При записи определений, теорем и различных формул мы будем использовать логические символы: $\forall$ — для всех, для каждого, $\exists$ — существует, $\exists!$ — существует единственный, $\Rightarrow$ — влечет, $\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда.

Введение.

§1. Множества. Операции над множествами.

Понятие множества принадлежит к числу основных, неопределяемых понятий математики. Под множеством понимают совокупность объектов (предметов), объединенных по какому-либо признаку. Один из создателей теории множеств немецкий математик Георг Кантор так определяет множество "Множество есть многое, мыслимое как единое целое".

Обозначают множества заглавными латинскими буквами: A, B, X, Y, Z, ... Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***. Условие, что объект a принадлежит множеству A записывают $a \in A$. Если объект a не является элементом множества A, то записывают $a \notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента называют ***пустым*** и обозначают $\emptyset$.

Задать множество можно различными способами. Конечное множество можно задать перечислением элементов. Можно задать множество указанием характеристического свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству. Обозначают такое множество $A = \{x|P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство элементов множества.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A ($B \subset A$). Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B ***равны***, то есть $A = B$. Самое большое множество, рассматриваемое в задаче, называют ***универсальным*** и обозначают U.

Рассмотрим операции над множествами:

Пусть даны два множества A и B.

1) ***Объединение множеств*** A и B — это множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B:

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\} \text{ (}\vee\text{ – читается "или");}$$

2) ***Пересечение множеств*** A и B — это множество элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A и множеству B:

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\} \text{ (}\wedge\text{ – читается "и");}$$

3) ***Разность множеств*** A и B — это множество элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\};$$

4) ***Дополнение множества*** A — это множество элементов универсального множества, не принадлежащих множеству A:

$$\overline{A} = \{x \,|\, x \in U \wedge x \notin A\};$$

5) ***Декартово произведение*** множеств A и B — это множество упорядоченных пар, первые компоненты которых принадлежат множеству A, а вторые — множеству B:

$$A \times B = \{(x,\, y) |\, x \in A \wedge y \in B\}\ ;$$

Можно определить декартово произведение любого конечного числа множеств, а именно,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Декартово произведение n одинаковых множеств $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\,\text{сомножителей}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\}$ будем обозначать $A^{(n)}$.

Пусть даны два множества A и B. Если каждому элементу $a \in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $b \in B$ и каждый элемент $b \in B$ соответствует единственному элементу $a \in A$, то говорят, что между множествами A и B установлено ***взаимно однозначное соответствие***. Если между элементами двух множеств можно каким-либо способом установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества имеют одинаковую ***мощность***. (Понятие мощности есть обобщение понятия числа элементов множества, если множество бесконечно).

§2. Числовые множества. Модуль числа.

При изучении математического анализа мы будем рассматривать множество действительных чисел $\mathbb{R}$, его подмножества и декартово произведение $\mathbb{R}_n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ — множество упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это произведенение обозначают также $\mathbb{R}_n$.

Геометрически множество действительных чисел $\mathbb{R}$ можно изобразить точками на прямой. Причем между множеством действительных чисел и множеством точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие: действительному числу $x \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие точку на прямой с координатой x.

Во множестве действительных чисел введены операции сложения и умножения чисел.

Множество действительных чисел дополняют двумя элементами $-\infty$ и $+\infty$, называемыми *минус бесконечность* и *плюс бесконечность*. Множество $\mathbb{R}$, дополненное элементами $-\infty$ и $+\infty$, называют ***расширенным множеством действительных чисел*** и обозначают $\overline{\mathbb{R}}$. Иногда вместо $-\infty$ и $+\infty$ будем говорить просто ∞.

С символами $\pm\infty$ нельзя обращаться как с обычными числами. Операции с этим символами выполняются по следующим правилам:

1) $a + (\pm\infty) = \pm\infty$;
2) $a - (\pm\infty) = \mp\infty$;
3) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, если $a > 0$;
4) $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, если $a < 0$;
5) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$;
6) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
7) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
8) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;
9) $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;
10) $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

Кроме того, на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ введено ***отношение порядка*** "меньше или равно"($\leqslant$), обладающее свойствами:

1) $x \leqslant x$ для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ (свойство рефлексивности);

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (свойство транзитивности);

3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;

4) для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется одно из отношений $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$;

5) если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$ для любого элемента $z \in \mathbb{R}$;

6) если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant xy$.

В курсе анализа будем использовать следующие подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$:

множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1;\, 2;\, 3;\, \ldots\}$;

множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0;\, \pm 1;\, \pm 2; \ldots\}$;

множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{\, \frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;

отрезок $[a;\, b]$ – множество точек x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$;

интервал $(a;\, b)$ – множество точек x, удовлетворяющих условию $a < x < b$;

полуинтервалы $[a;\, b)$ и $(a;\, b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$ соответственно;

лучи $(a;\, +\infty)$, $(-\infty;\, b)$, $[a;\, +\infty)$, $(-\infty;\, b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $a < x$, $x < b$, $a \leqslant x$, $x \leqslant b$ соответственно.

В дальнейшем все перечисленные множества будем объединять термином ***промежуток***.

Множество действительных чисел обладает свойством ***плотности***: между любыми двумя действительными числами расположено еще хотя бы одно действительное число, а, значит, бесконечно много действительных чисел, в самом деле, если a и b $(a < b)$ – два различных действительных числа, то их полусумма $\dfrac{a+b}{2}$ расположена между ними, так как $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

Используя свойство плотности множества действительных чисел, можно доказать важное для изложения курса анализа утверждение (**принцип Кантора**), который называют также **леммой о вложенных от-**

резках.

Лемма 2.1. *Для всякой последовательности вложенных друг в друга отрезков, длины которых, убывая, стремятся к нулю, существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам.*

Если имеем последовательность $[a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset [a_3;\, b_3] \supset \ldots \supset [a_n;\, b_n] \supset \ldots$ вложенных друг в друга отрезков, причем $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то пересечение всех отрезков $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n;\, b_n] \neq \emptyset$, то есть не пусто.

