§1. Понятие числового ряда.

Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, a_n — *общим членом ряда.*

Сумма $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ называется *частичной суммой ряда.* Суммы $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ образуют последовательность частичных сумм.

Суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \tag{1.2}$$

Если предел последовательности частичных сумм существует, то ряд называется *сходящимся*, если предела не существует, то ряд называется *расходящимся.*

Пример 1.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Решение . Преобразуем общий член ряда, представив его в виде разности простых дробей $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Вычислим частичную сумму. Заметим, что при суммировании все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожатся. $S_k = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = 1 - \dfrac{1}{k+1}$. Вычислим предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1$. Предел существует, значит, ряд сходится и его сумма равна $S = 1$.

Пример 1.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

Решение . Общий член ряда имеет вид $a_n = aq^{n-1}$. Если $q \neq 1$, то частичная сумма $S_k = \dfrac{a(q^k-1)}{q-1}$.

Если $|q| < 1$, то $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a(q^k-1)}{q-1} = \dfrac{a}{1-q}$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$. Следовательно, ряд сходится.

Если $|q| > 1$, то $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a(q^k-1)}{q-1} = \infty$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = \infty$. Следовательно, ряд расходится.

Если $q = 1$, то $S_k = 1+1+1+\ldots \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_{2k} = 1-1+1-1+1-1+\ldots = 0$, $S_{2k-1} = 1-1+1-1+1-\ldots = 1$. Предела частичных сумм не существует. Следовательно, ряд расходится.

Сумма $r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_k$ называется *остатком ряда.* Если ряд сходится и его сумма равна S, то остаток ряда $r_k = S - S_k$.

§2. Свойства сходящихся рядов.

Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. (**необходимый признак сходимости ряда**). *Если ряд (2.1) сходится, то его общий член стремится к нулю.*

Доказательство. В теореме утверждается, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда по определению его сумма $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Заметим, что общий член ряда $a_n = S_n - S_{n-1}$. Перейдем в этом равенстве к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. □

Замечание Условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным. Если $a_n \not\to 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Но существуют расходящиеся ряды, общий член которых стремится к нулю ($a_n \to 0$, но ряд расходится).

Теорема 2.2. *Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой его остаток.*

Доказательство. Обозначим через $S_{k+m} = \sum\limits_{n=1}^{k+m} a_n$ частичную сумму ряда, а через $\sigma_m = \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n$ частичную сумму его остатка. Имеем $S_{k+m} = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n + \sigma_m$. Из этого равенства следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2.3. *Если ряд сходится, то его остаток r_k стремится к нулю (при $k \to \infty$).*

Теорема 2.4. *Сумма двух сходящихся рядов — сходящийся ряд и его сумма равна сумме складываемых рядов.*

Доказательство. В теореме утверждается, что если даны два сходящихся ряда, то их сумма также сходится и сумма полученного таким образом ряда равна сумме исходных рядов.

Пусть $S' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S'' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S' + S''$. Рассмотрим частичные суммы данных рядов $S'_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ и $S''_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$. Тогда $S'_k + S''_k = \sum\limits_{n=1}^{k}(a_n + b_n)$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$, получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2.5. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится,то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ также сходится (c — произвольное число, отличное от нуля).*

Теорема 2.6. *Если в сходящемся ряде произвольным образом объединить члены ряда в группы, то сходимость ряда не нарушится и его сумма не изменится.*

§3. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3.1}$$

который содержит бесконечно много положительных и отрицательных членов. Одновременно с ним рассмотрим положительный ряд, члены которого модули членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{3.2}$$

Все члены положительного ряда неотрицательны.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если он сходится и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то такой ряд называется *сходящимся условно.*

Это определение избыточно, в нем есть лишнее условие. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.1. *Если ряд из модулей* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *также сходится.*

§4. Признаки абсолютной сходимости рядов.

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого положительны ($a_n \geqslant 0$). Для таких рядов можно указать признаки, с помощью которых удается, не вычисляя предела частичных сумм ряда, установить сходится ряд или расходится. Однако эти признаки не дают возможности вычислить сумму ряда, если ряд сходится. Но нахождение суммы ряда — это трудная задача и решить ее аналитически удается в частных случаях, применяя различные преобразования.

Заметим, что последовательность частичных сумм (S_k) положительного ряда всегда возрастает $S_{k+1} \geqslant S_k$. Поэтому вопрос о существовании предела последовательности частичных сумм сводится к вопросу о существовании предела монотонной последовательности.

Таким образом, для того чтобы положительный ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена в совокупности, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если существует такое число M, что $S_k \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $S_k \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Приведем некоторые достаточные признаки абсолютной сходимости рядов.

Теорема 4.1. (Первый признак сравнения.) *Пусть даны положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, члены которых связаны соотношением $a_n \leqslant b_n$ (для всех $n \in \mathbb{N}$).*
1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится (из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда).
2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится (из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего ряда).

Доказательство. Обозначим через S'_k и S''_k частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. Очевидно, что $S'_k \leqslant S''_k$.
1) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда существует такое число M, что частичные суммы $S''_k \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Имеем $S'_k \leqslant S''_k \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда частичные суммы $S'_k \to \infty$. Следовательно, $S''_k \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. $\square$

Теорема 4.2. (Второй признак сравнения.) *Пусть даны положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует конечный, неравный нулю* *предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = K$ *(*$0 < K < \infty$*). Тогда ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $K - \varepsilon > 0$. Для этого ε существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon$. Так как $b_n > 0$, то раскрыв модуль и умножив неравенство на b_n, получим неравенство $(K-\varepsilon)b_n < a_n < (K+\varepsilon)b_n$. Для завершения доказательства применим теорему 4.1. $\square$

Проводя сравнение положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с геометрической прогрессией, получим следующие признаки сходимости.

Теорема 4.3. (Первый признак Д'Аламбера.) *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(*$a_n > 0$*). Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$ (начиная с $n = 1$).
Имеем $a_2 \leqslant a_1 d$, $a_3 \leqslant a_2 d \leqslant a_1 d^2, \ldots, a_{n+1} \leqslant a_1 d^n, \ldots$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 d^{n-1}$ сходится (геометрическая прогрессия с $|q| = d < 1$). По первому признаку сравнения (теорема 4.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \ldots > a_1$. Общий член ряда $a_n \not\to 0$. По теореме 2.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. $\square$

Теорема 4.4. (Второй признак Д'Аламбера.) *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(*$a_n > 0$*) и существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$*. Тогда при* $d < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $d > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $d < 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $d + \varepsilon < 1$. Для этого ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - d\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства следует, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon < 1$ и по теореме 4.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $d > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $d - \varepsilon > 1$. Для этого ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - d\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства следует, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > d - \varepsilon > 1$ и по теореме 4.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Теорема 4.5. (Первый признак Коши.) *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если, начиная с некоторого номера,* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant c < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если* $\sqrt[n]{a_n} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant c < 1$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$ (начиная с $n = 1$).
Имеем $a_1 \leqslant c$, $a_2 \leqslant c^2, \ldots, a_n \leqslant c^n, \ldots$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n$ сходится (геометрическая прогрессия с $|q| = c < 1$). По первому признаку сравнения (теорема 4.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\sqrt[n]{a_n} > 1$, то $a_n > 1$. Общий член ряда $a_n \not\to 0$. По теореме 2.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Теорема 4.6. (Второй признак Коши.) *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$. *Тогда при* $c < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $c > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $c < 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $c + \varepsilon < 1$. Для этого ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - c\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства следует, что $\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon < 1$ и по теореме 4.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

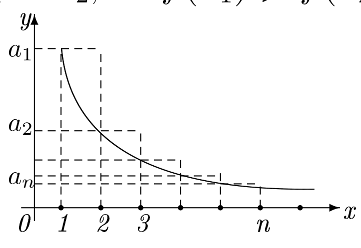
Пусть $c > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $c - \varepsilon > 1$. Для этого ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - c\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства следует, что $\sqrt[n]{a_n} > c - \varepsilon > 1$ и по теореме 4.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Заметим, что при $d = 1$ и $c = 1$ признаки Д'Аламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда. Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды, для которых $d = 1$ или $c = 1$. Для исследования сходимости таких рядов существуют другие признаки абсолютной сходимости, более сильные чем признаки Д'Аламбера и Коши.

