f) = (-f) + f = 0$
5. $\forall f, g, h \in P[x], (f + g)h = fh + gh, h(f + g) = hf + hg$
6. $\forall f, g \in P[x],\ f \cdot g = g \cdot f$
7. $\forall f, g, h \in P[x],\ (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
8. $\forall f \in P[x],\ 1 \cdot f = f$

Проверить каждую аксиому самостоятельно.

§2. Отношение делимости в кольце P[x] и его свойства.

Определение 1. Многочлен $f(x) \in P[x]$ делится на многочлен $g(x) \in P[x]$, $g(x) \neq 0$, если $\exists\, h(x) \in P[x]$: $f(x)=g(x) \cdot h(x)$, $f(x)$ - делимое, $g(x)$ -делитель, $h(x)$ - частное.

Задача 1. Выяснить, делится ли многочлен:

$f(x) = 3x^5 - 9x^4 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x$ на $g(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9}$

в кольце Q[x].

<u>Решение.</u>

Многочлен $f(x)$ будет делиться на $g(x)$, если $r(x) = 0$. Деление многочлена выполняется «углом», как деление многозначных чисел.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5 - 9x + \frac{13}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x & x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9} \\ \cline{2-2}
- \underline{-3x^5 - 8x^4 - \frac{1}{3}x^3} & 3x^3 - x^2 + 2x \\
\underline{x^4 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x} & \\
\underline{-x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{9}x} & \\
\underline{2x^3 - \frac{16}{3}x^2 - \frac{2}{9}x} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2x^3 - \frac{16}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \\
\underline{-2x^3 - \frac{16}{3}x^2 - \frac{2}{9}x}
\end{array}
$$

$0 = r(x)$.

Ответ: $f(x)=g(x) \cdot (3x^3 - x^2+2x)$

Задача 2. Найти, при каких значениях (a) и (b) многочлен f(x) делится на многочлен g(x), где $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$

<u>Решение.</u>

Делим f(x) на g(x)

$$
\begin{array}{l|l}
-\ 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b & 2x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 - 3x^3 + 2x^2} & x^2 + 3x + \frac{5}{2} \\
-\ 6x^3 - 4x^2 + ax + b & \\
\underline{6x^3 - 9x^2 + 6x} & \\
-\ 5x^2 + (a-b)x + b & \\
\underline{5x^2 - \frac{15}{2}x + 5} & \\
(a + \frac{3}{2})x + (b-5) = r(x) &
\end{array}
$$

Приравниваем остаток к нулю, получим: $(a + \frac{3}{2})x + (b - 5) =$

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{3}{2} = 0 \\ b - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 5 \end{cases}$$

Ответ: a = -3/2, b = 5

Свойства отношения делимости в кольце P[x].

Свойство 1. В кольце P[x] любой многочлен f(x) делится на $\lambda \neq 0$, $\lambda \in P$. Действительно:

$$f(x) = \lambda\left(\frac{a_n x^n}{\lambda} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{\lambda} + \ldots + \frac{a_1 x}{\lambda} + \frac{a_0}{\lambda}\right) = \lambda g(x) \Rightarrow f(x)/\lambda$$

Свойство 2. Если (f(x)/h(x))&(g(x)/h(x))=>(f(x) ± g(x))/h(x).

Доказательство.

Т.к. f(x) /h(x) => $\exists s(x) \in P[x]$: f(x)=h(x)·s(x) $\Big|\Rightarrow$

Т.к. g(x) /h(x) => $\exists u(x) \in P[x]$: g(x)=h(x)·u(x)

f(x) ± g(x)=h(x)[$\overbrace{s(x) + u(x)}^{m(x)}$]=h(x)·m(x)=>(f(x)±g(x))/h(x)

Свойство 3. Если (f(x) / g(x)) & (g(x) / f(x)) => f(x)=cg(x), где $c \in P$.

Доказательство.

Т.к. f(x) /g(x) => f(x)= g(x)·h(x), где h(x) $\in P[x]$ $\Big|\Rightarrow$

Т.к. g(x) /f(x) => g(x)=f(x)·s(x), где s(x) $\in P[x]$

f(x)=f(x)·$\overbrace{\overbrace{h(x) \cdot s(x)}^{u(x)}}$ => f(x) = f(x)·u(x) => cm u(x)=0 => u(x) = c, где $c \in P$, т.е. f (x)=g(x)c. Многочлены f(x) и g(x) называют ассоциированными.

Свойство 4. Если (f(x) / g(x)) & h(x) $\in$ P => (f(x)·h(x)) / g(x). Докажите это свойство самостоятельно.

§3. Деление с остатком в кольце P[x].

Определение 1. Многочлен f(x) $\in$ P[x] делится на многочлен g(x) $\neq$ 0 из этого же кольца с остатком, если $\exists$h(x) и r(x) из P[x]: f(x)= g(x) h(x)+r(x), где cm r(x) <cm g(x) $\vee$ r(x) = 0.

Теорема 1. Для любой пары многочленов f(x) и g(x) из кольца P[x], где $g(x) \neq 0$, $\exists!$ пара многочленов h(x) и r(x) из P[x]: $f(x)=g(x)\,h(x)+r(x)$, причём $cm\ r(x) < cm\ g(x) \vee r(x)=0$

Доказательство.

Докажем существование такой пары многочленов.

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

При этом возможны два случая:

1-й случай: f(x) = 0 или cm f(x) < cm g(x), тогда $f(x) = g(x) \bullet 0 + f(x)$ и искомые многочлены будут равны: $h(x) = 0$, $r(x) = f(x)$

2-й случай: cm f(x) ≥ cm g(x), и пусть cm f(x) = n, т.е. $a_n \neq 0$, cm g(x)=s, т.е. $b_s \neq 0$

Тогда, вычтем из многочлена f(x) многочлен $g(x) \cdot \frac{a_n}{b_s} x^{n-s}$

Получим: $f(x) - g(x) \cdot \frac{a_n}{b_s} x^{n-s} = f_1(x)$ (1)

cm $f_1(x)$ < cm f(x), т.к. в процессе вычитания член $a_n x^n$ будет уничтожен.

Если cm $f_1(x)$ > cm g(x), то опять повторим процедуру понижения степени

(2) $f_1(x) - g(x) \cdot \frac{a_{n-1}}{b_s} x^{(n-1)-s} = f_2(x)$, где cm $f_2(x)$ < cm $f_1(x)$

Если cm $f_2(x)$ ≥ cm g (x), то опять повторим процедуру понижения степени до тех пор пока не получим многочлен $f_k(x)$, степень которого будет меньше ст. g(x), т.е. равенство:

$$(*) f_k(x) = f_{k-1}(x) - g(x) \cdot \frac{a_{n-(k-1)}}{b_s} x^{n-(k-1)-s}$$

Складывая почленно равенства (1),(2).... ,(k), получим:

$$f_k(x) = f(x) - g(x) \underbrace{\left[\frac{a_n}{b_s} x^{n-s} + \frac{a_{n-1}}{b_s} x^{(n-1)-s} + \ldots + \frac{a_{n-(k-1)}}{b_s} x^{n-(k-1)-s} \right]}_{h(x)} \Rightarrow f_k(x) = f(x) - g(x) h(x)$$

Обозначим $f_k(x)$= r(x), т.к. его степень меньше cm g(x), тогда f(x)=g(x)h(x) + r(x) (**)

Докажем единственность такого представления:

Предположим противное, пусть

$$f(x)=g(x)\,h(x)+r(x),$$

где

$$cm\ r(x) < cm\ g(x) \vee r(x) = 0$$

и

$$f(x) = g(x)h_1(x)+r_1(x),$$

где

$$cm\ r_1(x) < cm\ g(x) \vee r_1(x)=0$$

Тогда, $g(x)\ [h(x) - h_1(x)]= r_1(x) - r\ (x)$, $cm\ g(x) + cm\ [h(x) - h_1(x)] = =cm\ (r_1(x) - r(x))$, т.е. $cm\ g(x) \le cm\ (r_1(x) - r(x))$, что противоречит определению отношения делимости многочленов с остатком. Следовательно, $(h_1(x) = h_2(x))\ \&\ (r_1(x) = r(x))$. Таким образом, отношение делимости в кольце P[x] обладает почти теми же свойствами, что и в кольце Z, однако есть и небольшие различия, например, кольцо P[x] более богато обратимыми элементами, чем кольцо Z.

Так, относительно операции умножения в кольце Z всего два обратимых элемента 1, -1, а в кольце P[x] это все многочлены нулевой степени, т.е. элементы поля P.

Понятия НОД(f, g) и НОК(f, g) определяются с точностью до постоянного множителя (c), а в кольце Z с точностью до знака.