Во многих определениях и теоремах курса математического анализа используется понятие модуля.

Модулем числа a называется само число a, если оно неотрицательно, и число, противоположное a, если a отрицательно, то есть

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}.$$

Сформулируем основные свойства модуля:

1) $|a| \geqslant a, \ |a| \geqslant -a$;

2) $|a| = \max\{a,\, -a\}$;

3) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

4) $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$;

5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}\,(b \neq 0)$;

Геометрический смысл модуля: модуль числа a $|a|$– это расстояние на числовой прямой от точки 0 до точки a. Тогда при $a > 0$ неравенство $|x| < a$ эквивалентно двойному неравенству $-a < x < a$ и задает на прямой интервал $(-a;\, a)$, а неравенство $|x| > a$ задает объединение интервалов $(-\infty;\, -a) \cup (a;\, +\infty)$.

Числовое множество A называется ***ограниченным сверху***, если существует число M такое, что $a \leqslant M$ для всех $a \in A$. Если существует число m такое, что $a \geqslant m$ для всех $a \in A$, то множество A называется ***ограниченным снизу***.

Число M называют ***верхней***, а число m – ***нижней границей*** множества. Ограниченное сверху и снизу множество называют ***ограниченным***. В этом случае существуют такие числа M и m, что для всех $a \in A$ выполняется неравенство $m \leqslant a \leqslant M$. Условие ограниченности множества часто записывают в виде неравенства с модулем $|a| \leqslant M$, эквивалентного предыдущему неравенству. Числа M и m определяются неоднозначно. Если множество ограничено, то оно имеет много верхних и нижних границ. Наименьшая из верхних границ называется ***точной верхней границей*** и обозначается $\sup A$ (читается "супремум"), а наибольшая из нижних границ называется ***точной нижней границей*** и обозначается $\inf A$ (читается "инфимум"). Итак, $M = \sup A$, если для всех элементов $a \in A$ выполняется неравенство $a \leqslant M$ и для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой элемент $a' \in A$, что $a' > M - \varepsilon$. Аналогично, $m = \inf A$, если для всех элементов $a \in A$ выполняется неравенство $a \geqslant m$ и для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой элемент $a'' \in A$, что $a'' < m + \varepsilon$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу. Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.*

Если множество A не ограничено сверху, то для любого числа M найдется элемент $a_0 \in A$ такой, что $a_0 > M$. В этом случае полагают, что $\sup A = +\infty$. Аналогично, для неограниченного снизу множества полагают, что $\inf A = -\infty$.

§3. Понятие окрестности точки.

При определении многих понятий математического анализа используется понятие окрестности. Определим окрестность в пространствах различной размерности.

Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^{(1)}$ радиуса r называется множество точек координатной прямой, расстояние от которых до точки a не превосходит r. Обозначается окрестность $U_r(a)$. Таким образом,

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, \rho(x,\, a) < r\}.$$

Используя понятие расстояния и геометрический смысл модуля, окрестность можно определить как множество точек координатной прямой, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < r$. Это множество точек задает на прямой интервал:

$$U_r(a) = (a - r;\, a + r).$$

Все точки окрестности $U_r(a)$ кроме точки a образуют ***проколотую окрестность*** $\dot{U}_r(a)$:

$$\dot{U}_r(a) = U_r(a) \setminus \{a\}.$$

Проколотая окрестность – это множество точек прямой, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x,\, a) < r$. Она задается объединением интервалов

$$\dot{U}_r(a) = (a - r;\, a) \cup (a;\, a + r).$$

На прямой можно рассматривать не всю окрестность точки a, а ее правую или левую половины.

Правая полуокрестность $U_r^+(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^{(1)}$ радиуса r – это множество точек прямой, удовлетворяющих условию
$\{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, a < x < a + r\}$, то есть

$$U_r^+(a) = \{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, a < x < a + r\} = (a;\, a + r).$$

Левая полуокрестность $U_r^-(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^{(1)}$ радиуса r – это множество точек прямой, удовлетворяющих условию
$\{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, a - r < x < a\}$, то есть

$$U_r^-(a) = \{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, a - r < x < a\} = (a - r;\, a).$$

Окрестностью бесконечно удаленной точки $U_E(\infty)$ радиуса E называется множество точек прямой, лежащих вне отрезка $[-E;\, E]$, то есть

$$U_E(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^{(1)} \,|\, |x| > E\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{(n)}$, где $n > 1$ будем рассматривать два типа окрестностей: шар и параллелепипед.

Шаровой окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^{(n)}$ радиуса r называется множество точек пространства $\mathbb{R}^{(n)}$, расстояние от которых до точки a не превосходит r. Если $a=(a_1;\ a_2;\ \ldots;a_n)$, $x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;x_n)\in\mathbb{R}^{(n)}$, то

$$U_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^{(n)}\mid \rho(x,\,a)<r\}$$

или
$$U_r(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^{(n)}\mid \sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)^2<r^2\right\}.$$

Окрестностью–параллелепипедом точки $a\in\mathbb{R}^{(n)}$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^{(n)}$, каждая координата которой удалена от соответствующей координаты точки a на расстояние меньше, чем r_k. Если $a=(a_1;\ a_2;\ \ldots;a_n)$, $x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;x_n)\in\mathbb{R}^{(n)}$, то

$$\Pi(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^{(n)}\mid \rho(x_k,a_k)<r_k,\ \forall k=\overline{1,n}\right\}.$$

На плоскости (пространство $\mathbb{R}^{(2)}$) окрестность первого типа – это круг, а окрестность второго типа – прямоугольник, в пространстве $\mathbb{R}^{(3)}$ окрестность первого типа – это шар, а окрестность второго типа – параллелепипед.

Окрестностью бесконечно удаленной точки $U_E(\infty)$ радиуса E называется множество точек пространства $\mathbb{R}^{(n)}$, лежащих вне шара радиуса E, то есть

$$U_E(\infty)=\{x\in\mathbb{R}^{(n)}\mid |x|>E\}$$

или
$$U_r(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^{(n)}\mid \sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)^2>E^2\right\}.$$

Введем еще несколько понятий, необходимых для дальнейшего изложения материала.