Рассмотрим еще один один удобный для применения в ряде случаев признак сходимости, основанный на соображениях совсем иного рода, чем рассмотренные ранее признаки. В формулировке этого признака используется понятие несобственного интеграла первого рода.

Теорема 4.7. (Интегральный признак Коши.) *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Пусть существует невозрастающая непрерывная функция* $f(x)$, *определенная на* $[1;\infty)$ *такая, что* $a_n = f(n)$. *Для сходимости ряад* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Функция $f(x)$ является невозрастающей, то есть если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.



Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции, выражающаяся через интеграл $\int\limits_1^{n} f(x)dx$, заключена между площадями вписанной и описанной около трапеции ступенчатых фигур (ширина шага $\Delta x = 1$).

Имеем $S_{\text{впис.}} = a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, $S_{\text{опис.}} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ (высота прямоугольников — $h = a_k$, основание — $a = 1$). Таким образом,

$$S_n - a_1 < \int\limits_1^n f(x)dx < S_{n-1} \tag{$*$}$$

Так как $\int\limits_1^n f(x)dx < \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$, то последовательность $(\int\limits_1^n f(x)dx)$ является возрастающей.

1. Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда последовательность частичных сумм S_n ограничена сверху ($S_n < S$). Из неравенства (*) следует, что возрастающая последовательность частичных сумм для несобственного интеграла ограничена сверху ($\int\limits_1^n f(x)dx < S_{n-1} < S$). Значит, интеграл сходится.

2. Достаточность. Пусть интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. Последовательность $(\int\limits_1^n f(x)dx)$ возрастает и имеет предел. Следовательно, она ограничена сверху $\int\limits_1^n f(x)dx \leqslant \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Из неравенства (*) следует, что последовательность частичных сумм ряда S_n ограничена сверху $S_n - a_1 < \int\limits_1^n f(x)dx \leqslant \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (как монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность). □

Вспомним четыре важных для применения признаков сходимости предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m < k \\ \infty, & \text{если} \quad m > k \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если} \quad m = k \end{cases}, \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty. \tag{4.4}$$

Пример 4.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение . Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ называется *обобщенным гармоническим рядом.* Исследуем его сходимость, применив интегральный признак Коши. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.7. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\alpha=1$. Имеем $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{\infty}=\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x}$ расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ также расходится.

2. Пусть $\alpha>1$. Имеем $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{\infty}=\dfrac{1}{1-\alpha}(0-1)=\dfrac{1}{\alpha-1}$. Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ также сходится.

3. Пусть $\alpha<1$. Имеем $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{\infty}=\dfrac{\infty-1}{1-\alpha}=\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ также расходится.

Запишем результаты исследования сходимости обобщенного гармонического ряда

$$\text{Ряд}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1,\\ \text{расходится, если } \alpha\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$.

Решение . Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$ положительный. Исследуем его сходимость, применив признаки Д'Аламбера и Коши.

1. Применим признак Д'Аламбера. Имеем $a_n=\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^n}:\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot 2\cdot 3^{n-1}\sqrt{n+1}}{3^{n-1}\cdot 3\cdot 2^n\sqrt{n}}=$
$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=\dfrac{2}{3}<1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$ сходится.

2. Применим признак Коши. Имеем $a_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n\cdot 3\cdot\sqrt{n}}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\sqrt[2n]{9n} = \dfrac{2}{3} < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^{n-1}}$ сходится.

Пример 4.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\cdot\sin\dfrac{5}{4^n}$.

Решение . Применим признак Коши. Имеем $a_n = 2^n\cdot\sin\dfrac{5}{4^n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n\sin\dfrac{5}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n\cdot\dfrac{5}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{4}\sqrt[n]{5} = \dfrac{1}{2} < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\dfrac{5}{4^n}$ сходится.

Пример 4.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Решение . Применим второй признак сравнения. В качестве эталонного ряда возьмем обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ и найдем при каком α предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ будет конечен. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n} = 1 \text{ при } \alpha = 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. По теореме 4.2 исследуемый ряд также расходится.

Пример 4.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^5-3n^2+10}}$.

Решение . Применим второй признак сравнения. В качестве эталонного ряда возьмем обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ и найдем при каком α предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ будет конечен. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^5-3n^2+10}}}{\dfrac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n^\alpha}{\sqrt{n^5-3n^2+10}} = 2 \text{ при } \alpha = 1,5.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1,5}}$ сходится. По теореме 4.2 исследуемый ряд также сходится.

Пример 4.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

Решение . Применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 4.7. Имеем $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}=\int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^{3/2}x}=-\frac{2}{\sqrt{\ln x}}|_2^{\infty}=-\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}=\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}$ — сходится. По теореме 4.7 ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$ также сходится.

Сформулируем еще два свойства абсолютно сходящихся рядов. Мы уже знаем, что сходящийся ряд обладает сочетательным свойством (теорема 2.6).

Теорема 4.8. *Абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.*

В теореме утверждается, что члены абсолютно сходящегося ряда можно произвольным образом переставлять. Его сумма при этом не измениться.

Введем операцию умножения рядов. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m$ — два ряда, то их *произведением* называется ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}a_nb_m=a_1b_1+a_2b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\ldots$, состоящий из всех возможных произведений членов исходных рядов.

Теорема 4.9. *Если перемножить два абсолютно сходящихся ряда, то полученный в результате умножения ряд сходится и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.*

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m=S_2$ $(a_n>0, b_m>0)$, то $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}a_nb_m=S_1\cdot S_2$.

Задание 4.1. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^2+3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(3n+2)2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n!}$.

Задание 4.2. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)\cdot 2^{n+1}}{(5n-3)\cdot 3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$.

Задание 4.3. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-2}{\sqrt{n^5+3n^2-2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+6n-5}{\sqrt{n^9+3n^2-2}}$.

Задание 4.4. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Задание 4.5. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n-4}{n^2-3n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot(4n+3)}{2^n\cdot n!}$.

Задание 4.6. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln(n+2))^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\dfrac{3}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!\cdot 3^n}$.

Задание 4.7. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 x}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{5n+4}$.

§5. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим вопрос о сб условной сходимости знакопеременных рядов.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + (-1)^{n-1}c_n + \ldots$, где $c_n > 0$, называется *знакочередующимся рядом.* Для знакочередующихся рядов существует достаточно простой признак сходимости.

Теорема 5.1. (Признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$ *сходится, если его общий член, монотонно убывая по абсолютной величине, стремится к нулю.*

Доказательство. В теореме утверждается, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$ сходится, если выполнены условия $c_{n+1} < c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

а) Рассмотрим четные частичные суммы $S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m})$. Имеем $S_{2m+2} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}) > S_{2m}$, так как по условию теоремы $c_{2m+1} > c_{2m+2}$. Последовательность (S_{2m}) является монотонно возрастающей. Покажем, что она ограничена сверху. Действительно, $S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1$

потому, что все скобки $c_n - c_{n+1} > 0$ положительны и разность всегда больше уменьшаемого. По тоереме о пределе монотонной последовательности (всякая монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел) последовательность четных частичных имеет предел. Обозначим его S, то есть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2m}$.

б) Покажем, что последовательность нечетных частичных имеет предел и найдем его. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2m} + c_{2m+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{2m+1} = S + 0 = S$.

Объединяя a) и b), получаем, предел последовательности всех частичных сумм существует и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. □

Следствие 5.2. *Остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит по модулю модуля первого отброшенного члена.*

Доказательство. В следствии утверждается, что $|r_n| < c_{n+1}$. Доказательство состоит из двух частей.

1. Пусть $n = 2k$ — четное число. Тогда $r_{2k} = c_{2k+1} - c_{2k+2} + \ldots = (c_{2k+1} - c_{2k+2}) + (c_{2k+3} - c_{2k+4}) + \ldots > 0$ и $r_{2k} = c_{2k+1} - (c_{2k+2} - c_{2k+3}) - (c_{2k+4} - c_{2k+5}) - \ldots < c_{2k+1}$. Следовательно, $0 < |r_{2k}| < c_{2k+1}$.

2. Пусть $n = 2k + 1$ — нечетное число. Тогда $r_{2k+1} = -c_{2k+2} + c_{2k+3} - \ldots = -(c_{2k+2} - c_{2k+3}) - (c_{2k+4} - c_{2k+5}) - \ldots < 0$ и $r_{2k+1} = -c_{2k+2} + (c_{2k+3} - c_{2k+4}) + (c_{2k+5} - c_{2k+6}) + \ldots > -c_{2k+2}$. Следовательно, $-c_{2k+2} < r_{2k+1} < 0$.