Действительно, если даны два многочлена f(x) и g(x), а $d_1(x)$ и $d_2(x)$ их НОД, то $(d_1(x)\ /d_2(x))\ \&\ (d_2(x)\ /d_1(x)) \Rightarrow d_1(x) = cd_2(x)$ (см. св - во 3), т.е. НОК и НОД определяются с точностью до множителя из поля P. Так же как и в кольце Z на основе доказанной выше теоремы можно записать алгоритм Евклида: для $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, $g(x) \ne 0$ и доказать, что последний остаток $r_n(x) \ne 0$ в этом алгоритме будет НОД(f(x), g(x)), что одновременно доказывает и существование НОД(f, g) для $\forall\ f, g \in P[x]$.

Задача 1. В кольце $Z_5[x]$ найти НОД(f, g) и НОК[f, g], если $f(x) = x^2 + \bar{2}\,x + \bar{2}$, $g(x) = \bar{3}\,x^3 - \bar{1}$

<u>Решение.</u> Для нахождения НОД(f, g) используем алгоритм Евклида. Делим "углом"' g(x) на f(x)

$$\begin{array}{l|l} -\,\overline{3x}^3-\overline{1} & x^2+\overline{2}x+\overline{2} \\ \cline{2-2} \underline{\overline{3x}^3+x^2+x} & \overline{3}x-\overline{1} \\ -\,-x^2-x-\overline{1} & \\ \underline{-x^2-\overline{2}x-\overline{2}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\,x^2+\overline{2}x+\overline{2} & x+1=r_1(x) \\ \cline{2-2} \underline{x^2+x} & x+\overline{1} \\ -\,x+\overline{2} & \\ \underline{x+\overline{1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\,x+\overline{1} & \overline{1}=r_2(x) \\ \cline{2-2} \underline{x} & x+\overline{1} \\ \overline{1} & \\ \overline{1} & \\ 0=r_3(x) & \end{array}$$

Итак НОД(f, g) = $\overline{1}$

Для нахождения НОК[f, g] воспользуемся формулой

$$[f,g]=\frac{f\cdot g}{\overline{1}}=(x^2+\overline{2}x+\overline{2})\cdot(\overline{3}x^2-\overline{1})=\overline{3}x^5-x^2+x^4-\overline{2}x+x^3-\overline{2}=\overline{3}x^5+x^4+x^3-x^2-\overline{2}x-\overline{2}$$

итак, НОК[f, g] = $\overline{3}x^5+x^4+x^3-x^2-\overline{2}x-\overline{2}$

Замечание. В процессе выполнения алгоритма Евклида не только сами многочлены f(x) и g(x), но и получаемые остатки можно умножать на любые числа (не равные нулю), чтобы в частном получались только целые коэффициенты. При этом, конечно, частное искажается, остаток от деления остается с точностью до ассоциированности.

Однако, этого делать нельзя, когда решаем

Задачу 2. В кольце Q[x] с помощью алгоритма Евклида найти линейное представление НОД(f, g), если
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x - 2x + 12$
$g(x)= x^3 - 5x^2 - 3x + 17$

Решение.

Найти линейное представление - это значит найти многочлены u(x) и v(x): d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x). Делим f(x) на g(x):

$$\begin{array}{l|l} \_\, x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12 & x^3 - 5x^2 - 3x + 17 \\ \underline{x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 17x^2} \_\_\_\_\_ & \overline{x^2 + 1 = q(x)} \end{array}$$

$$\_\, x^3 - 5x^2 - 2x + 12$$

$$\underline{x^3 - 5x^2 - 3x + 17}$$

$$\begin{array}{l|l} \_\, x^3 - 5x^2 - 3x + 17 & x - 5 = r_1(x) \\ \underline{x^3 - 5x^2} \_\_\_\_\_ & \overline{x^2 - 3 = q_1(x)} \end{array}$$

$$\_ - 3x + 17$$

$$\underline{-3x + 15}$$

$$\begin{array}{l|l} \_\, x - 5 & 2 = r_1(x) \\ \underline{x \quad} & \overline{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = q_2(x)} \end{array}$$

$$-5$$

$$\underline{-5}$$

$$0$$

$0=r_3(x)$

Итак, НОД(f, g)=2

Теперь запишем процесс деления многочленов в виде равенств:

$f(x) = g(x)\bullet(x^2 + l) + (x - 5)$, $g(x) = (x - 5)\bullet(x^2 - 3) + 2$

Выразим из последнего равенства (f,g) = 2

$2 = g(x) - (x - 5)\bullet(x^2 - 3)$ (*)

Из первого равенства выразим остаток $r(x) = (x - 5)$, $x - 5 = f(x) - g(x)(x^2 - 1)$ и подставим в равенство (*).

Получим:

$2 = g(x) - [f(x) - g(x)(x^2 + 1)](x^2 - 3)$

$2 = g(x) - f(x)(x^2 + 3) + g(x)(x^2 + 1)(x^2 - 3)$

$2 = g(x)[l + (x^2 + 1)(x^2 - 3)] + f(x)(3 - x^2)$

$v(x) = l + (x^2+l)(x^2 -3) = 1+x^4 - 3x^2 + x^2 - 3=x^4 - 2x^2 - 2$

Ответ: $u(x)=3 - x^2$, $v(x)=x^4 - 2x^2 -2$

Замечание. В этой задаче использовались неполные частные, поэтому нельзя домножать многочлены на множители из поля Q.

Определение 2. Многочлены f(x) и g(x) называются взаимно простыми, если (f, g)=c, где $c \in P$.

Чтобы снять неоднозначность, вводится понятие нормированного многочлена.

Определение 3. Многочлен $f(x) \in P[x]$ называется нормированным, если коэффициент при его старшем члене равен 1.

Например, $f(x)=x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 2$. Тогда, если f(x) и g(x) нормированные и взаимно простые, то (f, g)=l.

Имеет место следующая теорема:

Критерий взаимной простоты: $(f, g) = l \Leftrightarrow \exists\, u, v \in P[x]$: $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

Доказательство.

Необходимость. Так как многочлены f и g взаимно просты, то всегда можно записать: fu + gv = l (смотри алгоритм Евклида).

Докажем достаточность. Пусть fu + gv = l, докажем, что (f, g) = l. Предположим противное, пусть многочлены f(x) и g(x) не являются взаимно простыми, т.е. $(f, g) = d \neq l$. Тогда (f/d) & (g/d) => (fu+gv)/d => (l/d) => cm d(x) = 0 => (d = l).

§4. Приводимые и неприводимые многочлены в кольце P[x].

Определение 1. Многочлен $f(x) \neq 0$ из P[x] называется приводимым над полем P, если его можно представить в виде произведения многочленов выше нулевой степени, т.е. $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, где cm g(x) < cm f(x) & cm $g(x) \neq 0$, cm h(x) < cm f(x) &cm $h(x) \neq 0$.

Определение 2. Многочлен $f(x) \in P[x]$ называется неприводимым над полем P, если:

1. cm f(x) > 0,
2. f(x) не разлагается в произведение многочленов меньшей степени.

Пример 1. Многочлен $f(x)=x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ приводим над полем C и неприводим над полем R и Q.

Многочлен $h(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ приводим над Q, R и C.

Замечание 1. Многочлены нулевой степени не входят в класс приводимых и неприводимых многочленов, а образуют свой класс, т.е. если множество натуральных чисел мы разбили на три класса:

1. единица;
2. простые числа;
3. составные числа,

то и множество P[x] разбивается на три класса:

1. многочлены нулевой степени ($a_i \in P$);
2. приводимые многочлены;
3. неприводимые многочлены.

Замечание 2. Приводимость многочленов зависит от поля P. (смотри прим. 1)

Также как в кольце Z, в кольце P[x] можно доказать аналог основной теоремы арифметики.

Теорема $\forall f(x) \neq 0$, $f(x) \in P[x]$, cm $f(x)>0$ разлагается в произведение неприводимых многочленов единственным способом, с точностью до порядка следования многочленов нулевой степени.

Доказать самостоятельно теорему и следствие из неё.

Следствие. Если $f(x) = c_1 p_1^{\alpha 1}(x)\, p_2^{\alpha 2}(x) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha k}(x)$,
$g(x) = c_2 p_1^{\beta 1}(x)\, p_2^{\beta 2}(x) \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta s}(x)$, то
$(f, g) = c p_1^{\gamma 1}(x)\, p_2^{\gamma 2}(x) \cdot \ldots \cdot p_m^{\gamma m}(x)$, где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$
$[f, g] = c_3 p_1^{\delta l}(x)\, p_2^{\delta 2}(x) \cdot \ldots \cdot p_n^{\delta n}(x)$, где $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$

Покажем, что задача о разложении многочлена на линейные множители (многочлены первой степени) сводится к задаче нахождения корней многочлена f(x) в поле P.

Пусть $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $\alpha \in P$. Подставим вместо x в f(x) α. Получим, $f(\alpha)=a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = c \in P$. Элемент (c) называют значением многочлена f(x) при $x = \alpha$ и записывают: $f(\alpha) = c$.