Точка a называется ***внутренней*** точкой множества X, если найдется окрестность этой точки, целиком лежащая в X, и точка a называется ***граничной*** точкой множества X, если в любой окрестности этой точки есть точки, принадлежащие X и не принадлежащие X. Множество, все точки которого внутренние, называется ***открытым***, а содержащее все свои граничные точки – ***замкнутым***. Отрезок является замкнутым множеством, а интервал – открытым.

Точка x_0 называется ***точкой сгущения*** множества X, если в любой окрестности этой точки лежит хотя бы одна точка из X, отличная от точки x_0. Из определения точки сгущения вытекает, что в любой окрестности точки x_0 лежит бесконечно много точек из X. Заметим, что сама точка x_0 может не принадлежать множеству X.

§4. Понятие функции. Основные элементарные функции.

При изучении различных явлений мы, обычно, имеем дело с совокупностью переменных величин, связанных между собой так, что значения одних переменных величин (независимых переменных) определяют значения других переменных величин (зависимых переменных или функций). Понятие функции является одним из центральных понятий математического анализа.

Пусть даны два множества X и Y. Говорят, что задано ***отображение*** множества X во множество Y или, задана ***функция***, если каждому элементу $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Для обозначения того факта, что y есть функция от x пишут $f : X \longrightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$, $y = f(x)$. Множество X называют ***областью определения*** функции и обозначают $D(f)$, а множество Y – ***множеством значений*** функции и обозначают $E(f)$. Значение функции y, соответствующее аргументу x, называется ***образом*** элемента x. Множество элементов $x \in X$, которым соответствует одно и тоже значение $y \in Y$, называется ***прообразом*** элемента y.

Две функции называются ***равными***, если они имеют одинаковые области определения и каждому значению аргумента $x \in X$ они ставят в соответствие одну и ту же точку $y \in Y$.

Наиболее распространенный способ задания функции — аналитический, то есть с помощью формулы. Если не сделано специальной оговорки, то за область определения функции берут все значения аргумента, для которых указанные в формуле действия выполнимы. Иногда для задания функции используют не одну, а несколько формул. В этом случае, для нахождения значения функции необходимо сначала определить какому условию удовлетворяет аргумент, а затем воспользоваться формулой, записанной в соответствующей строчке.

Типы функций

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$ (X и Y – подмножества множества действительных чисел). Тогда функцию $f : X \longrightarrow Y$ называют ***числовой*** или ***скалярной*** функцией одной переменной.

Основные элементарные функции.

1. Степенные функции $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = x^{m/n}$ $(m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N})$.

2. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

3. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

4. Показательные функции $y = a^x$ (при $a > 1$ и при $0 < a < 1$).

5. Логарифмические функции $y = \log_a x$ (при $a > 1$ и при $0 < a < 1$).

Чтобы наглядно представить поведение скалярной функции строят график функции. ***Графиком*** функции $y = f(x)$ называют множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью. Для построения графика функции полезно учитывать симметрию графика и его периодичность.

Задание 4.1. Постройте графики функций
а) $y = 0,5x^2 - 3x - 1$; б) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$; в) $y = 2^{x-1}$; г) $y = \sqrt{x-4} - 3$
.

Задание 4.2. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+4, & \text{если} \quad x \leqslant 0 \\ (x-2)^2, & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если область ее определения симметрична относительно точки 0 и для всех $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если область ее определения симметрична относительно точки 0 и для всех $x \in D(f)$ $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое положительное число T, что x, $x + T \in D(f)$ и $f(x+T) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Если из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***неубывающей*** на промежутке X. Если из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***невозрастающей*** на промежутке X. Возрастающие или убывающие на промежутке X функции называют ***монотонными***.

Будем говорить, что задана ***функция нескольких переменных (числовая функция векторного аргумента)***, если каждому элементу $x = (x_1;\, x_2; ...; x_n) \in X \subset \mathbb{R}^{(n)}$ ставится в соответствие по некоторому закону элемент $y \in Y \subset \mathbb{R}$. Обозначается функция векторного аргумента

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Если каждому элементу $x \in X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие по некоторому закону элемент $y = (y_1;\, y_2; ...; y_m) \in Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, то будем говорить, что задана ***векторная функция скалярного аргумента***. Обозначается векторная функция скалярного аргумента

$$y = f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & f_1(x) \\ y_2 & = & f_2(x) \\ & \cdots & \\ y_m & = & f_m(x) \end{array} \right\}$$

Если каждому элементу $x = (x_1;\, x_2; ...; x_n) \in X \subset \mathbb{R}^{(n)}$ ставится в соответствие по некоторому закону элемент $y = (y_1;\, y_2; ...; y_m) \in Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, то будем говорить, что задана ***векторная функция векторного аргумента***. Обозначается векторная функция векторного аргумента

$$y = f(x) = \left\{ \begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array} \right\}$$

§5. Суперпозиция функций. Обратная функция.

Задано три множества $X \subset \mathbb{R}^{(n)}$, $Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, $Z \subset \mathbb{R}^{(k)}$ и пусть функция $\varphi : X \longrightarrow Y$, а функция $f : Y \longrightarrow Z$, причем $D(f) = E(\varphi)$. Функция $F : X \longrightarrow Z$ называется ***суперпозицией функций*** или ***сложной функцией***, если выполняется следующее соотношение $F(x) = (f \circ \varphi)x = f(\varphi(x))$.

Сложную функцию можно представить в виде цепочки элементарных функций. Например, функцию $y = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$ можно представить как суперпозицию функций $y = \sqrt{t}$ и $t = x^2 - 4x + 7$.

Пусть функция $y = f(x)$ каждому элементу $x \in X \subset \mathbb{R}$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y \subset \mathbb{R}$ и каждый элемент $y \in Y$ поставлен в соответствие единственному элементу $x \in X$. Такая функция называется ***взаимно-однозначной***. Построим отображение $\varphi : Y \to X$ по следующему правилу: $x = \varphi(y)$, если $y = f(x)$. Функция $x = \varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$. Области определения и множество значений прямой и обратной функций меняются ролями. Если у числовой функции независимую переменную обозначить через x, функцию через y, то получим, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.