Из этих неравенств вытекает, что $0 < |r_n| < c_{n+1}$. □

Теорема 5.3. (Признак Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а последовательность* (b_n) *монотонна и ограничена, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Теорема 5.4. (Признак Дирихле). *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничены в совокупности (*$|A_n| < M$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*), а последовательность* (b_n) *монотонно стремится к нулю (*$(b_n) \searrow$ *или* $(b_n) \nearrow$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*), то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Пример 5.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение . Исследуем ряд на абсолютную сходимость: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, как гармонический ряд при $\alpha = 1$ (формула (4.5)).

Исследуем ряд на условную сходимость по признаку Лейбница. Имеем $c_n = \dfrac{1}{n}$. Условие а) $c_{n+1} < c_n$, то есть $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, выполняется; условие б) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, тоже выполняется. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно.

Заметим, что, если ряд сходится абсолютно, то для него выполняется переместительный закон, то есть сумма ряда не изменится при любой перестановке его членов. Условно сходящиеся ряды таким свойством не обладают. Более того

Теорема 5.5. (Римана). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно и* M *— произвольное действительное число, то можно так переставить члены ряда, что преобразованный ряд будет сходиться к числу* M.

Задание 5.1. Исследовать сходимость рядов
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{4n+3}{n^2+3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{4n+3}{2^n \cdot (3n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+4}}$.

Задание 5.2. Исследовать сходимость рядов
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{4n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \ln^3 n}$.

Задание 5.3. Исследовать сходимость рядов
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{2^{3n+1} \cdot (n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^3}{5^n \cdot (2+3n)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\dfrac{4n+3}{5n+3}\right)^n$.

§6. Ряды с комплексными членами.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ($\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$) — комплексные числа. Будем считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tag{6.1}$$

Таким образом, задание ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с комплексными членами эквивалентно заданию двух рядов с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tag{6.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tag{6.3}$$

Как и для ряда с действительными членами для ряда с комплексными членами можно ввести понятия частичной суммы ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)$ и суммы ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ряд (6.1) *сходится*, если существует предел последовательности его частичных сумм, и *расходится*, если последовательность частичных сумм предела не имеет.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами.

Теорема 6.1. *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Доказательство. Обозначим через $S_n = \sigma_n + i\tau_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)$ частичную сумму ряда (6.1).

а) Пусть ряд (6.1) сходится и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ — его сумма ($S = \sigma + i\tau$).

По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|S - S_n| < \varepsilon \quad (*)$.

Имеем $|S-S_n| = |(\sigma+i\tau)-(\sigma_n+i\tau_n)| = \sqrt{(\sigma-\sigma_n)^2+(\tau-\tau_n)^2}$.

Так как $|\sigma-\sigma_n| \leqslant |S-S_n|$ и $|\tau-\tau_n| \leqslant |S-S_n|$, то $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства $|\sigma-\sigma_n| \leqslant |S-S_n| < \varepsilon$, $|\tau-\tau_n| \leqslant |S-S_n| < \varepsilon$.

Это значит, что ряды (6.2) и (6.3) сходятся и их суммы равны σ и τ соответственно.

б) Пусть ряды (6.2) и (6.3) сходятся. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства $|\sigma-\sigma_n| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|\tau-\tau_n| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

$\forall n > N(\varepsilon)$ имеем $|S-S_n| = \sqrt{(\sigma-\sigma_n)^2+(\tau-\tau_n)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{2}+\dfrac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$. Следовательно, ряд (6.1) сходится и его сумма равна S. $\square$

Для рядов с комплексными членами вводятся понятия абсолютной и условной сходимости.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то такой ряд называется *сходящимся условно.*

Исследование ряда (6.1) на абсолютную сходимость проводят по признакам Д'Аламбера, Коши, сравнения. Кроме того, имеет место теорема

Теорема 6.2. *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился абсолютно необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходились ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Доказательство теоремы следует из очевидных неравенств $|\alpha_n| \leqslant |a_n|$, $|\beta_n| \leqslant |a_n|$, $|a_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ и признака сравнения.

Заметим, что если ряд (6.1) сходится и хотя бы один из рядов (6.2) и (6.3) сходится условно, то ряд (6.1) сходится условно.

Пример 6.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}} + \dfrac{i}{n(n+1)}\right)$.

Решение . Имеем $\alpha_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. По первому признаку сравнения (теорема 4.1) ряд $|\alpha_n| = \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ сходится абсолютно; по второму признаку сравнения (теорема 4.2) ряд $|\beta_n| = \dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ также сходится абсолютно. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 6.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n}$.

Решение . Имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} i \cdot \dfrac{n \operatorname{sh} n}{3^n}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость: $|a_n| = \dfrac{n}{3^n} \cdot \dfrac{e^{2n}-1}{e^n}$. По признаку Коши (теорема 4.6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{e^2}{3e} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \dfrac{e}{3} < 1$. Следовательно, заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 6.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{e^{i/n}}{n}$.

Решение . Имеем $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{e^{i/n}}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\cos \dfrac{1}{n} + i \sin \dfrac{1}{n}}{n}$. Ряд из модулей $|a_n| = \sqrt{\cos^2 \dfrac{1}{n} + i \sin^2 \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд).

Исследуем ряд на покомпонентную сходимость.

Имеем $\alpha_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\cos \dfrac{1}{n}}{n}$, $\beta_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{n}$.

Ряд $|\beta_n| = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ сходится абсолютно по второму признаку сравнения (теорема 4.2).

Ряд $\alpha_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \cos \dfrac{1}{n}$ исследуем по признаку Лейбница. Так как функция $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \cos \dfrac{1}{x}$ убывает при $x > 0$ (ее производная $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \cos \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} \cdot \sin \dfrac{1}{x} < 0$), то справедливо неравенство $\dfrac{1}{n+1} \cdot \cos \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \cdot \cos \dfrac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \cos \dfrac{1}{n} = 0$, то ряд сходится условно (заметим, что этот ряд не может сходится абсолютно, иначе заданный в условии задачи ряд сходился бы абсолютно).

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{e^{i/n}}{n}$ сходится условно.

Задание 6.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}} + i \dfrac{e^n}{n!} \right)$.

§7. Понятие функционального ряда.

Рассмотрим ряд, членами которого являются не числа, а функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{7.1}$$

Все функции $u_n(x)$ определены в области Δ. Ряд (7.1) называется *функциональным рядом.* Если точку $x_0 \in \Delta$ подставить в ряд (7.1), то получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Обозначим через $S_k(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x_0)$ частичную сумму ряда (7.1) в точке x_0. Если существует предел последовательности частичных сумм $S(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, то говорят, что ряд (7.1) сходится в точке x_0.

Множество D всех точек x, для которых ряд (7.1) сходится, называется *областью сходимости* ряда (7.1).

Сумма $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ называется *остатком ряда.* Если ряд в точке x сходится, то остаток ряда $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$.

Можно рассматривать функциональный ряд, членами которого являются функции комплексного переменного

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) \ldots + u_n(z) + \ldots . \tag{7.2}$$

Область сходимости этого ряда $D \subset \mathbb{C}$.

Область сходимости функционального ряда находится по признакам абсолютной сходимости.

Пример 7.1. Докажите, что ряд $\frac{1}{1+x} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ сходится на $[0;\infty)$. Найдите его сумму.

Решение . Заметим, что все члены ряда $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)(2+x)} - \ldots - \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} - \ldots$ определены при $x \geqslant 0$. Найдем частичную сумму $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)(2+x)} - \ldots \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} = \frac{1}{1+x} -$

$-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{n+x}+\dfrac{1}{n+1+x}=\dfrac{1}{n+1+x}$.

Тогда сумма ряда $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1+x}=0$ для всех $x\in[0;\infty)$. Следовательно, ряд сходится и его сумма $S(x)=0$.

Пример 7.2. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4x)^{2n}}{(2n+1)\cdot 5^n}$.

Решение . Применим признак Коши

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(4x)^{2n}}{(2n+1)\cdot 5^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16x^2}{5\cdot\sqrt[n]{2n+1}}=\dfrac{16x^2}{5}$.

Ряд сходится, если $\dfrac{16x^2}{5}<1$ или $x^2<\dfrac{5}{16}$. Решая это неравенство, получим, что $|x|<\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Тогда ряд принимает вид

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4\sqrt{5}/4)^{2n}}{(2n+1)\cdot 5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n+1)\cdot 5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$. Ряд расходится (формула (4.5)).