Определение 3. Элемент $\alpha \in P$ называют корнем многочлена f(x), если $f(\alpha)=0$.

Ответ на вопрос о существовании корней многочлена f(x) над полями C, R и Q даёт основная теорема алгебры.

Теорема 1. $\forall f(x) \in C[x]$, ст $f(x) > 1$ имеет хотя бы один корень.

Опираясь на эту теорему и определение понятия корня многочлена, можно доказать теорему 2.

Теорема 2. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x)/(x - \alpha)$.

Доказательство.

Необходимость: пусть $f(\alpha) = 0$ докажем, что $f(x)/(x - \alpha)$. Разделим $f(x)$ на $(x-\alpha)$ с остатком, получим $f(x) = (x-\alpha)h(x) + r$, где $r \in C$. Подставим в данное равенство вместо x, α, получим:
$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)h(\alpha) + r$, т.к. $f(a)=0$ по условию, то $0 = 0 + r \Rightarrow r = 0$, т.е. $f(x)/(x - \alpha)$

Достаточность: пусть $f(x)/(x - \alpha)$, докажем, что $f(\alpha) = 0$. Разделим $f(x) = (x - \alpha)h(x) + 0$, подставим α, получим:
$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)h(\alpha) + 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$.

Следствие 1 (теорема Безу). Остаток от деления $f(x)$ на $(x - \alpha)$ равен $f(\alpha)$ Действительно : $f(x) = (x - \alpha)h(x) + r$, тогда $f(\alpha)=r$.

Следствие 2. Если $cm\ f(x) = n$, $f(x) \in C[x]$, то $f(x) = (x - \alpha_1)\cdot$ $\cdot(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$, т.е. неприводимыми многочленами над полем C будут только многочлены первой степени. Все многочлены, степень которых больше 1, будут приводимыми. Действительно: по основной теореме алгебры многочлен $f(x)$ имеет хотя бы один корень. Обозначим его через α_i тогда по теореме 2: $f(x)/(x - \alpha) \Rightarrow f(x) = (x - \alpha_1)h(x)$, где $cm(x - \alpha) = l$, $cm\ h(x) = n - l$. Многочлен $h(x)$ над полем C также будет иметь хотя бы один корень - обозначим его через α_2. Тогда, $f(x) = (x - \alpha_2)(x - \alpha_2)q(x)$.

Продолжая рассуждения, на n – ом шаге мы получим: $f(x)=(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$.

Замечание. Может случиться так, что
$f(x)/(x-\alpha)$ & $f(x) /(x-\alpha)^2$ &…& $f(x)/(x-\alpha)^k$; но $f(x)$ не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$, тогда α называют корнем кратности (к).

Следствие 3. Если многочлен $f(x) \in C[x]$, $cm\ f(x) = n$, то он имеет ровно (n) корней с учетом их кратности. Существует алгоритм деления многочлена $f(x)$ на $(x - \alpha)$, который называют схемой Горнера.

Пусть $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0$, cm $f(x) = n$, $a_n \neq 0$ разделим f(x) на $(x-\alpha)$, получим: (*) $f(x) = (x-\alpha)h(x) + r$, где $r \in P$, cm $h(x) = n - l$.

Запишем h(x) в общем виде: $h(x) = b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}.. +b_1x + b_0$. Тогда, подставив в равенство (*) вместо f(x) и h(x) их выражения, получим:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0 = (x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}... b_1x - b_0) + r$

Т.к. многочлены равны, то и коэффициенты при соответствующих степенях должны быть равны.

$$\begin{array}{l|c|l} r - \alpha b_0 = a_0 & & r = a_0 + \alpha b_0 \\ b_0 - \alpha b_1 = a_1 & \Rightarrow & b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1} \overset{\alpha}{=} a_n & & a_n = b_{n-1} \end{array}$$

Вычисление коэффициентов многочлена h(x) удобнее осуществлять с помощью таблицы (схемы Горнера).

a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}$	…	$b_0 = \alpha b_1 + a_1$	$r = \alpha b_0 + a_0$

С помощью схемы Горнера можно решать такие типы задач:

1. Найти h(x) и r при делении f(x) на $(x - \alpha)$;
2. Вычислить значение многочлена f(x) при $x = \alpha$;
3. Выяснить будет ли $(x = \alpha)$ корнем многочлена f(x), $\alpha \in P$;
4. Определить кратность корня;
5. Разложить многочлен по степеням $(x - \alpha)$.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$ и $\alpha = 5$ Составим схему Горнера:

1	-15	76	-140	75	-125
1	-10	26	-10	25	0
1	-5	1	-5	0	
1	0	1	0		
1	5	26			

Какие результаты мы получили:

Во 2-ой строке таблицы мы видим, что остаток от деления f(x) на (x - 5) равен 0, следовательно, f(5) = 0, 5 – корень.

Из 3-ей и 4-ой строки видим, что этот корень имеет кратность 3, т.е. $f(x)/(x - 5)^3$, причём, из 4-ой строки видим, что $f(x) = (x - 5)^3(x^2 + 1)$.

Чтобы разложить многочлен f(x) на неприводимые многочлены над полем C, остаётся найти корни многочлена $h(x)=x^2 +1$ в поле C, для этого необходимо решить уравнение: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = i \;\; x_2 = -i$.

Тогда, $f(x) = (x - 5)^3(x-i)(x+i)$ над полем C.

Для того, чтобы выяснить, многочлены какой степени приводимы и неприводимы над полем R, докажем теорему 3.

Теорема 3. Если $z_0 \in C$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то есть сопряженное комплексное число $\overline{Z}_0$, также является корнем этого многочлена.

Доказательство.

Пусть дан многочлен $f(z)=a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} +...+ a_1z + a_0$, где все $a_i \in R$, i=0, l,...,n и $z_0 \in C$ его корень, т.е. $f(z_0) = 0$.

Покажем, что $\overline{z_0}$ также будет корнем этого многочлена. Подставим $\overline{z_0}$ в многочлен, получим: $f(\overline{z_0}) = a_n\overline{(z_0)}^n + a_{n-1}\overline{(z_0)}^{n-1} + ... + a_1\overline{(z_0)} + a_0 =$ (учитывая свойства сопряженных комплексных чисел: $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$, $\overline{a} = a$, если a $\in$R) $= \overline{a_n(z_0)^n} + \overline{a_{n-1}(z_0)^{n-1}} + ... +$

$$+\overline{a_1(z_0)} + \overline{a_0} = \overline{a_n(z_0)^n + a_{n-1}(z_0)^{n-1} + ... + a_1(z_0) + a_0} = \overline{f(z_0)} = \overline{0} = 0$$

<u>Следствие 1.</u> В кольце R[x] <u>неприводимы</u>:

а) многочлены первой степени;

б) многочлены второй степени, которые не имеют действительных корней.

<u>Приводимы:</u>

а) многочлены второй степени, которые имеют действительные корни.

б) все многочлены выше второй степени.

Действительно: Пусть дан многочлен с действительными коэффициентами: $f(x)=ax^3 + bx^2 + cx + d$, ст. $f(x) = 3$. По

основной теореме алгебры он будет иметь три корня над полем C, то есть $f(x) = (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)$.

Над полем R возможны такие случаи:

а) все корни - действительные числа; тогда многочлен $f(x) = (x- \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ будет разложен на линейные множители над полем R;

б) один корень z_0 - комплексный, тогда по теореме(3), $\overline{z_0}$ тоже будет корнем многочлена, а третий корень будет действительным числом, т.е. $f(x) = (x - \overline{z_0})(x - z_0)(x - \alpha)$ над полем C.

Перемножив скобки $(x - \overline{z_0})(x - z_0)$, получим разложение многочлена f(x) в произведение неприводимых многочленов 2-ой и 1-ой степени над полем R

<u>Следствие 2.</u> Многочлен $f(x) \in R[x]$ нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 1. Разложить на неприводимые многочлены над полем C и R многочлен $f(x) = x + 4$

Решение.

1. Найдем разложение над полем C, для этого нужно найти все комплексные корни многочлена f(x), т.е. нужно решить уравнение $f(x) = 0$ в поле C.

$x^4 + 4 = 0$

$$x_{0,1,2,3} = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}),$$

к =0,1,2,3

$$x_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

$$x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}[\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$$

$$= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$$

$$x_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i$$

$$x_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i$$

Разложение f(x) над полем C будет иметь вид: f(x) = (x -1- i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x – l + i)

Чтобы записать разложение многочлена на неприводимые многочлены над полем R, необходимо перемножить сопряженные скобки: первую с четвёртой, вторую с третьей.

Тогда f(x) = $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ над полем R, хотя действительных корней многочлен f(x) не имеет.