§6. Функции в экономике.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Используются как линейные, так и степенные, дробно-рациональные, показательные (экспонента), логарифмические и другие. Периодичность некоторых экономических процессов позволяет примененять тригонометрические функции. Кроме функций, заданных аналитически, часто используются функции, задаваемые с помощью реккурентных соотношений, связывающих объекты мсследования в различные периоды времени.

Привем примеры часто используемых в экономике функций.

1. *Функция полезности* – зависимость результатадействия от интенсивности этого действия.

2. *Производственная функция* – зависимость результатов производственной деятельности от факторов, обуславливающих эту деятельность.

3. *Функция выпуска* – зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* – зависимость издержек производства от объема производимой продукции.

5. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость спроса, потребления или предложения на отдельные виды товаров или услуг от различных факторов (цена, доход, количество товара и другие).

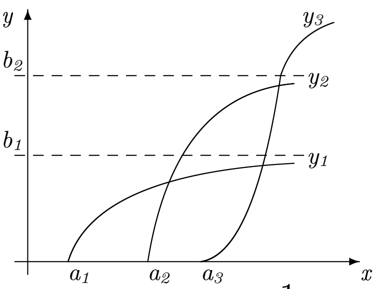


рис. 1

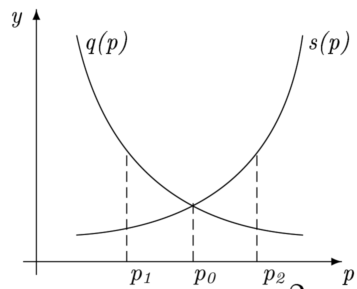


рис. 2

Исследуя зависимость спроса на товары от дохода $y_1 = \dfrac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}$, $y_2 = \dfrac{b_2(x-a_2)}{x-c_2}$, $y_3 = \dfrac{b_3x(x-a_3)}{x-c_3}$ $(x > a_1,\ x > a_2,\ x > a_3)$ (функции Торнквиста) можно установить уровни доходов a_1, a_2, a_3, при которых начинается приобретение тех или иных товаров и уровни насыщения b_1, b_2 для групп товаров первой, второй необходимости и предметов роскоши (заметим, что $a_1 < a_2 < a_3$, $b_1 < b_2$) (рис. 1).

Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложения, можно установить равновесную цену данного товара в условиях рынка (паутинообразная модель). На рисунке 2 приведены кривые спроса $y = q(p)$ и предложения $y = s(p)$, показывающие зависимость спроса и предложения от цены p. Точка их пересечения p_0 — это равновесная цена, то есть в точке p_0 спрос на товар совпадает с предложением этого товара на рынке.

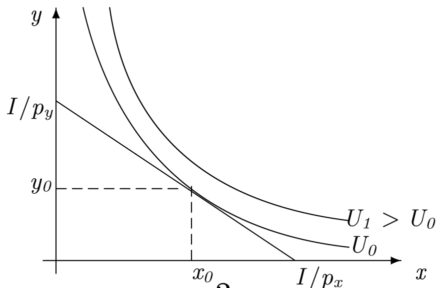


рис. 3

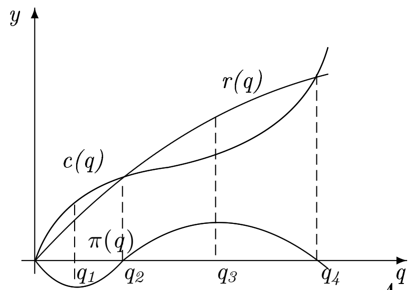


рис. 4

Изучая в теории потребительского спроса *кривые безразличия* (линии, вдоль которых полезность двух благ x и y одна и та же), например, задаваемые в виде $xy = U$, и *линию бюджетного ограничения* $p_x x + p_y y = I$ при ценах благ p_x и p_y и доходе потребителя I, можно установить оптимальное количество благ x_0 и y_0, имеющих максимальную полезность U_0 (рис. 3).

Рассматривая *функции издержек (полных затрат)* $c(q)$ и *дохода* $r(q)$ предприятия, можно установить зависимость *прибыли* $\pi(q) = c(q) - r(q)$ от объема производства q и выявить уровни, при которых производство убыточно ($0 < q < q_2$), прибыльно ($q_2 < q < q_4$), дает максимальный убыток ($q = q_1$), приносит максимальную прибыль ($q = q_3$) (рис. 4).

Так как процессы в экономике зависят от многих факторов, то для их описания применяют функции двух и более переменных. Например, издержки производства y являются функцией от материальных затрат x_1 и расходов на оплату рабочей силы x_2, спрос на товар y является функцией от цены товара x_1 и средней заработной платы x_2, производительность труда y является функцией от уровня квалификации x_1 и уровня автоматизации труда x_2. При моделировании экономики страны в качестве основных переменных (ресурсов) используют затраты труда L и объем производственных фондов K. В роли функции (результата деятельности экономики) выступает национальный доход, поэтому в макроэкономике Y рассматривают как функцию двух переменных $Y = F(L,\, K)$. В микроэкономике (при моделировании экономической деятельности отдельного предприятия, цеха, фирмы т.д.) через Y обозначают объем выпускаемой продукции.

Среди функций выделяют *мультипликативные* функции, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения *факторных* переменных, и обращающуюся в ноль, если хотя бы один из факторов отсутствует, то есть если $y = f(x_1, x_2)$, то $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$. Это означает, что при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно.

Считают также, что при пропорциональном росте используемых ресурсов производства объем производства увеличивается в такое же число раз, то есть $f(mx_1, mx_2) = mf(x_1, x_2)$. Такие функции называют *линейно однородными.*

Используются также *сепарабельные* функции, которые дают возможность выделить влияние на зависимую переменную различных факторных переменных, в частности, *аддитивные* функции, представляющие одну и ту же зависимую переменную как при суммарном, так и при раздельном воздействии факторных переменных.