Пусть $x=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Тогда ряд принимает вид

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4\sqrt{5}/4)^{2n}}{(2n+1)\cdot 5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$. Ряд расходится.

Итак, ряд сходится при $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{4};\,\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)$.

Пример 7.3. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(4z)^{2n}}{(2n+1)\cdot 9^n}$.

Решение . Применим признак Коши

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(4z)^{2n}}{(2n+1)\cdot 9^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16z^2}{9\cdot\sqrt[n]{2n+1}}=\dfrac{16z^2}{9}$.

Ряд сходится, если $\dfrac{16z^2}{9}<1$ или $z^2<\dfrac{9}{16}$. Решая это неравенство, получим, что $|z|<\dfrac{3}{4}$. Следовательно, область сходимости ряда — круг с центром в начале координат радиуса $R=\dfrac{3}{4}$.

Пример 7.4. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^n}\left(\dfrac{4x+5}{x+3}\right)^n$.

Решение . Применим признак Коши

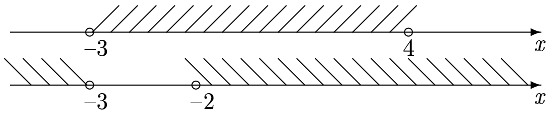
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)3^n}\left|\frac{4x+5}{x+3}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4x+5}{x+3}\right|\cdot\frac{1}{3\sqrt[n]{2n+1}}=$$

$=\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{4x+5}{x+3}\right|<1$. Ряд сходится, если $\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{4x+5}{x+3}\right|<1$ или $\left|\dfrac{4x+5}{x+3}\right|<3$.

Неравенство с модулем сводится к системе двух дробно-рациональных неравенств. Решим эту систему

$$\begin{cases}\dfrac{4x+5}{x+3}<3\\ \dfrac{4x+5}{x+3}>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x+5}{x+3}-3<0\\ \dfrac{4x+5}{x+3}+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-4}{x+3}<0\\ \dfrac{7x+14}{x+3}>0\end{cases}.$$

Решение каждого неравенства отметим на числовой прямой.



Находим решение системы $x\in(-2;\,4)$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x=4$. Тогда ряд принимает вид
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}\left(\frac{4\cdot4+5}{4+3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Ряд расходится (формула (4.5)).

Пусть $x=-2$. Тогда ряд принимает вид
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}\left(\frac{4\cdot(-2)+5}{-2+3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Исследовав сходимость знакочередующегося ряда по признаку Лейбница, получим, что ряд сходится условно.

Итак, ряд сходится при $x\in[-2;\,4)$.

Пример 7.5. Найдите область сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x+n)x}{n}\right)^n$.

Решение . Применим признак Коши
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(x+n)x|}{n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{n}+x\right|=|x|$.
Ряд сходится, если $|x|<1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x=1$. Тогда ряд принимает вид $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$. Так как $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, то по необходимому признаку сходимости (теорема 2.1) ряд расходится.

Пусть $x = -1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-n}{n}\right)^n$. Имеем $a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ и так как $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, по необходимому признаку сходимости (теорема 2.1) ряд расходится.

Итак, ряд сходится при $x \in [-1;\,1)$

Задание 7.1. Найдите области сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-4x+3)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-8x+11)^n}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\left(\frac{x+3}{3-x}\right)^n$.

Задание 7.2. Найдите области сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n}{(x-3)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 5^n\cdot x}{(x+2)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^{nx}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Задание 7.3. Найдите области сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^2}{7^{nx}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x+2\pi n)}{\sqrt[3]{n^5+x}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+2}\left(\frac{2x+3}{3-x}\right)^n$.

§8. Равномерная сходимость функциональных рядов.

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{8.1}$$

является обобщением понятия суммы функций на бесконечное число слагаемых. При этом в некоторых случаях свойства слагаемых-функций сохраняются. В этом параграфе рассмотрим, при каких условиях сохраняются свойства слагаемых.

Пусть все функции $u_n(x)$ определены в области Δ и ряд (8.1) сходится в области $D \subset \Delta$.

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}u_n(x)$ n-ую частичную сумму ряда, а через $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ — сумму ряда $\forall x \in D$.

По определению предела $\forall\varepsilon > 0$ существует номер N, начиная с которого ($\forall n > N$) выполняется неравенство

$$|S(x)-S_n(x)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |r_n(x)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

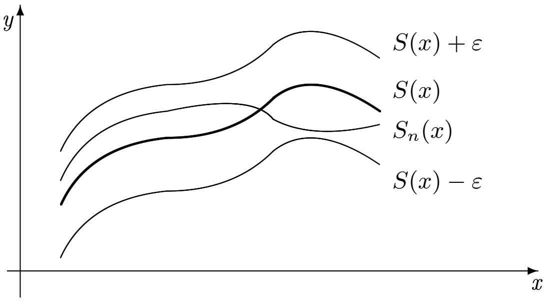
В общем случае номер N зависит не только от ε, но и от x, то есть $N = N(\varepsilon, x)$. Это означает, что найденный для точки x_1 номер $N(\varepsilon, x_1)$ может не подходить для точки x_2 ($N(\varepsilon, x_1) \neq N(\varepsilon, x_2)$). Если существует такой номер N, начиная с которого неравенство (*) выполняется сразу для всех $x \in D$, то говорят о равномерной сходимости ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно* к функции $S(x)$ на множестве D, если $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого ($\forall n > N(\varepsilon)$) для всех $\forall x \in D$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |r_n(x)| < \varepsilon. \tag{**}$$

Если такого номера не существует (номер зависит от x), то ряд *сходится неравномерно*.

Проиллюстрируем понятие равномерной сходимости графически. Распишем неравенство (**) $S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$. Двойное неравенство означает, что графики всех функций $S_n(x)$ при $n > N(\varepsilon)$ целиком расположены в полосе шириной 2ε, то есть $S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$.



Пример 8.1. Докажите, что ряд $\dfrac{1}{1+x} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ сходится равномерно на $[0; \infty)$.

Решение . В примере 7.1 для данного ряда получили, что $S_n(x) = \dfrac{1}{n+1+x}$ и $S(x) = 0$. Тогда остаток $r_n(x) = \dfrac{1}{n+1+x}$. Имеем $|r_n(x)| = \dfrac{1}{n+1+x} \leqslant \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Решив неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, получим, что $N(\varepsilon) = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Итак, номер N зависит от ε и не зависит от x. Следовательно, ряд $\dfrac{1}{1+x} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ сходится равномерно на $[0; \infty)$.

Пример 8.2. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(n+1)2^n}$ сходится равномерно на $[0;2]$.

Решение . Заданный в условии задачи ряд является знакопеременным, поэтому остаток $|r_n(x)| < c_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}$ (следствие 5.2). Для всех $[0;\ 2]$ имеем $|r_n(x)| < \dfrac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$. Решив неравенство $\dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$, получим, что $N(\varepsilon) = \dfrac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$. Итак, номер N зависит от ε и не зависит от x. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(n+1)2^n}$ сходится равномерно на $[0;2]$.

Пример 8.3. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ сходится на $[0;1]$ неравномерно.

Решение . Имеем $S_n(x) = x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + \ldots + x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$. Тогда $S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; x \in [0;\ 1) \\ 0, & \text{если} \;\; x = 1 \end{cases}$. Остаток ряда $r_n(x) = S(x) = S_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{если} \;\; x \in [0;\ 1) \\ 0, & \text{если} \;\; x = 1 \end{cases}$. При фиксированном n остаток $r_n(x) \to 1$ при $x \to 1$, следовательно, он не может быть меньше ε. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ сходится неравномерно на $[0;1]$.

При выяснении вопроса о равномерной сходимости рядов в некоторой области можно применять признаки равномерной и абсолютной сходимости рядов.

Теорема 8.1. (Вейерштрасса). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходится в области* D. *Если для всех* $x \in D$ *выполнено условие* $|u_n(x)| < c_n$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходится в области* D *равномерно и абсолютно.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ — произвольная точка области. Так как $|u_n(x_0)| < c_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ сходится, то по признаку сравнения (теорема

4.1), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится абсолютно. В силу произвольности выбора точки x_0 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно во всей области D.

Докажем теперь равномерную сходимость ряда. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого (при $n > N(\varepsilon)$) остаток $r_n^* = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$.