Если над полем C неприводимы только многочлены первой степени, над полем R многочлены первой степени и некоторые многочлены второй, то над полем рациональных чисел Q существуют неприводимые многочлены любой степени n > 1. Например, многочлен f(x) = x^n - 2 неприводим над Q.

Покажем, что решение вопроса о приводимости многочлена f(x) над полем Q можно свести к решению этой задачи над кольцом Z.

Действительно, $\forall f(x) \in Q[x]$ можно всегда представить в виде $f(x) = \frac{a}{b} f_1(x)$, где $f_1(x)$ будет многочленом с целыми коэффициентами.

Например, $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3x^3 - x + 5)$

В некоторых случаях неприводимость многочленов над полем Q можно установить на основе признака Эйзенштейна.

<u>Признак:</u> Многочлен с целыми коэффициентами $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0$, $(n > 2, a_n \neq 0)$ неприводим над полем Q, если существует простое число p, удовлетворяющее условиям:

1. a_n не делится на p;
2. все остальные a_i делятся на p; (i=0, 1, 2, ...,n - 1);
3. a_0, делясь на p, не делится на p^2.

Замечание 1. При больших значениях коэффициентов многочлена и высокой степени многочлена этот признак применить очень сложно.

Пример 3. Пусть $f(x) = x^5 + 6x^3 + 12x - 3$. Используя критерий Эйзенштейна, выяснить, приводим ли многочлен над полем Q?

Можно подобрать простое число $p = 3$, которое удовлетворяет условиям признака.

Действительно, $(1 \nmid 3)$; $(-6 / 3)$ & $(12 / 3)$ & $(-3 / 3)$, а $(-3 \nmid 9)$. Значит, f(x) неприводим над полем Q.

Замечание 2. Если многочлен f(x), cm f(x) > l, приводим над полем C, то он имеет хотя бы один комплексный корень. Для многочленов над полем R и Q условие наличия действительного и рационального корня не является необходимым для того, чтобы многочлен был приводимым.

Например, многочлен $f(x) = x^4 + 4$, который приводим над полем C и R (см . задачу 1) будет приводим и над полем Q: $f(x)=(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, но действительных и рациональных корней он не имеет.

Замечание 3. Однако, если многочлен имеет хотя бы один рациональный корень, то он будет приводим над Q, R и C.

§5. Методы нахождения корней многочлена n - ой степени.

Итак, мы показали в п. 4, что достаточным условием приводимости многочлена над полями C, R, Q является наличие хотя бы одного корня многочлена f(x) в поле C, R или Q. Дня отыскания этих корней приходится решать уравнения n - ой степени в поле C, R или Q. Мы уже отмечали, что если многочлен f(x) имеет рациональный корень, то он приводим и над полем R, и над C. Поэтому, обычно, решение задачи о приводимости многочлена начинается с поиска его рациональных корней. Необходимые, но не достаточные условия существования рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами даёт следующая теорема.

Теорема 1. Если $\frac{p}{q}$ - рациональный корень многочлена f(x) с целыми коэффициентами, причем (p, q) = l, то числитель

дроби (p) является делителем свободного члена a_0, а знаменатель (q) является делителем старшего коэффициента a_n.

Доказательство.

Пусть $\frac{p}{q}$ - корень многочлена $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0$,

где все $a_i \in Z$. Подставим $\frac{p}{q}$, где (p, q) = l, $q \neq 1$ в многочлен, получим:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \quad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на q^n, тогда:

$a_np^n + a_{n-1}qp^{n-1} +...+ a_1 pq^{n-1} + a_0q^n = 0$ (2)

Из равенства (2) сначала можно выразить

$a_np^n = (-a_{n-1}p^{n-1} -...- a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1})q \Rightarrow (a_n/q)$, а потом

$-a_0q^n = p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q+... \quad ...+ a_1q^{n-l}) \Rightarrow (a_0/p)$ т.к. (p, q) = 1

Замечание 1. Так как $\forall\alpha \in Z$, $\alpha \neq 0$ имеет лишь конечное число делителей, то теорема позволяет, путем конечного числа шагов, найти все рациональные числа многочлена или проверить что их нет.

<u>Следствие 1.</u> Нормированный многочлен $f(x) \in Z[x]$ не имеет дробных корней;

<u>Следствие 2.</u> Целый корень многочлена $f(x)\in Z[X]$ является делителем свободного члена.

Задача 1. Разложить многочлен

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 4x + 8$$

над полями Q, R и C.

<u>Решение.</u>

На основании теоремы (1), рациональные корни данного многочлена следует искать среди делителей числа 8, т.к. $a_n = 1$

Делители: + 1, ±2, ±4, ±8.

Известно, что число (α) является корнем многочлена f(x) тогда и только тогда, когда f(x) делится на ($x - \alpha$) (Смотри п. 4). Следовательно, для проверки, какие из чисел ±1, ±2, ±4, ±8 являются рациональными корнями, можно использовать схему Горнера, а можно непосредственно проверить, будет ли $f(\pm1) = 0$, $f(\pm2) = 0$,
$f(\pm4) = 0$, $f(\pm8) = 0$.

	1	-2	1	6	-10	-4	8
1	1	-1	0	6	-4	-8	0
1	1	0	0	6	2	-6	
-1	1	-2	2	4	-8	0	
-1	1	-3	5	-1	$-7 \neq 0$		
2	1	0	2	8	$8 \neq 0$		
-2	1	-4	10	-16	$24 \neq 0$		
4	1	2	10	44	$166 \neq 0$		
-4	1	-6	26	…	$\neq 0$		
8	1	6	50	…	$\neq 0$		
-8	1	-10	42	…	$-\neq 0$		

Итак, $f(x) = (x - l)(x + l)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8)$ над полем Q.

Чтобы найти разложение над полями R и C, нужно найти действительные и комплексные корни этого многочлена, для этого надо решить уравнение четвертой степени $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

Для решения уравнений 4-ой степени разработан частный метод Феррари.

1-й шаг. Оставляем в левой части равенства члены 4-ой и 3-ей степени, остальные переносим в правую часть, получим:

$$x^4 - 2x^3 = -2x^2 - 4x + 8$$

2-й шаг. Дополняем левую часть равенства до полного квадрата: $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 - 2x^2 - 4x + 8$

$$(x^2 - x)^2 = -x^2 - 4x + 8$$

3-й шаг. Вводим новую переменную (y) и дополняем левую часть еще раз до полного квадрата, получим:

$$(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x)y + y^2 = -x^2 - 4x + 8 + 2(x^2 - x)y + y^2$$

$$[(x^2 - x) + y)]^2 = (2y-1)x^2 + (-2y-4)x + (y^2+8) \quad *$$

4-й шаг. Потребуем, чтобы правая часть также стала полным квадратом, для этого $D = B^2 - 4AC = O$

$$D = (-2y - 4)^2 - 4(2y - l)(y^2 + 8) = 0$$

$$y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0$$

Это уравнение имеет рациональный корень $y_0 = 1$.

5-й шаг. Подставим y_0 в правую и левую части уравнения (*) вместо y. Получим: $(x^2-x+1)^2 = x^2-6x+9 = (x-3)^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = x - 3 \\ x^2 - x - 1 = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1 + i\sqrt{3}, x_2 = 1 - i\sqrt{3},$$

$x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$

Итак, многочлен f(x) над полем C может быть представлен в виде: $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$

Для того, чтобы найти разложение многочлена над полем R, нужно перемножить две последние скобки, тогда:

$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})((x - 1)^2 + 3)$.

Задача 2. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 4x - 1$

Решение.

Так как многочлен 4-ой степени, то можно методом Феррари сразу искать его действительные и комплексные корни, а можно как и в первом случае, найти сначала рациональные корни (если они есть).

Так как $a_n = 1$, то многочлен может иметь в качестве рациональных корней целые числа, которые являются делителями свободного члена $a_0 = 1$, т.е. ±1. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (-1) является корнем, а (1) нет, т.к. $f(-l) = 0$, $f(l) \neq 0$.

Тогда, $f(x) = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1)$ над полем Q.

Теперь найдем корни многочлена в поле C и R.

Для этого решим уравнение:

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Это уравнение 3-ей степени, для таких уравнений также существует частный метод решения - метод Кардано.

1- й шаг. Приведем уравнение к виду, не содержащему второй степени неизвестного. Для этого введем подстановку $x = y - \frac{a}{3} = y - \frac{-3}{3} = y + 1$ где (a) коэффициент при x^2.

Тогда, $(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 - 3(y + 1) - 1 = 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим: $y^3 - 6y - 6 = 0$.

2-й шаг. Полагаем, что $y = \alpha + \beta$, где $\alpha = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $\beta = -\frac{p}{3\alpha}$, p - коэффициент при y, q - свободный член.

В нашем случае p = -6, q = -6

Поэтому $\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9-\left(\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{4}$, тогда $\beta = -\frac{-6}{3\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$.