Одно из базовых понятий экономической теории *функция полезности* — зависимость результата действия от интенсивности этого действия $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Чаще всего встречаются следующие ее виды:

а) $z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$ $(a_i > 0,\ x_i > c_i \geqslant 0)$ – *логарифмическая функция*;

б) $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{1 - b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$ $(a_i > 0,\ 0 < b_i < 1,\ x_i > c_i \geqslant 0)$. Такую функцию называют *функцией постоянной эластичности.*

Большое значение имеет *производственная функция*, выражающая зависимость результатов производственной деятельности от факторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обуславливающих эту деятельность. Наиболее часто встречающиеся производственные функции:

1. $z = y_0 x^\alpha y^{1-\alpha}$ — *функция Кобба-Дугласа*;

При моделировании экономики страны в качестве основных переменных функции Кобба-Дугласа берут затраты труда x_1 и объем производственных фондов x_2. Зная значения параметров y_0 и α, можно делать прогноз национального дохода. Для увеличения точности прогноза в функцию Кобба-Дугласа вводят дополнительный множитель e^{pt}, который характеризует темп прироста выпуска продукции под влиянием технического прогресса

$$y = y_0 e^{pt} x^\alpha y^\beta,$$

причем в этом случае требование $\alpha + \beta = 1$ не является обязательным. На основании данных по экономике СССР за 1960-1985 годы функция имела вид $y = 1,038 e^{0,0294} x_1^{0,9749} x_2^{0,2399}$.

2. $z = f(x, y) = z_0 \min\{\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\}$ — *функция с постоянными пропорциями*;

Эту функцию выбирают тогда, когда один из ресурсов дефицитен, а другой избыточен. Из формулы видно, что если один из ресурсов избыточен, то его увеличение нецелесообразно, так как оно не отразится на величине функции, а приведет только к дополнительным затратам. Свое название эта функция получила потому, что для ее увеличения с без лишних расходов необходимо оба ресурса увеличивать в постоянной пропорции.

3. $z = e_0 \left(e_1 x_1^{-\beta_1} + e_2 x_2^{-\beta_2}\right)^{-h/\beta}$ — *функция с постоянной эластичностью замещения.*

С этой функцией мы познакомимся позднее.

Глава I
Элементы теории пределов.

§1. Предел последовательности.

Последовательностью называется функция натурального аргумента, то есть каждому натуральному числу n ставится в соответствие точка $f(n) = a_n$. Точки, составляющие последовательность, называют ***членами последовательности***, a_n называют ***общим*** или ***n-ым*** членом последовательности.

Если a_n — число, то последовательность $\{a_n\}$ называют ***числовой***, а если $a_n = (a_n^{(1)}; a_n^{(2)}; ...; a_n^{(k)})$ – вектор, то последовательность $\{a_n\}$ называется ***векторной***. Чтобы задать векторную последовательность, необходимо задать k числовых последовательностей.

Например, $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n-3}{3n+4}\right\}$, $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ – числовые последовательности, $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2-3}; \dfrac{3n^2+2}{4n-5}\right\}$ — векторная последовательность.

Пусть $\{a_n\}$ – числовая последовательность.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ***возрастающей***, если каждый член последовательности, начиная со второго, больше предыдущего, то есть $a_{n+1} > a_n$ (обозначается $\{a_n\} \nearrow$), если каждый член последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего, то есть $a_{n+1} < a_n$, то последовательность $\{a_n\}$ называется ***убывающей*** (обозначается $\{a_n\} \searrow$).

Убывающие и возрастающие последовательности называют ***монотонными***.

Задание 1.1. Докажите, что

1) Если $a_{n+1} - a_n > 0$, то последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, а если $a_{n+1} - a_n < 0$, то последовательность $\{a_n\}$ является убывающей.

2) Пусть $a_n > 0$. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, а если $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то последовательность $\{a_n\}$ является убывающей.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной сверху***, если существует число M такое, что $a_n \leqslant M$ для всех членов последовательности. Если существует число m такое, что $a_n \geqslant m$ для всех членов последовательности, то последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной снизу***. Ограниченная сверху и снизу последовательность называется ***ограниченной***. Условие ограниченности можно записать с помощью модуля. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена, если существует число $M > 0$ такое, что для всех n выполнено неравенство $|a_n| < M$.

Последовательность, не являющуюся ограниченной, называют ***неограниченной***. Если последовательность неограничена, то вне любого отрезка $[-M; M]$ найдутся члены этой последовательности, то есть для любого числа $M > 0$ найдется a_n, такой что $|a_n| > M$.

Перейдем к одному из основных понятий математического анализа — понятию предела.

Определение 1.1. Точка a называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ или $a_n \in U_\varepsilon(a)$.

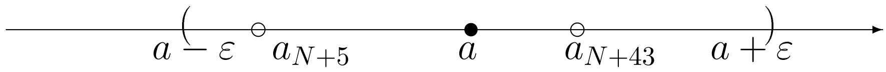
Другими словами, точка a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если начиная с некоторого номера расстояние между точками a и a_n меньше ε.

Обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ (читается число a_n – предел последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то последовательность $\{a_n\}$ называется ***сходящейся***, если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует, то последовательность $\{a_n\}$ называется ***расходящейся***.

Если последовательность $\{a_n\}$ – числовая, то условие $|a_n - a| < \varepsilon$ ($a_n \in U_\varepsilon(a)$) означает, что $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ или $a_n \in (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$.

Для числовой последовательности ее предел можно проиллюстрировать следующим образом:



Если последовательность $\{a_n\}$ – векторная, то условие $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ($|a_n - a| < \varepsilon$) означает, что $\sum\limits_{i=1}^{k}(a_n^{(i)} - a^{(i)})^2 < \varepsilon^2$.