Тогда при $n > N(\varepsilon)$ справедливо следующее неравенство $|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$, что означает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. $\square$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ называют *мажорирующим рядом* или *мажорантой.*

Пример 8.4. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ сходится на $\mathbb{R}$ равномерно.

Решение . Так как $\dfrac{|\cos nx|}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ сходится на $\mathbb{R}$ равномерно.

Пример 8.5. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ сходится на $[0; \infty)$ равномерно.

Решение . Для построения мажоранты найдем наибольшие значения функций $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ на $[0; \infty)$. Вычислив производные $u_n'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = x(2-nx)e^{-nx}$ и приравняв их к нулю, получим $x_1 = 0$ (точка минимума) и $x_2 = \dfrac{2}{n}$ (точка максимума) функции. Следовательно, $|u_n(x)| \leqslant u_n(x_2) = \dfrac{1}{e \cdot n^2} < \dfrac{1}{n^2}$. Ряд с общим членом $c_n = \dfrac{1}{n^2}$ является мажорантой. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса заданный ряд сходится равномерно на $[0; \infty)$.

§9. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Сформулируем и докажем основные теоремы, выражающие свойства равономерно сходящихся рядов.

Теорема 9.1. (о переходе к пределу под знаком суммы). *Пусть все функции $u_n(x)$ определены в области D, x_0 — предельная точка области D и для каждого n существует $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области D равномерно. Тогда*
1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится ;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. □

Теорема 9.2. (о непрерывности суммы ряда). *Если функции $u_n(x)$ непрерывны в области D и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области D равномерно, то сумма ряда непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка, а x_0 — фиксированная точка области D. Обозначим через $S_n(x)$ — частичную сумму ряда, через $S(x)$ — сумму ряда в точке x. Докажем, что функция $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Имеем $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, $S(x_0) = S_n(x_0) + r_n(x_0)$, где $r_n(x)$ остаток ряда в точке x.

Тогда $|S(x) - S(x_0)| = |S_n(x) + r_n(x) - S_n(x_0) - r_n(x_0)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|$. $\quad (*)$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области D равномерно, то $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого $(\forall n > N(\varepsilon))$ $\forall x \in D$ справедливо неравенство $\quad |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $\quad (**)$.
В частности $|r_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Так как все функции $u_k(x)$ непрерывны в области D, то частичная сумма $S_n(x)$ непрерывна в области D (в частности, $S_n(x_0)$ непрерывна). Поэтому для выбранного значения ε $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $\quad |S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $\quad (***)$

Из формул $(*)$, $(**)$, $(***)$ следует, что для значений x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$, что означает непрерывность функции $S(x)$ в точке x_0.

В силу произвольности выбора точки получаем, что функция $S(x)$ непрерывна в области D. $\square$

Теорема 9.3. (Об аналитичности суммы ряда). *Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ являются аналитическими в области D функциями и ряд сходится в D равномерно, то сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является аналитической в D функцией.*

Рассмотрим вопрос о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a;\, b]$ к функции $S(x)$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ $\forall x \in [a;\, b]$, все функции $u_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;\, b]$, то есть существуют $\int\limits_a^b u_n(x)dx$. Если имеет место равенство

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx, \tag{9.1}$$

то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно *почленно интегрировать* на $[a;\, b]$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в области D к функции $S(z)$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ $\forall z \in D$, все функции $u_n(z)$ интегрируемы C, то есть существуют $\int\limits_C u_n(z)dz$. Если имеет место равенство

$$\int\limits_C S(z)dz = \int\limits_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C u_n(z)dz, \tag{9.2}$$

то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно *почленно интегрировать* на C.

Теорема 9.4. (О почленном интегрировании действительных рядов). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a;\, b]$ равномерно и все функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать на $[a;\, b]$.*

Теорема 9.5. (О почленном интегрировании комплексных рядов). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в области D равномерно и все функции $u_n(z)$ непрерывны на кривой C, лежащей в D, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно почленно интегрировать вдоль C.*

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a;\, b]$ к функции $S(x)$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)\ \forall x \in [a;\, b]$, все функции $u_n(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;\, b]$, то есть существуют $u_n'(x)$. Если имеет место равенство

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{9.3}$$

то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно *почленно дифференцировать* на отрезке $[a;\, b]$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в области D к функции $S(z)$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)\ \forall z \in D$, все функции $u_n(z)$ дифференцируемы в области

D, то есть существуют $u_n'(z)$. Если имеет место равенство

$$S'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z), \qquad (9.4)$$

то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно *почленно дифференцировать* в области D.

Теорема 9.6. (О почленном дифференцировании действительных рядов). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a;\, b]$, причем*

1) $u_n(x)$ дифференцируемы на $[a;\, b]$;

2) $u_n'(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится на $[a;\, b]$ равномерно.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать в любой точке отрезка $[a;\, b]$.

Теорема 9.7. (О почленном дифференцировании комплексных рядов). *Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ аналитические в области D функции и ряд сходится в области D равномерно к функции $S(z)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно почленно дифференцировать в области D любое число раз.*

$$S^{(m)}(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}(z) \qquad (9.5)$$

Пример 9.1. Можно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^7}}$ почленно дифференцировать на на всей числовой прямой?

Решение . Все функции $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^7}}$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и $u_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4}}$. Так как $\left|\dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{4/3}}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{4/3}}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд $\dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится равномерно на всей числовой прямой. По теореме 9.6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^7}}$ можно почленно дифференцировать на $\mathbb{R}$.

Пример 9.2. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, определена и непрерывна при $x \geqslant 0$. Вычислите $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Решение . Все функции $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ непрерывны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$ (пример 8.5). Следовательно, функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ при $x \geqslant 0$ непрерывна (теорема 9.2). По теореме ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[0; 1]$. Выполним интегрирование. $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 x^2 e^{-nx} dx =$
$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x^2}{n} + \dfrac{2x}{n^2} + \dfrac{2}{n^3} \right) e^{-nx} \Bigg|_0^1 = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{n^3} \right) e^{-n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^3}.$

§10. Понятие степенного ряда. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

Рассмотрим ряды, членами которых являются степенные функции $(x-a)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{10.1}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{10.2}$$

Такие ряды называют *степенными.* Так как подстановкой $x - a = y$ ряд (10.1) сводится к ряду (10.2), то все рассуждения будем проводить для ряда (10.2).

Все члены степенного ряда ряда являются непрерывными и дифференцируемыми функциями на всей числовой прямой.

Очевидно, что ряд (10.2) сходится в точке $x = 0$. Докажем теорему об строении области сходимости степенного ряда.

Теорема 10.1. (Абеля).
1) Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| < |x_0|$ *ряд сходится и притом абсолютно.*
2) Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *расходится в точке* x_1, *то он расходится при всех* x *таких, что* $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1) Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (10.2) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то при $n \to \infty$ по необходимому признаку сходимости (теорема 2.1) $a_n x_0^n \to 0$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0)$. Из свойств предела следует, что последовательность $a_n x_0^n$ ограничена, то есть существует такое число $M > 0$, что $|a_n x_0^n| \leqslant M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Возьмем произвольное x такое, что $|x| < |x_0|$. Обозначим $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| = q$. Тогда $0 < q < 1$. Имеем $|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \dfrac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right| \leqslant M q^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x| < |x_0|$ сходится и притом абсолютно.

2) Пусть ряд (10.2) в точке x_1 расходится. Докажем, что он расходится при любом $|x| > |x_1|$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что в точке x_2 такой, что $|x_2| > |x_1|$ ряд (10.2) сходится. По только что доказанному ряд будет сходиться в точке x_1. Получили противоречие. Следовательно, ряд (10.2) в точке x_2 расходится. $\square$

Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ могут представиться три возможности:
1) ряд сходится только при $x = 0$;
2) ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$;
3) при некоторых x ряд сходится, а при некоторых x расходится.

В этом случае справедлива теорема.

Теорема 10.2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится не на всей числовой прямой, но не только в точке* $x = 0$, *то существует такое число* $R > 0$, *что*
1) для всех x, *удовлетворяющих условию* $|x| < R$ *ряд сходится и притом абсолютно;*
2) для всех x *таких, что* $|x| > R$ *ряд расходится.*

При доказательстве теоремы показывается, что $R = \sup D$, где D — множество точек, в которых ряд сходится.