Тогда, $y_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$,

$$y_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}).$$

Наконец, находим (x) из формулы x = y + 1

$$x_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}) + 1,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}) + 1.$$

Тогда, $f(x) = (x + l)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ - разложение многочлена над полем C.

Для нахождения разложения многочлена f(x) над полем действительных чисел R достаточно в полученном выше разложении перемножить скобки, соответствующие сопряженным комплексным корням.

Тогда:

$$f(x) = (x+1)(x-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-1)\left(x^2 - x(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}) + (\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-2)\right)$$ над полем R.

Замечание 2. Если дан многочлен f(x), степень которого выше четвертой, причем он не имеет рациональных корней, то задача разложения многочлена f(x) на неприводимые многочлены над полем C и R становится трудноразрешимой, т.к. общих методов решения уравнений n-ой степени, где n > 4 не существует.

Существуют различные методы приближенного вычисления действительных корней многочлена f(x) (метод хорд, метод касательных и т.п.)

Замечание 3. В том случае, когда нужно найти сумму корней многочлена f(x), могут быть использованы формулы Виета, которые устанавливают зависимость между корнями и коэффициентами многочлена.

Выведем эти формулы:

Пусть $f(z) = z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} +...+ c_{n-1}z + c_n$ и $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ корни этого многочлена в поле C, тогда $z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} +... + c_{n-1}z + c_n = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n) =$
$= z^n - (\alpha_1 + \alpha_2 +\ldots+ \alpha_n)z^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 +\ldots+ \alpha_{n-1}\alpha_n)z^{n-2} +\ldots+$
$+(-1)^n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях, получим формулы Виета:

$c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 +\ldots+ \alpha_n)$

$c_2 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 +\ldots+ \alpha_{n-1}\alpha_n)$

$c_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 +\ldots+ \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$

$c_n = (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$

Задача 3. Найти сумму кубов корней многочлена
$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$, $f(x)\in Q[x]$

<u>Решение.</u>

Над полем комплексных чисел C многочлен f(x) имеет четыре корня: x_1, x_2, x_3, x_4. Нам нужно найти $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3$ не находя самих корней.

По формулам Виета

$x_1+x_2+x_3+x_4 = -2 = \sigma_1$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1 = \sigma_2$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -5 = \sigma_3$

$x_1x_2x_3x_4 = 3 = \sigma_4$

Тогда $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 =$
$=(-2)^3 - 3(-2)1 + 3(-5) = -17$

Ответ: -17.

6. ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ

Практическое занятие №1.
Алгебры, подалгебры, гомоморфизмы алгебр.

1. Выяснить, является ли алгеброй декартов квадрат R^2=RxR относительно операции "сложения" его элементов (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).

2. Проверить, образует ли алгебру множество радиус-векторов, расположенных в первой четверти координатной плоскости, относительно операций:

а) сложения векторов плоскости;

б) вычитания векторов плоскости.

3. Является ли алгеброй множество N относительно следующих действий:

а) $a*b = a^2 - 2ab + b^2$;

б) $a*b = a^2-b^2$.

4. Является ли алгеброй множество Z относительно следующих действий:

а) $a*b = [(a-b)^3 - (a+b)^3] / 3$;

б) $a*b=[(a-b)^2 + (a+b)^2]/2$.

5. Даны две алгебры <N, •> и <{0 1}, •>. Доказать, что отображение φ, заданное по правилу $\forall n \in \{$ $\varphi(n) = \begin{cases} 0, \text{ при } n \neq 0; \\ 1, \text{ при } n=1, \end{cases}$

является гомоморфизмом данных алгебр. Определить вид гомоморфизма.

6. Является ли гомоморфизмом (и какого вида) отображение $\varphi: x \to x^2$ алгебры <Q, ·, 1> на себя ?

7. Является ли отображение φ: $x \to 2x$ гомоморфизмом (и какого вида) алгебры <Z, +, 1> в алгебру <Z, +, 2>?

8. Выяснить, какое из следующих соответствий является гомоморфизмом алгебры <R, - > на себя и какого вида:

а) $\varphi(x) = 2x$,

б) $\varphi(x) = x/3$

в) $\varphi(x) = x^2$,

г) $\varphi(x) = 0$,

д) $\varphi(x) = | x |$.

е) $\varphi(x)=1$.

Практическое занятие №2.
Группа, аксиомы группы. Подгруппа. Достаточные условия подгруппы.

1. Выяснить, какие из следующих алгебр являются группами:

а) <N, *>, где * : $x \to x+1$, ;

б) <Z, +>, где + : $(a,b,c) \to a+b+c$,

в) <Z.-,+>,

г) <Z, :>,

д) <N, ->,

е) <R\{0}, :>.

2. Доказать, что следующие алгебры являются аддитивными группами:

а) <2Z, +>, б) <Q, +>, в) $<Z_5, +>$,

г) <R,+>, д) <mZ, +>, е) $<Z_6, +>$.

3. Доказать, что следующие алгебры являются мультипликативными группами:

а) <R\{0}, •>, б) $<Q^+, •>$, в) $<\{2^к\}, •>$.

4. Показать, что алгебра $<R^+$, T> является полугруппой и найти нейтральный элемент (когда он имеется), если операция T задана так:

а) aTb = a(1-b)+b, в) aTb = 2ab-a-b+1,

б) aTb = 2b(a+1)+2a-1, г) aTb = -2a-2b + 6 + ab.

5. Доказать, что $<R^+$, T> является коммутативной полугруппой, если операция T задана так:

а)T: $(a,b) \to a^{\lg(b)}$, б) T: $(a,b) \to ab/(a+b)$.

6. Показать, что <A, T>, где A = [0, 1], а операция T задана по правилу aTb = (a+b)/(l+ab), является полугруппой.

7. Найти нейтральный элемент e полугруппы <R, T> и множество всех элементов, обладающих симметричными, моноида <R, T, e>, если:

а) aTb = a + b - ab,

б) aTb = - a - b + ab + 2,

в) aTb = 2a+2b-2ab-1,

г) aTb = -2a -2b + 6 + ab.

8. Доказать или опровергнуть, что для любого множества $A \neq 0$ алгебра $<\beta(A), \oplus>$ является группой, если операция $\oplus$ задана по правилу: $X \oplus Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$, где $\beta(A)$ - множество всех подмножеств множества A.

9. Показать, что <Z, T>, является группой, если

а) $aTb = a + b + 3$

б) $aTb = a + b - 2$.

10. Показать, что $<\{a+b\sqrt{3} \ / \ a,b \in Q\},+>$ является подгруппой группы <Q,+>.

11. Показать, что $<\{a+b\sqrt{2} \ / \ (a^2-2b^2 = 1, a,b \in Q^\circ), \bullet >$ является подгруппой группы $<Q^\circ, \bullet >$. где $Q^\circ = Q \backslash \{0\}$.

12. Дано $Z_p = \{0, 1, 2,..., p-1\}$ множество равноостаточных классов целых чисел. $Z^\circ_p = Zp \backslash \{0\}$. При каких условиях $Z^o_7 < Z^o_P$, а $Z^o_8 < Z^o_P$.

Практическое занятие №3.
Кольцо, поле, линейное пространство.

1. Выяснить, какие из указанных алгебр являются кольцами, полями и линейными пространствами над полем действительных чисел R.

1. <Z, +, •>;
2. <R, +, •>;
3. <Q, +, •>
4. $<Z_6, +, \bullet>$
5. $<Z_5, +, \bullet>$:
6. <N, +, •>;
7. R над Q;
8. Q над R;
9. $<R_1, +, \{w\lambda \mid \lambda \in R\}>$, где R_1 - множество радиус-векторов плоскости.
10. $<R_1, +, \{w\lambda \mid \lambda \in R\}>$, где R_1 - множество векторов на координатной прямой.
11. Множество радиус-векторов на любой прямой, проходящей через начало координат, относительно операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр.

Практическое занятие №4.
Операции над матрицами. Свойства операций. Группа, кольцо и линейное пространство матриц.

1. Выполнить указанные действия: (3A + B)•C, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Наиболее рациональным способом вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение:

а) X+A = B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

б) A-X=B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что множество квадратных матриц второго порядка образует группу по сложению.

5. Доказать, что множество квадратных матриц третьего порядка образует некоммутативное кольцо.

6. Доказать, что множество квадратных матриц второго порядка образует линейное пространство.

Практическое занятие №5.
Обратимые матрицы.
Условия обратимости матрицы.
Алгоритм нахождения обратной матрицы.
Решение матричных уравнений.

1. Вычислить строчный ранг матрицы и выяснить, имеет ли она обратную матрицу.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что строчный ранг матрицы А равен ее столбцовому рангу.

3. Найти матрицу A^{-1}

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Имеет ли матрица А обратную матрицу A^{-1}?