Исследовать сходимость векторной последовательности помогает следующая теорема:

Теорема 1.1. *Для того чтобы векторная последовательность* $\{a_n\} = \{(a_n^{(1)}; a_n^{(2)}; ...; a_n^{(k)})\}$ *точек из* $\mathbb{R}^{(k)}$ *сходилась к точке* $a = (a^{(1)}; a^{(2)}; ...; a^{(k)})$ *необходимо и достаточно, чтобы каждая координатная последовательность сходилась, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}$ $(\forall i = \overline{1,k})$.

В теореме утверждается, что сходимость векторной последовательности сводится к сходимости всех координатных последовательностей.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть векторная последовательность $\{a_n\} = \{(a_n^{(1)}; a_n^{(2)}; ...; a_n^{(k)})\}$ сходится к точке $a = (a^{(1)}; a^{(2)}; ...; a^{(k)})$. Тогда для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ или $\sum\limits_{i=1}^{k}(a_n^{(i)} - a^{(i)})^2 < \varepsilon^2$. Если сумма неотрицательных чисел не превосходит некоторого числа, то и каждое слагаемое не превосходит этого числа, то есть $(a_n^{(i)} - a^{(i)})^2 < \varepsilon^2$. Следовательно, $|a_n^{(i)} - a^{(i)}| < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Значит, каждая из координатных последовательностей сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}$.

2. Достаточность. Задана векторная последовательность $\{a_n\} = \{(a_n^{(1)}; a_n^{(2)}; ...; a_n^{(k)})\}$ и пусть все координатные последовательности сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}$ (для каждого $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k$). Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке $a = (a^{(1)}; a^{(2)}; ...; a^{(k)})$.

Сходимость координатных последовательностей означает, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε существуют номера $N_i(\varepsilon)$ такие, что для всех $n > N_i(\varepsilon)$ выполняются соответствующие неравенства

$$|a_n^{(i)} - a^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (*).$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$. Тогда для любого $n > N$ выполняются все k неравенств $(*)$. Имеем

$$|a_n - a|^2 = \sum_{i=1}^{k}(a_n^{(i)} - a^{(i)})^2 < \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)^2 = k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2.$$

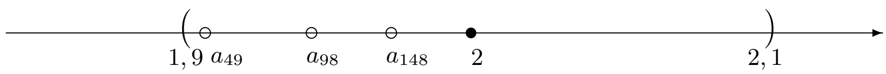
Это значит, что векторная последовательность сходится и ее предел равен $a = (a^{(1)}; a^{(2)}; ...; a^{(k)})$. □

Поэтому при дальнейшем изложении материала будем рассматривать числовые последовательности $\{a_n\}$ ($\{a_n\} \in \mathbb{R}$).

Пример 1.1. Докажите по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+2} = 2$.

Решение . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $\left|\dfrac{2n-1}{n+2} - 2\right| = \left|\dfrac{2n-1-2n-4}{n+2}\right| = \left|\dfrac{-5}{n+2}\right| = \dfrac{5}{n+2}$. Найдем при каких n эта разность будет меньше ε, то есть справедливо неравенство $\dfrac{5}{n+2} < \varepsilon$. Решая неравенство, получим $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 2$. Найденную дробь можно принять за номер $N(\varepsilon)$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$ – целая часть числа a). Согласно определению последовательность $\dfrac{2n-1}{n+2}$ сходится к числу 2.

Проиллюстрируем проведенные вычисления для конкретного значения ε. Пусть $\varepsilon = 0,1$. Тогда $N(\varepsilon) = 48$ и все члены последовательности с номерами, большими 48, принадлежат интервалу $(1,9;\ 2,1)$. Например, $a_{49} = 1,902$, $a_{98} = 1,95$, $a_{148} = 1,967$, ...



Пусть $\varepsilon = 0,01$. Тогда $N(\varepsilon) = 498$ и все члены последовательности с номерами, большими 498, принадлежат интервалу $(1,99;\ 2,01)$. Например, $a_{499} = 1,99002$, $a_{798} = 1,993755$, $a_{998} = 1,995$, ...

Задание 1.2. Докажите по определению, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

Сформулируем и докажем некоторые теоремы о пределах последовательностей.

Теорема 1.2. *Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.*

Доказательство. Проведем методом от противного. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ имеет два предела, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и одновременно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Пусть для определенности $a < b$. Зададим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. По определению предела для этого ε существует номер, начиная с которого выполняется неравенство $-\dfrac{b-a}{2} < a_n - a < \dfrac{b-a}{2}$. Из этого неравенства следует, что $a_n < \dfrac{a+b}{2}$. Аналогично, для этого же ε существует номер, начиная с которого выполняется неравенство $-\dfrac{b-a}{2} < a_n - b < \dfrac{b-a}{2}$. Из этого неравенства следует, что $a_n > \dfrac{a+b}{2}$. Таким образом, начиная с некоторого номера, справедливы оба неравенства $a_n < \dfrac{a+b}{2}$ и $a_n > \dfrac{a+b}{2}$. А это невозможно. Значит, наше предположение неверно, и последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный предел. $\square$

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен 0: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a ($a_n \to a$), то последовательность $\alpha_n = a_n - a$ будет бесконечно малой.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.3. *Всякую сходящуюся последовательность можно представить в виде суммы ее предела и некоторой бесконечно малой после-*

довательности.

Эта теорема следует непосредственно из определения предела.

Последовательность $\{b_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа E существует номер $N(E)$ такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(E)$ выполняется неравенство $|b_n| > E$.

О бесконечно больших последовательностях говорят, что они сходятся к бесконечности или $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями дается в следующей теореме

Теорема 1.4. *Если последовательность $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ является бесконечно малой, то последовательность $\{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой, и если последовательность $\{b_n\}$ является бесконечно большой, то последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ является бесконечно малой.*

§2. Основные теоремы о пределах последовательности.

В этом параграфе сформулируем и докажем основные теоремы о свойствах пределов сходящихся последовательностей.