С геометрической точки зрения множество точек x, в которых ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, это интервал $(-R;\ R)$. Сходимость ряда в точках $\pm R$ исследуется отдельно. Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ удовлетворяет условию $|x - a| < R$, это есть интервал $(a - R;\ a + R)$.

Число $R > 0$, определенное в теореме 10.2 называется *радиусом сходимости* ряда. Если ряд (10.2) сходится на всей числовой прямой, то считают, что $R = \infty$. Если ряд (10.2) сходится только в точке $x = 0$, то считают, что $R = 0$.

Для определения радиуса сходимости степенного ряда применяют признаки Д'Аламбера и Коши.

Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, причем $a_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = d$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = d|x|$. Применим признак Д'Аламбера. Если $d|x| < 1$, то ряд сходится; если $d|x| > 1$, то ряд расходится. Используя определение радиуса сходимости, из неравенства $d|x| < 1$ получаем, что

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (10.3)$$

Аналогично, применив признак Коши, получим еще одну формулу для определения радиуса сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\ . \qquad (10.4)$$

Если дан комплексный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, то для него также справедлива теорема Абеля и, если ряд сходится не на всей комплексной плоскости, но не только в нуле, то существует радиус сходимости ряда R, такой что при $|z-a| < R$ ряд сходится, а при $|z-a| > R$ ряд расходится. Область сходимости степенного ряда в комплексной области — круг радиуса R с центром в точке a.

Пример 10.1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение . Выпишем коэффициенты членов ряда $a_n = \frac{1}{n}$.
Радиус сходимости вычислим по формуле Д'Аламбера
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Следовательно, область сходимости ряда $|x| < 1$ или $x \in (-1;\, 1)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x = 1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Применив формулу (4.5), получаем, что ряд расходится.

Пусть $x = -1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Применив признак Лейбница, получаем, что ряд сходится условно.

Следовательно, ряд сходится при $x \in [-1;\, 1)$.

Пример 10.2. Найдите радиус и интервал сходимости ряда
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n(n+1)(n+3)}$.

Решение . Выпишем коэффициенты членов ряда $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)(n+3)}$.
Радиус сходимости вычислим по формуле Коши
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n(n+1)(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{(n+1)(n+3)} = 3$.

Следовательно, область сходимости ряда $|x-2| < 3$ или $x \in (-1;\, 5)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x = -1$. Ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$. Этот ряд эквивалентен ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится согласно формуле (4.5).

Пусть $x = 5$. Ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{3^n(n+1)(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Этот ряд сходится абсолютно.

Следовательно, ряд сходится при $x \in [-1; 5]$.

Пример 10.3. Найдите радиус и интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{4^{n+3}(2n+1)}$.

Решение . Так как ряд содержит только четные степени переменной, то все коэффициенты имеют четные номера. Выпишем эти коэффициенты: $a_{2n} = \dfrac{1}{4^{n+3}(2n+1)}$.

Радиус сходимости вычислим по формуле Коши

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[2n]{|a_{2n}|}} = \lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt[2n]{4^{n+3}(2n+1)} = 2.$

Следовательно, область сходимости ряда $x \in (-2;\ 2)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

При $x = \pm 2$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot 4^{n+3}} = \dfrac{1}{64(2n+1)}$. Согласно формуле (4.5) он расходится.

Следовательно, ряд сходится при $x \in (-2; 2)$.

Задание 10.1. Найдите радиусы и интервалы сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{n^4+1}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n+4)x^n}{(2n+1)!}$.

Задание 10.2. Найдите радиусы и интервалы сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x+5)^{2n}}{9^{n+3}(4n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!x^n}{(2n)!!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{4^n n(n+1)}$.

§11. Свойства степенных рядов.

Так как степенной ряд является частным случаем функционального ряда, то для него справедливы теоремы о свойствах функциональных рядов.

Теорема 11.1. *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *радиус которого* $R > 0$, *сходится равномерно на любом отрезке* $[-r;\ r] \subset (-R;\ R)$.

Доказательство. Пусть $r < R$ — произвольное число. По теореме Абеля (теорема 10.1) степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится и притом абсолютно, то есть положительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. По признаку Вейерштрасса (теорема 8.1) на отрезке $[-r; r]$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно, так как $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$. $\square$

Теорема 11.2. *В интервале сходимости сумма степенного ряда — непрерывная функция.*

Теорема 11.3. *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можно почленно интегрировать по любому отрезку* $[a; b]$*, лежащему в интервале сходимости.*

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \qquad (11.1)$$

Большой интерес представляет собой интегрирование по промежутку с переменным верхним пределом, например, $[0; x]$ ($|x| < R$). Такой интеграл дает одну из первообразных для суммы ряда

$$\int\limits_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \qquad (11.2)$$

где $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 11.4. *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1}. \qquad (11.2)$$

Теорема 11.5. *Радиусы сходимости степенных рядов, полученных почленным интегрированием или почленным дифференцированием некоторого степенного ряда, совпадают с радиусом сходимости исходного ряда.*

Доказательство. Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Вычислим его радиус сходимости по формуле Коши $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Продифференцируем заданный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ и найдем его радиус сходимости:

$R_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = R.$

Исследование радиуса сходимости степенного ряда, полученного интегрированием заданного ряда, проводится аналогично. □

Пример 11.1. Найдите радиус, интервал сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решение . Радиус сходимости вычислим по формуле Д'Аламбера

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1.$

Область сходимости ряда $|x| < 1$ или $x \in (-1;\, 1)$.

Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ — сумма ряда. Продифференцируем ряд два раза.

$S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)x^n}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$,

$S''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots.$

Получили геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = x$ ($|q| < 1$). Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получили, что $S''(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Для нахождения самой суммы дважды почленно проинтегрируем полученное выражение

$S'(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dx}{1-x} = -\int\limits_0^x \dfrac{d(1-x)}{1-x} = -\ln(1-x)|_0^x = -\ln(1-x),$

$S(x) = -\int\limits_0^x \ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x)|_0^x + \int\limits_0^x \dfrac{x-1}{1-x}dx =$

$= (1-x)\ln(1-x) + x|_0^x = (1-x)\ln(1-x) + x$ (применили метод интегрирования по частям: $u = \ln(1-x)$, $dv = dx$, $u = -\dfrac{dx}{1-x}$, $v = x-1$).

Искомая сумма ряда $S(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.

Пример 11.2. Найдите радиус, интервал сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Решение . Радиус сходимости вычислим по формуле Коши
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$

Область сходимости ряда $|x| < 1$ или $x \in (-1;\, 1)$.

Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ — сумма ряда.

Рассмотрим вспомогательный ряд $\dfrac{S(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Обозначим его сумму через $S_1(x)$.

Для нахождения суммы ряда почленно проинтегрируем полученное выражение
$\int\limits_0^x S_1(x)dx = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x nx^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n =$
$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{x}{1-x}$ (применили формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = x$ и знаменателем $q = x$ $(|q| < 1)$).

Для нахождения суммы вспомогательного ряда вычислим производную $S_1'(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Тогда сумма исходного ряда $S(x) = xS_1(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Пример 11.3. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

Решение . Обозначим сумму ряда $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

Рассмотрим вспомогательный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

Обозначим сумму этого ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Тогда сумма числового ряда $S = \lim\limits_{x\to 1-0} S(x)$.

Радиус сходимости ряда вычислим по формуле Д'Аламбера
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{3n+1} = 1.$

Следовательно, область сходимости ряда $|x| < 1$ или $x \in (-1;\, 1)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x = -1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3n+1}$. Этот ряд расходится.

Пусть $x = 1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$. Применив признак Лейбница, получаем, что ряд сходится условно.

Следовательно, ряд сходится при $x \in (-1;\, 1]$.

Продифференцируем ряд и найдем его сумму
$S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$ (применили формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -x^3$).

Для нахождения самой суммы почленно проинтегрируем полученное выражение
$S(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \int \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1/2}{x^2-x+1} \right) dx =$
$= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

Для нахождения константы воспользуемся тем, что можно непосредственно подсчитать значение суммы при $x = 0$:
$S(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0}{3n+1} = 0.$
С другой стороны $S(0) = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} + C = C - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
Следовательно, $C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Окончательное значение суммы степенного ряда
$S(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Теперь вычислим сумму заданного в условии задачи числового ряда
$S = S(1) = \frac{1}{6} \ln 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \ln 4 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Пример 11.4. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Решение . Обозначим сумму ряда $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Рассмотрим вспомогательный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Обозначим сумму этого ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Тогда сумма числового ряда $S = \lim\limits_{x\to 1-0} S(x)$.