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Решить матричные уравнения:

а) $A \bullet X = B$, если $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

б) $X \bullet A = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = (-1\ -4\ -2)$

в) $A \bullet X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \bullet X \bullet \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

ж) $X \bullet \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

6. Вычислить степени матрицы.

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^4$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

Практическое занятие №6
Перестановки и подстановки. Четные и нечетные подстановки. Определители второго и третьего порядков.

1. Определить четность и нечетность подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A_5 < \sigma_n$
3. Найти $A_4 < \sigma_4$
4. Доказать, что $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & k, & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & i, & 9 & 10 \end{pmatrix}$ - нечетная подстановка.
5. Определить, с каким знаком входят в определитель 7-го порядка произведение $\alpha_{33} \cdot \alpha_{16} \cdot \alpha_{72} \cdot \alpha_{27} \cdot \alpha_{65} \cdot \alpha_{61} \cdot \alpha_{44}$
6. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $\alpha_{47} \cdot \alpha_{63} \cdot \alpha_{1i} \cdot \alpha_{55} \cdot \alpha_{7k} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{82} \cdot \alpha_{31}$ было членом определителя (какого порядка?) и входило в него со знаком (+).
7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Практическое занятие №7
Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Способы вычисления определителя.

Вычислить определители:

1. а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

2. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) \\ 2 & 3 & 4 & \dots & (n-1) & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

3. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ а) α_{13} б) α_{32} в) α_{41} г) α_{24}

4. Разложить определитель по элементам первого столбца.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Практическое занятие №8
Системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 13x_3 - 8x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 8x_4 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 12x_2 + 4x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

2. Докажите, что если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

3. Докажите утверждение: если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Практическое занятие №9
Решение систем линейных уравнений матричным методом и по правилу Крамера.

1. Решить системы матричным методом.

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 1 \end{cases}$

2. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_3 = 2 \end{cases}$

3. Найти Ф.С.Р.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$

Практическое занятие №10
Решение однородных систем линейных уравнений.

1. Решить системы однородных линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - 5y + 10z = 0 \end{cases}$

2. Доказать утверждения: а) если векторы X и У являются решениями однородной системы, то их сумма также является решением данной системы; б) если вектор X является решением однородной системы, то вектор $\alpha x, \forall \alpha \in R$ также является решением данной системы

3. Докажите, что система не имеет нетривиальных решений:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 9x - 2y + 4z = 0 \\ 7x - 5y + 10z = 0 \end{cases}$$

Практическое занятие №11
Контрольная работа №1 по темам «Понятия об основных алгебраических структурах», «Теория делимости в кольце Z», «Матрицы», «Определители квадратных матриц», «Решение систем линейных уравнений».

Задание I. Выяснить, какую алгебраическую структуру образует:

1. $<2Z, \circ>$, где $\forall x, y \in 2Z$, $x \circ y = \frac{1}{2}xy$
2. $<Z, \circ>$, где $\forall x, y \in Z$, $x \circ y = x + y - 3xy$
3. $<2Z, +, \bullet>$
4. $<Q^+, +, \bullet>$
5. $<R^+, \circ>$, где $\forall x, y \in R^+$, $x \circ y = \frac{1}{3}xy$
6. $<R^{\{1\}}, \circ>$, где $\forall x, y \in R^{\{1\}}$, $x \circ y = x + y - xy$
7. $<R, \circ>$, где $\forall x, y \in R$, $x \circ y = x + y - 1$
8. $<Z_8, \oplus, \circ>$ где $\overline{k} \circ \overline{s} = \overline{ks}$, $\overline{k} \oplus \overline{s} = \overline{k+s}$
9. $<Z_{11}, \oplus, \bullet>$
10. $<R, \circ>$, где $x \circ y = \sqrt{xy}$

Задание II. Найти строчный ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -9 & 5 & -6 & 21 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 13 & 10 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & 13 & 11 \\ 9 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Задание III. Вычислить матрицу, обратную данной:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Задание IV. Вычислить значение определителя:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -2 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 5 & -8 & -2 & -7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Практическое занятие №12
Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1. Построить точки (радиус-векторы), изображающие комплексные числа:
$z_1 = 2$, $z_2 = -2i$,
$z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$

2. Построить векторы, изображающие сумму и разность комплексных чисел:
а) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = l+3i$;
б) $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 5 + I$;
в) $z_1 = 2i$, $z_2 = -3-4i$

3. Выполнить указанные операции над комплексными числами в алгебраической форме.

а) $(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}$ б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^2$ в) $(1-2i)^{10}$

г) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{1+i}$ д) $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$ е) $(i-3)^7$

4. Доказать тождество: $\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2} = \overline{Z_1\cdot Z_2}$

5. Доказать тождество: $\overline{Z_1}\div\overline{Z_2} = \overline{Z_1\div Z_2}$

Практическое занятие №13
Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:
a) $z = 3$; b) $z = -\sqrt{2}$; c) $z = -i$; d) $z = -1 - i$;
e) $z = \sqrt{3} + i$; f) $z = <\sqrt{3}, -1>$; g) $z = <0, 5>$; h) $z = <-1, 1>$

2. Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos 5\frac{\pi}{6} + i\sin 5\frac{\pi}{6}\right)$

c) $z = (\cos 0 + i\sin 0)$

d) $z = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

3. Выполнить указанные операции в тригонометрической форме.

a) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{1+i}$,

b) $(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

c) $\frac{(1-i\sqrt{3^{12}}) - (1+i\sqrt{3})}{(i-1)^{12}}$, d) $(1+2i)^{10}$,

e) $\sqrt{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$, f) $\sqrt[3]{-8i}$

4. Найти геометрическое место точек, для которых

a) $|Z| \le 3$, b) $|Z - 3i| < 1$,

c) $|Z + (1 - i)| > 4$, d) $|Z + 2i| + |Z - 4 + i| = 10$,

e) $\arg z = \pi/2$, f) $|Z - 4| + |Z - 3i| = 8$.

Практическое занятие №14
Отношение делимости в кольце Z. Свойства отношения делимости в кольце Z. Деление с остатком в кольце Z. Теорема о делении с остатком.

1. Доказать, что если $(a/c)\&(b/c) \Rightarrow (a \pm b)/c$
2. Доказать, что если $(a/c)\&(b \in Z) \Rightarrow (ab)/c$
3. Доказать, что если $(a/b) \Rightarrow |a| > |b|$

4. Доказать, что $\forall n \in Z$ $n(n+1)/2$
5. Разделить с остатком
   а) - 145 на 13 б) 356 на -27 в) - 1248 на 325
6. Доказать, что при $\forall n \in Z$ $(n^3 + 5n)/6$
7. Доказать, что $\forall n \in Z$ $(n^3 + 11n)/6$
8. Доказать, что $\forall n \in Z$ $(n^3 + n)/2$
9. При каких $n \in Z$ число $n^2 - 1$ делится на 3?
10. Доказать, что $\forall n \in Z$ $n^2(n^2-1)/4$
11. Доказать, что $\forall n \in Z$ $(n^5-n)/5$
12. Доказать, что если $n = 2k + 1$, то $(n^2-l)/8$
13. Доказать, что ни при каком $n \in Z$ число n^2+1 не делится на 3

Практическое занятие №15
Наибольший общий делитель целых чисел и его свойства. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя.

1. Доказать, что если $a = bq + r$, где $a, b, r \neq 0$, то $(a, b) = (b, r)$.
2. Доказать, что если $(a_1, a_2) = d$ & $(d_1, a_3) = d_2$ &…& $(d_{n-2}, a_n) =$ $= d_{n-1} \Rightarrow (a_1, a_2, \ a_n) = d_{n-1}$.
3 Применяя алгоритм Евклида, найти НОД(a, b), если:

а) $a = 6188$, $b = 4709$.
б) $a = 3164$, $b = 142$.
в) $a = 10248$, $b = 2142$.
г) $a = 4562$, $b = 356$.
д) $a = 1524$, $b = 240$.

Практическое занятие №16
Взаимно простые числа и их свойства. Наименьшее общее кратное целых чисел и его свойства. Способы нахождения наименьшего общего кратного.

1. Доказать, что если $d = (a, b) \Rightarrow (a / d, b / d) = 1$.
2. Доказать, что если $((a \cdot b) / c)$ & $(a, c) = 1) \Rightarrow (b / c)$.
3. Доказать, что если (c / a) & $(c / b) \Rightarrow (c / ab)$.
4. Доказать, что если $((a, c)=1)$ & $(b, c) = 1) \Rightarrow (a \cdot b, c) = 1$.

5. Доказать, что $[a, b] = a \cdot b/(a, b)$
6. Доказать, что $[a/k, b/k] = [a, b] / к$, где $к \neq 0$, $k \in Z$
7. Доказать, что если

$$([a_1, a_2] = m_1) \& ([m_1, a_3] = m_2) \&... \&([m_{n-2}, a_n] = m_{n-1}) \Rightarrow$$
$$[a_1 a_2 ... a_n] = m_{n-1}$$

8. Вычислить НОК [a, b], используя формулу:

$$[a, b] = a \cdot b/(a, b)$$

а) $a = 84$, $b = 36$
б) $a = 72$, $b = 22$
в) $a = 124$, $b = 32$
г) $a = 244$, $b=18$

9. С помощью решета Эратосфена выделить все простые числа от 2 до 100.