Лемма 2.1. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – две бесконечно малые последовательности. По определению предела последовательности для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют номера $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что для всех членов последовательностей с номерами $n > N_1(\varepsilon)$ и $n > N_2(\varepsilon)$ выполняется неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(**)$ соответственно. Пусть $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда при $n > N$ выполняются оба неравенства (*) и (**). Имеем $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Это значит, что последовательность $\alpha_n + \beta_n$ является бесконечно малой. $\square$

Следствие 2.2. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Лемма 2.3. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $\{b_n\}$ – ограниченная последовательность. Значит, существует число M такое, что для всех членов последовательности $\{b_n\}$ справедливо неравенство $|b_n| \leqslant M$. По определению предела для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех членов последовательности α_n с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Пусть $n > N(\varepsilon)$. Тогда справедливо неравенство $|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\alpha_n b_n$ является бесконечно малой. $\square$

Теорема 2.4. *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Докажем теорему для числовой последовательности. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. По определению предела для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют неравенству $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Обозначим через $m = \min\{a - \varepsilon,\, a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_{N(\varepsilon)}\}$, $M = \max\{a + \varepsilon,\, a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_{N(\varepsilon)}\}$. Тогда все члены последовательности удовлетворяют двойному неравенству $m \leqslant a_n \leqslant M$. Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ – ограничена. $\square$

Следствие 2.5. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Следствие 2.6. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Следующая теорема дает основные правила вычисления пределов последовательностей.

Теорема 2.7. *Пусть* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *– сходящиеся последовательности и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c \quad (c$ – константа);
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b_n \neq 0,\ b \neq 0)$.

Доказательство. Докажем второй и четвертый пункты теоремы.

2. Последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. По определению предела для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$. Аналогично для последовательности $\{b_n\}$, сходящейся к числу b, для этого же числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности $\{b_n\}$ удовлетворяют неравенству $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(**)$.

Обозначим через $N = \max\{N_1(\varepsilon),\, N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для всех номеров $n > N$ справедливы оба неравенства (*) и (**). Имеем
$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Следовательно, по определению предела $a + b = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$.

4. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена, то есть $|a_n| < M$. По определению предела для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ $(*)$. Аналогично для последовательности $\{b_n\}$, сходящейся к числу b, для этого же числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности $\{b_n\}$ удовлетворяют неравенству $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|M|}$ $(**)$.

Обозначим через $N = \max\{N_1(\varepsilon),\, N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для всех номеров $n > N$ справедливы оба неравенства (*) и (**). Имеем
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant$

$\leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + |b| \dfrac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$. Следовательно, по определению предела $ab = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$.

Приведем еще одно доказательство этого пункта теоремы. Последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $a_n = a + \alpha_n$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $b_n = b + \beta_n$ и последовательность $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая. Имеем

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Последовательность $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ – бесконечно малая (следствия 2.2 и 2.5). По теореме 1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. □

Задание 2.1. 1) Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, а последовательность $\{b_n\}$ предела не имеет. Что можно сказать о последовательностях $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$?
2) Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ не имеют предела. В каком случае имеет предел последовательность $\{a_n b_n\}$? Может ли иметь предел последовательность $\{a_n + b_n\}$?

Задание 2.2. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность $\{b_n\}$ произвольна. При каком условии $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$? Приведите примеры.
2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ либо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? Приведите примеры.

Задание 2.3. Приведите примеры, когда обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ не имеют предела, а обе последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ имеют пределы.

Теорему 2.7 мы доказывали при условии, что обе последовательности имеют конечные пределы и предел знаменателя дроби отличен от нуля. Выражения $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ являются неопределенностями, об их величине ничего определенного сказать нельзя. Для раскрытия неопределенностей существуют специальные приемы.

Пример 2.1. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 3n + 7}{n^2 - 5n + 2}$.

Решение . Данная дробь представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, вынесем за скобки в числителе и знаменателе самую большую степень n, то есть n^2. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+7}{n^2-5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\frac{2-0+0}{1-0+0}=2.$$

Пример 2.2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-5}{3n+2}-\dfrac{n^2-n-1}{n+4}\right)$.

Решение . Данная дробь представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть ее, приведем сначала дроби к общему знаменателю, а затем будем действовать как в предыдущем примере.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n-5}{3n+2}-\frac{n^2-n-1}{n+4}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+2n-5)(n+4)-(n^2-n-1)(3n+2)}{(3n+2)(n+4)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^3+14n^2+3n-20)-(3n^3-n^2-5n-2)}{3n^2+14n+8}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+8n-18}{3n^2+14n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(15+\dfrac{8}{n}-\dfrac{18}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{14}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}=\frac{15+0-0}{3+0+0}=5.$$

Пример 2.3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{n+1}+2^{n-3}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}$.

Решение . Данная дробь представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, вынесем за скобки в числителе и знаменателе 3^n. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n+1}+2^{n-3}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(5\cdot 3+\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1-10\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-10\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=$$

$$= \frac{15 + \frac{1}{8} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - 10 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{15 + \frac{1}{8}\cdot 0}{1 - 10\cdot 0} = 15.$$

Пример 2.4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+129}{0,1n^2+4n+17} \cdot \cos\frac{n^2+2n-5}{n+8}$.

Решение . Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+129}{0,1n^2+4n+17} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(7+\frac{129}{n}\right)}{n^2\left(0,1+\frac{4}{n}+\frac{17}{n^2}\right)} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7+\frac{129}{n}}{n\left(0,1+\frac{4}{n}+\frac{17}{n^2}\right)} = 0$ и $\left|\cos\frac{n^2+2n+17}{n+8}\right| \leqslant 1$. Применив теорему о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченую (теор. 2.3), получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+129}{0,1n^2+4n+17} \cdot \cos\frac{n^2+2n-5}{n+8} = 0$.

Сформулируем и докажем несколько теорем о вычислении пределов в неравенствах.

Теорема 2.8. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *сходится. Если, начиная с некоторого номера (то есть для всех* $n > n_0$*) выполняется неравенство* $a_n \leqslant c$ $(a_n \geqslant c)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant c$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant c)$.