Радиус сходимости ряда вычислим по формуле Д'Аламбера
$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1} = 1.$

Следовательно, область сходимости ряда $|x| < 1$ или $x \in (-1;\, 1)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x = \pm 1$. Тогда ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. Применив признак Лейбница, получаем, что ряд сходится условно.

Следовательно, ряд сходится при $x \in [-1;\, 1]$.

Продифференцируем ряд и найдем его сумму
$S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$ (применили формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -x^2$).

Для нахождения самой суммы почленно проинтегрируем полученное выражение $S(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^x = \operatorname{arctg} x$.

Вычислим сумму заданного в условии задачи числового ряда
$S = S(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Задание 11.1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Покажите, что $S(x) = x - \operatorname{arctg} x$ и $S = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Задание 11.2. Найдите суммы рядов
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Задание 11.3. Найдите суммы рядов
а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+2)x^{2n}$.

Задание 11.4. Найдите суммы рядов
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{3n-1}}{3n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2x^{2n}$.

Задание 11.5. Найдите суммы рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{3n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)^2x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)^2x^{2n}$.

Задание 11.6. Найдите суммы рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{3^n\cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n}$.

§12. Ряд Тейлора.

Если функция является суммой степенного ряда в некоторой области, то говорят, что в этой области функция *разлагается в степенной ряд*. Разложение функции в степенной ряд, если это возможно, осуществляется единственным образом.

Теорема 12.1. *Если функция $f(x)$ разлагается в некотором интервале в степенной ряд, то это разложение единственно.*

Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{12.1}$$

и ряд сходится в интервале $x\in(-r;\,r)$.

Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости любое число раз. Вычислим производные

$$\begin{cases} f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \\ f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots \\ f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_4+4\cdot 3\cdot 2a_5x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-1)\cdot 2\cdot 1a_n+\ldots \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \end{cases}$$

Подсчитаем значения производных в точке $x_0=0$ $\quad f'(0)=a_1$, $f''(0)=2a_2$, $f'''(0)=3\cdot 2a_4,\ldots,f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-2)\cdot 2a_n,\ \ldots$

Таким образом, получаем значения коэффициентов

$a_1=f'(0),\quad a_2=\dfrac{f''(0)}{2},\quad a_3=\dfrac{f'''(0)}{3!},\quad \ldots\quad a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad \ldots$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (12.1), получаем ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{12.2}$$

Аналогично, если подсчитать производные в точке x_0 и раскладывать функцию по степеням $x - x_0$, то получаем ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{12.3}$$

Ряд (12.3) называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$. Ряд (12.2), частный случай ряда (12.3) называется *рядом Мак-Лорена*, для функции $f(x)$.

Возникают вопросы: какие функции разложимы в ряд Тейлора, сходится ли ряд, и, если сходится, то какая функция является его суммой? Ответы на эти вопросы дают теоремы.

Теорема 12.2. *Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на промежутке $(x_0 - r;\, x_0 + r)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ представима в виде суммы степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.*

Теорема 12.3. *Любой сходящийся в промежутке $(x_0 - r;\, x_0 + r)$ к функции $f(x)$ ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ является рядом Тейлора для своей суммы.*

§13. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

I. **Показательная функция**. $f(x) = e^x$. Эта функция имеет производные любого порядка, которые вычисляются по формуле $f^{(n)}(x) = e^x$. При $x = 0$ имеем $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$. Ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{13.1}$$

Радиус сходимости $R = \infty$, ряд сходится на всей числовой прямой.

II. **Тригонометрические функции**.

a) $f(x) = \sin x$. Эта функция имеет производные любого порядка, которые вычисляются по формуле $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. При $x = 0$ имеем $f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}$. Тогда при $n = 2k$ — $a_{2k} = 0$, а при $n = 2k+1$ — $a_{2k+1} = \dfrac{1}{(2k+1)!}$. Ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (13.2)$$

Радиус сходимости $R = \infty$, ряд сходится на всей числовой прямой.

b) $f(x) = \cos x$. Эта функция имеет производные любого порядка, которые вычисляются по формуле $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ При $x = 0$ $f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2}$. Тогда при $n = 2k+1$ — $a_{2k+1} = 0$, а при $n = 2k$ — $a_{2k} = \dfrac{1}{(2k)!}$. Ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (13.3)$$

Радиус сходимости $R = \infty$, ряд сходится на всей числовой прямой.

III. **Логарифмическая функция** $f(x) = \ln(1+x)$. Эта функция имеет производные любого порядка, которые вычисляются по формуле $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. При $x = 0$ имеем $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ и $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (13.4)$$

Радиус сходимости $R = 1$. Ряд сходится при $x \in (-1; 1]$.

IV. **Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия**. Прогрессия сходится при $|q| < 1$ и ее сумма находится по формуле

$$b_1(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots) = \frac{b_1}{1-q}. \quad (13.5)$$

V. **Степенные функции** $f(x) = (1+x)^\alpha$. Эти функции имеют производные любого порядка, которые вычисляются по формуле $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Ряд Тейлора для этих функций имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \tag{13.6}$$

Радиус сходимости $R = 1$. Ряд сходится при $x \in (-1;\, 1)$.

Рассмотрим два наиболее часто встречающихся частных случая. Для $\alpha = \frac{1}{2}$ ряд Тейлора имеет вид

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n. \tag{13.7}$$

Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ ряд Тейлора имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n. \tag{13.8}$$

VI. **Гиперболические функции**. При нахождении разложения этих функций в ряд Тейлора используются стандартные разложения для показательных функций e^x и e^{-x}.

a) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{13.9}$$

b) $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{13.10}$$

Ряды (13.9) и (13.10) сходятся на всей числовой прямой ($R = \infty$).

VII. **Дробно-рациональные функции**.

Если $f(x)$ — целая функция, то она сама является рядом Тейлора, причем число ненулевых слагаемых конечно и не превосходит степени многочлена.

Если $f(x) = \frac{1}{1-x}$, то она представима как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$ при $|q| < 1$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{13.11}$$

Если $f(x)$ — дробно-рациональная функция, то сначала представляем ее в виде суммы простых дробей, а затем к каждой дроби применим формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии или ее производной.

§14. Формула Тейлора.

При практических вычислениях невозможно подсчитать бесконечную сумму. Поэтому в ряде Тейлора берут лишь конечное число слагаемых, то есть рассматривают конечную сумму (частичную сумму ряда).

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция одной переменной, имеющая непрерывные производные до $n+1$-го порядка включительно. Тогда можно записать

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x). \end{gathered} \tag{14.1}$$

или в краткой форме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x). \tag{14.1$'$}$$

Равенство (14.1) называют *формулой Тейлора*, $r_n(x)$ — *остаточный член формулы Тейлора.*

Формула Тейлора представляет собой частичную сумму ряда Тейлора, а остаточный член в формуле Тейлора совпадает с остатком ряда.

Оценим остаточный член в формуле Тейлора. Эта оценка может осуществляться в различных формах. Наиболее распространенными являются следующие:

Остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{14.2}$$

где $c \in (x_0;\, x)$;

остаточный член в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0)) \cdot (1 - \Theta)^n}{n!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{14.3}$$

где $0 < \Theta < 1$;

остаточный член в форме Пеано

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), \tag{14.4}$$

(остаток — бесконечно малая порядка малости больше чем n).

Если задана функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ многих переменных, то ряд Тейлора для нее имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + r_n(x), \tag{14.5}$$

где $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, $d^k f(x_0) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^k f(x_0)$ — дифференциал порядка k.

§15. Приложения степенных рядов.

I. **Представление функций в виде суммы ряда.**

Пример 15.1. Разложите функцию $f(x) = e^{-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение . В формуле (13.1) заменим x на $-x^2$. Получим разложение $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$. Радиус сходимости полученного ряда $R = \infty$ и ряд сходится на всей числовой прямой.

Пример 15.2. Разложите функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение . Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ не имеет стандартного разложения. Вычислим ее производную $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Производная является суммой геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -x^2$. Имеем $\dfrac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.
Чтобы найти разложение в ряд заданной функции, вычислим интеграл $f(x) = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Область сходимости ряда — $x \in (-1;\, 1)$.

Пример 15.3. Разложите в ряд Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{5-x}{12-x-x^2}$.