10. Выяснить, какие из чисел

197, 443, 739, 447, 729, 809

будут простыми, какие составными.

11. Найти каноническое разложение чисел:
а) $n = 34862$
б) $n = 126356$
с) $n = 342124$
12. Найти все делители чисел 640, 426, 188.
13. Найти НОД (a, b) и НОК [a, b], используя каноническое разложение.
а) $a =124$, $b = 36$, б) $a = 328$, $b = 49$,
в) $a = 254$, $b = 52$, г) $a =1244$, $b = 356$.

Практическое занятие №17
Отношение делимости в кольце P[x]. Деление с остатком в кольце P[x].

1. Выяснить, делится ли многочлен f(x) на многочлен g(x) в соответствующем кольце, если:

а) $f(x) = 10x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 12$ $g(x) = x^7 - 3x + 1$ $(Z[x])$
б) $f(x) = \overline{5}\, x^6 - \overline{12}\, x^4 + \overline{2}\, x^2 - \overline{6}$ $g(x) = \overline{3}\, x^2 - \overline{5}\, x + \overline{2}$ $(Z_{15}[x])$
в) $f(x) = (l+5i)x^3 - x^2 + 2i$ $g(x) = 2ix^2 - 8i$ $(C[x])$

2. При каких условиях многочлен f(x) делится на многочлен g(x)?

а) $f(x) = 8x^5 - 3x^4 + ax + b$ на $g(x) = x^3 + 2x - 1$ в кольце Z[x]

б) $f(x) = \overline{2}\,x^4 - \overline{a}\,x^2 + \overline{b}$ на $g(x) = \overline{4}\,x^2 - \overline{3}\,x + \overline{1}$ в кольце $Z_7[x]$

в) $f(x) = 3ix^4 + (a)x^2 + b$ на $g(x) = 3x^2 - (l+i)x + 2i$ в кольце C[x]

3. Доказать, что если f(x) /g(x), то

1) либо f(x) = 0,

2) либо cm f(x) ≥ cm g(x).

4. Найти сумму, разность и произведение многочленов.

а) $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x + 8$ и $g(x) = x^4 - 10x + 1$ из кольца Z[x]

б) $f(x) = \overline{12}\,x^4 + \overline{2}\,x^3 - \overline{3}\,x - \overline{1}$ и $g(x) = x^5 - \overline{6}\,x^4 + \overline{2}$ из кольца $Z_{13}[x]$

в) $f(x) = (l-2i)x^3 + 2ix^2 - 4i + l$ и $g(x) = 5ix^2 + 2x - i$ из кольца C[x]

5. Определить степень суммы и произведения многочленов

а) $f(x) = 3x^7 + 2x^3 + x^3 + 5$ $g(x) = x^8 - 2x + 7$ в кольце Z[x]

б) $f(x) = \overline{10}\,x^{15} + x^5 - x^3 + \overline{1}$ $g(x) = \overline{5}\,x^2 - x + \overline{3}$ в кольце $Z_{11}[x]$

в) $f(x) = 3ix^7 + (2 - 6i)\,x^2 + 8$ $g(x) = 7ix^3 + 2ix + 1$ в кольце C[x]

6. Доказать, что множество многочленов, степень которых не превосходит 5, образует кольцо и линейное пространство относительно соответствующих операций. Указать базис и размерность этого линейного пространства.

7. Выяснить будет ли множество P[x] полем относительно операций сложения и умножения многочленов.

Практическое занятие №18

Наибольший общий делитель многочленов. Способы нахождения наибольшего общего делителя. Линейное представление наибольшего общего делителя.

1. Дать определение НОД(f, g) и НОК(f, g).

2. Доказать, что если f(x) = g(x)h(x) + r(x), где cm r(x) < cm g(x), то (f, g) = (g, r)

3. Доказать, что $(f,g) = r_n(x)$, где $r_n(x)$ - последний, неравный нулю, остаток в алгоритме Евклида.

4. Доказать, что если $d = (f, g)$, то $\exists u, v \in P[x]$:
$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$.

5. Доказать, что $[f, g] = \dfrac{f_0 g}{(f, g)}$

6. Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6$, $g(x) = x^2 - 3x - 1$, $f, g \in Z[x]$

б) $f(x) = \bar{6}x^4 + \bar{5}x^2 - \bar{2}$, $g(x) = x^3 - \bar{2}x - \bar{1}$, $f, g \in Z_7[x]$

в) $f(x) = (10 + 5i)x^4 - (15 + 5i)x^2 + (10 - 5i)$, $g(x) = (2 + i)x^2 - 3x + i$, $f, g \in C[x]$.

Практическое занятие №19
Наименьшее общее кратное многочленов. Способы нахождения наименьшего общего кратного многочленов.

1. Найдите делитель, если известно делимое, неполное частное $g(x)$ и остаток $r(x)$:

a) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$, $r(x) = 63x + 25$, $f, g, r \in Z[x]$

b) $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 7x^2 - 5x - 4$, $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $r(x) = -4x + 5$, $f, g, r \in Q[x]$

c) $f(x) = \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{5}$, $g(x) = x^2 - \bar{3}$, $r(x) = \bar{3}x + \bar{1}$, $f, g, \in Z_{10}[x]$

2. Найти (f, g) и $[f, g]$ многочленов:

a) $f(x) = x^3 + 4x - 3$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, $f, g \in Z_5[x]$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$, $f, g \in Q[x]$

c) $f(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + x^3 - ix - i$, $g(x) = x^4 - ix^3 - (1-i)x^2 - x + 1$, $f, g \in C[x]$

3. С помощью алгоритма Евклида найти линейное представление $d(x) = (f(x), g(x))$

a) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$, $f, g \in Q[x]$

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$, $f, g \in Q[x]$

4. Докажите, что если $(f \cdot g)/h$, причем $(f,h)=1$, то (g/h).

Практическое занятие №20
Корни многочлена. Деление многочлена на двучлен. Схема Горнера. Применение схемы Горнера к решению практических задач.

1. Выполнить деление с остатком:

а) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;

б) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$;

г) $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$;

д) $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$

2. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = 4$;

б) $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7, \quad x_0 = -2 - i$;

3. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1$;

б) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1$;

в) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2$;

г) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i,$
$x_0 = -1 + 2i$.

Практическое занятие №21
Приводимые и неприводимые над данным полем многочлены. Формулы Виета.

1. Доказать, что если f(x) и g(x) неприводимые многочлены над полем P, степени больше нуля и f(x)/g(x) => f(x)=c g(x), где c$\in$P.

2. Доказать, что многочлен f(x) $\in$ P[x] тогда и только тогда не делится на неприводимый многочлен p(x) над полем P, когда (f, p) = c.

3. Доказать, что если произведение многочленов f(x) и g(x) делится на неприводимый многочлен над полем P, то $(f(x)/p(x)) \vee (g(x)/p(x))$

4. Доказать, что если $f, g \in P[x]$ & $(f, g) = c$, то эти многочлены не имеют общих корней в поле P.

5. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем C, имеющий простой корень (-1) и двукратный корень (1-i)

6. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем R, меющий простой корень (2) и двукратный корень (1 + i).

7. Над какими из полей Q, R или C приводимы многочлены:

а) $f(x) = x^2 - 4x - 2$

б) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

в) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

г) $f(x) = 3x - 6$

д) $f(x) = x^3 – 1$

8. Найти кратность корня (α) многочлена f(x):

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $\alpha = 2$

б) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $\alpha = -2$

в) $f(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2$, $\alpha = -1$

г) $f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^2 + 16x^2 + 29x + 128$, $\alpha = 3$

Практическое занятие №22
Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.

1. Разложить многочлены на неприводимые многочлены над полями Q, R и C.

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

б) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10$

в) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x – 5$

г) $f(x) = x^3 – 6ix + 4 – 4i$

д) $f(x) = x^3 - 12x + 16$

е) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 28$
ж) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 57x - 196$
з) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 5$
и) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30$
к) $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 + 6x^2 + 10x - 3$
л) $f(x) = 3x^5 + 17x^4 - 36x^3 + 38x^2 - 20x - 8$
м) $f(x) = 6x^6 - x^5 - 23x^4 - x^3 - 2x^2 + 20x - 1$
н) $f(x) = 2x^5 - 15x^3 + 21x - 28$
о) $f(x) = 3x^6 - 20x^4 + 30x^2 - 20x + 23$

2. Найти все корни многочлена:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 24x^2 - 24x + 16,$$

зная, что число $1 - i$ является его двукратным корнем.

3. Доказать, что любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Практическое занятие №23
Многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

1. Докажите неприводимость многочленов

а) $5x^4 + 30x - 12$;
б) $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;
в) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$
в кольце *Q(x)*.

2. Найдите все рациональные корни уравнения:

а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$;
б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 = 0$;
в) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36 = 0$;
г) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$;
д) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60 = 0$;
е) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24 = 0$.

3. Из чего следует единственность разложения на множители в кольце многочленов с рациональными коэффициентами?

4. Сформулируйте и докажите критерий Эйзенштейна.

Практическое занятие №24
Решение уравнений третьей степени в радикалах.

1. Решить уравнения методом Кардано:

а) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$;

б) $x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$;

в) $x^3 - 9x + 28 = 0$.

2. Непосредственно из формулы Кардано вывести, что многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю.

3. Пользуясь формулой Кардано, найдите с точностью до 0,01 действительный корень уравнений:

а) $x^3 - 2x - 5 = 0$;

б) $x^3 + 2x - 30 = 0$.

Практическое занятие №25
Решение уравнений четвертой степени в радикалах.

1. Решить уравнения четвертой степени методом Феррари:

а) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$;

б) $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$;

в) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$;

г) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

2. Решить уравнения четвертой степени методом Феррари, проверить правильность решения, найдя корни другими способами.

а) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$;

б) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1=0$;
в) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1=0$;
г) $x^4-x^3-3x^2+2x+2=0$.

Практическое занятие №26
Методы решения алгебраических уравнений высших степеней от одной переменной.

1. Составить уравнение 6-й степени, имеющее корни:

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1-\alpha, \frac{1}{1-\alpha}, 1-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

2. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

3. Чему равен показатель кратности корня:

а) 2 для многочлена $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;
б) –2 для многочлена $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$.

Практическое занятие №27
Контрольная работа №2 по темам «Комплексные числа», «Приводимость многочленов над полями», «Решение алгебраических уравнений высших степеней».

Задание I. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+x_4=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \\ 9x_1-3x_2+6x_3+15x_4=-3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+x_4=2 \\ x_1-5x_2+5x_3-3x_4=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1+5x_2+x_3+3x_4=1 \\ 7x_1+6x_2-5x_3+2x_4=2 \\ x_1+4x_2+7x_3+4x_4=0 \\ 14x_1+12x_2-10x_3+4x_4=4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Задание II. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ nx_3 = 5 \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots 10$$

Задание III. Выполнить указанные операции над комплексными числами.

1) $\dfrac{(2-2i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^4} + (-1-2i)(3-i)$;

2) $\dfrac{(3\sqrt{3}-3)^3}{8(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^2} + (3+2i)(2-5i)$;

3) $\dfrac{(-4\sqrt{3}-4i)^3}{(-1+i)^{16}} + (2-2i)(3-2i)$;

4) $\dfrac{(1-i)^9}{8(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^2} + (3+2i)(2-5i)$;

5) $\dfrac{(-2\sqrt{3}+2i)^8}{i^{243}}+(2-2i)(3-i)$;

6) $\dfrac{(1)^9}{(1-i)^7}+(1-i)i^{125}$;

7) $\dfrac{(-1-i)^8}{(-1+i)^6}+(3-i)(2i-5)$;

8) $\dfrac{(-2+2i)^5}{(-1+i)^3}+(2i-5)(-4+i)$;

9) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^4}+(5+2i)(i-2)$;

10) $\dfrac{(-1-i)^{10}}{(-1+i)^8}+(1-5i)i^{162}$

Задание IV. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $-6+6\sqrt{3i}$; $\cos\dfrac{1}{2}+i\sin(\pi-\dfrac{1}{2})$;

2) $2i$; $\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}$;

3) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$; $-\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}$;

4) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$; $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$;

5) $-2(\sqrt{3}+i)$; $\sin 1-i\cos 1$;

6) $6(1-\sqrt{3}i)$; $\cos 1+i\sin 1$;

7) $5-5i$; $-\sin 1-i\cos 1$;

8) $-12+12i$; $-\cos\dfrac{\pi}{17}+i\sin\dfrac{\pi}{17}$;

9) $\sqrt{3}-i$; $\quad 2\cos(\frac{7\pi}{4})-2i\sin(\frac{7\pi}{4})$;

10) $i-\sqrt{3}$; $\quad 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$;

Задание V. Изобразить данное геометрическое место точек на комплексной плоскости.

1) $|z + 1 - 3i| = 4$, $\arg z = \pi/2$; 2) $|z - 2 + 3i| < 5$, $\arg z = -\pi/3$;
3) $|z - 3i| < 1$, $\arg z = 5\pi/6$; 4) $|z + 2i| \geq 7$, $\arg z = -\pi$;
5) $|z + 2i - 3| \leq 3$, $\arg z = 0$; 6) $|z + 3| + |z - 2i| \geq 5$;
7) $|z + 3i| + |z - 1| < 3$; 8) $|z - (1 + i)| + |z + (1 + 2i)| \geq 8$;
9) $|z + (1 - i)| + |z - (2 + i)| \leq 10$; 10) $|z + (1 - 2i)| + |z - 1| < 6$;

Задание VI. Разложить многочлены, на множители, неприводимые над полями C, R и Q.

1. $f(x) = x^5 + x^3 + x$; 2. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$;
3. $f(x) = 27x^4 - 9x^2 + 14x - 4$; 4. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$;
5. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$; 6. $f(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 9x - 9$;
7. $f(x) = x^6 + 27$; 8. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;
9. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$;
10. $f(x) = x^7 - x^5 + x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$.

7 . ГЛОССАРИЙ

Группа — моноид (см. ниже), в котором каждый элемент имеет себе симметричный.

Группоид — непустое множество, замкнутое относительно одной бинарной операции.

Кольцо — алгебра с двумя заданными на ней бинарными операциями, являющаяся абелевой группой по сложению, в которой операция сложения связана с операцией умножения левым и правым дистрибутивными законами.

Комплексное число — пара действительных чисел.

Матрица — прямоугольная таблица, состоящая из k строк и s столбцов.
Многочлен — формальное выражение вида:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Моноид — полугруппа (см. ниже) с нейтральным элементом.
Поле — кольцо, в котором каждый отличный от нуля элемент обратим.
Полугруппа — ассоциативный группоид.

8. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

8.1. Основная литература

1. Алгебра и теория чисел. / Под. ред. Н.Я. Виленкина. Изд.2-е. — М.: Просвещение, 2004. – 192 с.
2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. Учебник для вузов. – М.:Физматлит, 2003.- 320 с.
3. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 2005. – 559 с., ил
4. Куликов, Л.Я., Москаленко, А.И., Фомин, А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 2001. – 288 с..
5. Курош, А.Г. Курс высшей математики, — Изд.11-е. М.: Наука, 2006. – 432 с.
6. Фаддеев, Д.К., Соминский, И.С. Сборник задач по высшей алгебре, — М.: Наука. 2002. – 304 с.
7. Пуркина, В.Ф. Алгебра. Часть I. Горно-Алтайск, Универ-Принт, 2001. - 102 с.
8. Пуркина, В.Ф. Алгебра. Горно-Алтайск, 2006. - 240 с.

8.2. Дополнительная литература

1. Ван-дер Варден, Б. Л. Алгебра.- М.: Наука,1979. - 648 с., ил.
2. Калужнин, Л. А. Введение в общую алгебру. - М.: Наука, 1973.

1. Сборник задач по алгебре. Под. ред. А.И. Кострикина. — М.: Наука,1987, -352 с.
2. Кострикин, А. М. Основные структуры алгебры. - М.: 2001.
3. Скорняков, Л. А. Элементы алгебры. - М.: Наука, 1980.
4. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. Основы теории групп. - М.: Наука, 1977.
5. Мальцев, А. И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970.
6. Воеводин, В. В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1980.
7. Ленг, С. Алгебра. - М.: Издательство Мир, 1968.
8. Белоногов, В. А. Задачник по теории групп. - М.: Наука, 1977.
9. Кострикин, А. И. Сборник задач по алгебре. - М.: 1995.
10. Воеводин, В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
11. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966.
12. Икрамов, Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.
13. Ильин, В.А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: МГУ, 1985.
14. Винберг, Э.Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980. – 176 с.
15. Варпаховский, Ф.Л., Солодовников, А.С. Алгебра. — Окунев, Л.Я. Высшая алгебра,— М.: Просвещение, 1966. – 333 с.

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Учебно-методический комплекс
«Алгебра»

Составители:
Пуркина Валентина Федоровна
Кайгородов Евгений Владимирович

Подписано в печать Формат 60*84/16
Бумага офсетная. Усл.печ.л.-
Заказ № . Тираж

РИО Горно-Алтайского госуниверситета,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1

Отпечатано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского госуниверситета,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1