Решение . Представим дробь в виде суммы простых дробей
$f(x) = \dfrac{5-x}{12-x-x^2} = \dfrac{9/7}{4+x} + \dfrac{2/7}{3-x}$.

Применяям формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии, представим каждую из дробей в виде ряда.
$\dfrac{1}{4+x} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{4}} = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{x^3}{4^3} + \ldots\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{4^{n+1}}$ (геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -\frac{x}{4}$).
Чтобы ряд сходился необходимо, чтобы $\left|\dfrac{x}{4}\right| < 1$ или $|x| < 4$.
$\dfrac{1}{3-x} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{x^3}{3^3} + \ldots\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n+1}}$ (геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{x}{3}$). Чтобы ряд сходился необходимо, чтобы $\left|\dfrac{x}{3}\right| < 1$ или $|x| < 3$.

Объединяя полученные формулы, запишем разложение для дроби
$f(x) = \dfrac{9}{7}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^n}{4^{n+1}} + \dfrac{2}{7}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{9\cdot(-1)^n}{7\cdot 4^{n+1}} + \dfrac{2}{7\cdot 3^{n+1}}\right)x^n$.
Ряд сходится в промежутке, в котором сходятся оба слагаемых. Следовательно, $x \in (-3;\, 3)$.

Пример 15.4. Разложите в ряд Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Решение . Представим дробь в виде суммы простых дробей
$f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
Первая дробь представляет собой сумму бесконечно убывающей геомет-

рической прогрессии $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$.
Вторую дробь можно разложить в ряд, применив операцию почленного дифференцирования ряда $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =$
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Чтобы получить искомое разложение нужно из второго разложения вычесть первое
$f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Область сходимости полученного ряда $x \in (-1;\, 1)$.

Пример 15.5. Разложите в ряд Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x - 2}$ по степеням $x + 1$.

Решение . Представим дробь в виде суммы простых дробей
$f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+2}$.
В знаменателе каждой дроби выделим слагаемые $x + 1$ и применим к каждой дроби формулу суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \dfrac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$$

(знаменатель прогрессии $q = \dfrac{x+1}{2}$). Ряд сходится при $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| < 1$ или $|x+1| < 2$.

$\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x+1+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ (знаменатель прогрессии $q = -(x+1)$).
Ряд сходится при $|x+1| < 1$.

Объединяя полученные формулы, запишем разложение для дроби

$$\frac{3x}{x^2 + x - 2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}} + 2(-1)^n\right)(x+1)^n.$$

Область сходимости полученного ряда $x \in (-2;\, 0)$.

II. **Приближенное вычисление значений функций.**

Пример 15.6. Вычислите приближенно $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение . Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. В формуле (13.1) положим $x = \frac{1}{2}$ и запишем разложение $\sqrt{e} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \cdot k!} + r_n$.

Оценим остаток. Для этого рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа $r_n < \frac{e^c}{(n+1)!}$, где $0 < c < 0,5$.

Так как $e^c < \sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$, то $r_n < \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} < \frac{1}{1000}$. Неравенство $2^{n+1} \cdot (n+1)! > 1000$ справедливо при $n \geqslant 4$.

Итак, $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{16 \cdot 24} \approx 1,648$.

III. **Вычисление интегралов.**

Пример 15.7. Вычислите интеграл $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Решение . Интеграл $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx$ в элементарных функциях не берется. Для его вычисления разложим подинтегральную функцию в ряд, применив формулу (13.2). Имеем

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Пример 15.8. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 10^{-3}.

Решение . Разложение подинтегральной функции в ряд получено в примере 15.1. Тогда имеем

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Оценим остаток ряда. Остаток знакочередующегося ряда по модулю не превосходит модуля первого отброшенного члена, то есть $|r_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < \frac{1}{1000}$. Неравенство $(2n+3)(n+1)! > 1000$ справедливо при $n \geqslant 4$. Следовательно, $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 6} + \frac{1}{9 \cdot 24} \approx 0,462$.

Задание 15.1. Разложите в ряд Тейлора функции

а) $f(x) = e^{-4x}$; б) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}$; в) $f(x) = \sqrt{1-x^4}$.

Задание 15.2. Разложите в ряд Тейлора функции
а) $f(x) = \sin\dfrac{x^2}{2}$; б) $f(x) = (x+1)\cos\sqrt{x}$; в) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

Задание 15.3. Разложите в ряд Тейлора рациональные дроби по степеням $x - a$
а) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x-8}$, $a = 0$; б) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x-8}$, $a = -2$;
в) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x-8}$, $a = 2$; г) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x-8}$, $a = -4$.

Задание 15.4. Разложите в ряд Тейлора рациональные дроби по степеням $x - a$
а) $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2-6x+5}$, $a = 3$; б) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-x-12}$, $a = 2$;
в) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x+5}$, $a = 1$; г) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-7x+10}$, $a = 1$.

Задание 15.5. Вычислите интегралы, применив стандартное разложениефункции в ряд
а) $\int\limits_0^x \dfrac{\sin x^2}{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; в) $\int\limits_0^x x^3\sqrt{1+x/2}\,dx$.

Задание 15.6. Вычислите интегралы, применив стандартное разложениефункции в ряд
а) $\int\limits_0^x \dfrac{e^{2x}-1}{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^x \dfrac{\cos x^2 - 1 + x^4}{x^3}\,dx$; в) $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+2x^2)-2x^2}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

§16. Ряды Фурье.

В предыдущих параграфах мы рассматривали разложение функции в ряд по базису, который состоит из степеней переменной x. Однако, в качестве базиса можно брать и другие системы независимых функций, например, систему тригонометрических функций

$$1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{\pi n x}{l}, \cos\frac{\pi n x}{l}, \ldots, \tag{16.1}$$

определенных на $(-l;\, l)$ и ее подсистемы

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots, \tag{16.2}$$

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{\pi n x}{l},\ldots. \tag{16.3}$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $(-l;\ l)$, то ей можно сопоставить ряд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{16.4}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx \\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \end{cases} \tag{16.5}$$

Ряд (16.4) называется *рядом Фурье* для функции $f(x)$ на промежутке $(-l;\ l)$.

Если $l=\pi$, то формулы (16.4) и (16.5) выглядят значительно проще

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{cases} \tag{16.6}$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{16.7}$$

Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на промежутке $(a;\ b)$, если этот промежуток можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых функция $f(x)$ монотонна. Кусочно-монотонная ограниченная функция может иметь разрывы только первого рода (скачки).

Функция $f(x)$ называется *кусочно-дифференцируемой* на промежутке $(a;\ b)$, если этот промежуток можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых функция $f(x)$ дифференцируема. Если при этом производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна, то функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой.*

Сформулируем основные теоремы о сходимости ряда Фурье.

Теорема 16.1. *Если $f(x)$ кусочно-монотонная ограниченная на $(-l;\, l)$ функция, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого промежутка, причем его сумма*

$$\left\{\begin{array}{lcl} S(x) & = & \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \\ S(l) & = & S(-l) = \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}. \end{array}\right. \tag{16.8}$$

Заметим, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x, то $S(x) = f(x)$.

Теорема 16.2. *Ряд Фурье для кусочно-дифференцируемой на $(-l;\, l)$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого промежутка и его сумма находится по формулам (16.8).*

Пример 16.1. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$.

Решение . Найдем коэффициенты ряда Фурье для данной функции

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\left\{\begin{array}{cc} 0, & n = 2k \\ -\dfrac{2}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1 \end{array}\right..$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

При вычислении коэффициентов применили правило интегрирования по частям. Например, при вычисленнии a_n обозначали $u = x$, $dv = \cos nxdx$, а при вычисленнии b_n — $u = x$, $dv = \sin nxdx$

Разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$

Так при $x \in (-\pi;\ \pi)$ функция непрерывна, то $S(x) = f(x)$ и $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

§17. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Пусть функция $f(x)$ — четная. Тогда функции $f(x)\cos nx$ — четная, а функции $f(x)\sin nx$ — нечетная. По свойствам интеграла от четной и нечетной функций по симметричному промежутку имеем

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0 \end{cases} \tag{17.1}$$

Ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}, \tag{17.2}$$

Пусть функция $f(x)$ — нечетная. Тогда функции $f(x)\cos nx$ — нечетная, а функции $f(x)\sin nx$ — четная. По свойствам интеграла от четной и нечетной функций по симметричному промежутку имеем

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0 \\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \end{cases} \tag{17.3}$$

Ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{17.4}$$