В теореме утверждается, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Заметим, что если $a_n < c$ (неравенство строгое), то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant c$ (неравенство не является строгим). Существуют примеры последовательностей, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Например, $a_n = \frac{1}{n} > 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 2.9. (о предельном переходе в неравенстве.) *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, и , начиная с некоторого номера (то есть для всех* $n > n_0$*) выполняется неравенство* $a_n \leqslant b_n$ $(a_n \geqslant b_n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

Доказательство. Пусть при $n > n_0$ справедливо неравенство $a_n \leqslant b_n$. Это значит, что при $n > n_0$ $a_n - b_n \leqslant 0$. Применим теорему 2.8. Получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) \leqslant 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. □

Теорема 2.10. (теорема о зажатой последовательности). *Пусть заданы три последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *и их члены связаны неравенством* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *сходятся к одному пределу, то последовательность* $\{b_n\}$ *сходится к этому же пределу.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то по определению предела последовательности для выбранного $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$ или

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \qquad (*)$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, для этого же $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N_2(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a - c_n| < \varepsilon$ или

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon. \qquad (**)$$

Обозначим через $N = \max\{N_1, N_2\}$ и пусть $n > N$. Тогда справедливы оба неравенства (*) и (**). Из этих неравенств и условия теоремы вытекает, что

$$a - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < a + \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

Пример 2.5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Решение . Для вычисления предела этой дроби применим теорему о зажатой последовательности. Имеем

$$0 < \frac{2^n}{n!} < \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3} = 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

§3. Монотонная последовательность и ее предел. Число e.

Сформулированная в этом параграфе теорема имеет большое теоретическое значение.

Теорема 3.1. *Всякая монотонно возрастающая (монотонно убывающая) ограниченная сверху (ограниченная снизу) последовательность имеет предел.*

В теореме утверждается, что если выполнены условия $a_{n+1} \geqslant a_n$ и $a_n \leqslant M$ ($a_{n+1} \leqslant a_n$ и $a_n \geqslant m$), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Доказывается, что для монотонно возрастающей последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, а для монотонно убывающей последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ возрастает и не ограничена сверху, то полагают, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если последовательность $\{a_n\}$ убывает и не ограничена снизу, то полагают, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

В теореме утверждается, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, но не указывается, как его найти. Однако сам факт существования предела часто позволяет вычислить этот предел.

Пример 3.1. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ имеет предел и вычислите его.

Решение . Заметим, что $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2^n}{n!}\cdot\dfrac{2}{n+1} = a_n\cdot\dfrac{2}{n+1}$. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, так как для любого n $a_n > 0$. Так как $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{n+1} < 1$ для всех $n > 1$, то последовательность $\{a_n\}$ является монотонно убывающей. По теореме 3.1 она имеет предел. Обозначим его через a, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Чтобы вычислить предел, в равенстве $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{2}{n+1}$ перейдем к пределу. Получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1}$. Следовательно, $a = a \cdot 0$. Значит, $a = 0$.

Пример 3.2. Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ имеет предел и вычислите его.

Решение . Заметим, что $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{n}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, так как $a_n > 0$ для любого n. Так как $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} - \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1-n}{2^{n+1}} < 0$ для всех $n > 1$, то последовательность $\{a_n\}$ является монотонно убывающей. По теореме 3.1 она имеет предел. Обозначим его через a, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Чтобы вычислить предел, в равенстве $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ перейдем к пределу. Получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Следовательно, $a = \dfrac{a}{2} + 0$ и $a = 0$.

Задание 3.1. Применив теорему о пределе монотонной последовательности, докажите, что для любого числа $\alpha > 0$ справедливо утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

Рассмотрим еще один пример монотонной последовательности.

Сформулируем сначала лемму.

Лемма 3.2. (**лемма Бернулли.**) *Для любого числа $m \in \mathbb{N}$ и для любого действительного числа $h > -1$ справедливо неравенство*

$$(1+h)^m \geqslant 1 + mh. \qquad \text{(неравенство Бернулли)}$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. С первого взгляда кажется, что если $n \to \infty$, то $x_n \to 1$. Однако из леммы Бернулли следует, что $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \dfrac{1}{n} = 2$, то есть, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 2$.

Докажем существование предела этой последовательности.

Рассмотрим еще последовательность $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Последовательность y_n ограничена снизу ($y_n > 0$).

Покажем, что она убывает. Запишем $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ и $y_{n-1} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$ и найдем их отношение:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n(n-1)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{n^{2n+2}(n-1)}{(n^2-1)^{n+1} n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

применив к последнему выражению неравенство Бернулли, получим
$\frac{y_{n-1}}{y_n} \geqslant \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1.$

Таким образом, $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geqslant 1$ или $y_n \leqslant y_{n-1}$. Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ убывает. По теореме 3.1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Но тогда существует и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, так как $x_n = y_n \cdot \frac{n}{n+1}$.

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e имеет исключительно важное значение как для самой математики, так и для его приложений. e – число иррациональное, оно приближенно равно $e \approx 2,718281828459045\ldots$. Показательную функцию $y = e^x$, основание которой равно e, называют *экспонентой*. Логарифм по основанию e называют *натуральным* и обозначают $\ln x$. При решении многих задач физики, химии, биологии, статистики используются показательная или логарифмическая функция с основанием e.

Рассмотрим задачу экономического содержания – **задачу о непрывном начислении процентов**.

Пусть первоначальнй вклад в банк составляет S_0 рублей и банк начисляет $p\%$ годовых. Найдите размер вклада S_t через t лет.

При использовании простых процентов размер вклада ежегодно увеличивается на одну и ту же величину $\frac{p}{100}S_0$ и через t лет размер вклада составит $S_t = S_0\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$ рублей.

На практике часто применяют сложные проценты, когда проценты начисляются не только на основную часть вклада, но и на начисленные ранее проценты (вклад с капитализацией процентов). В этом случае размер вклада ежегодно увеличивается в одно и то же число раз, то есть в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз и через t лет размер вклада составит $S_t = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ рублей.

Предположим, что проценты на вклад начисляются не один раз в год, а n раз тогда процент начисления за $\frac{1}{n}$ часть года составит $\frac{p}{100n}\%$ и через t лет размер вклада составит $S_t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{tn}$ рублей.

Если уменьшать промежуток между начислениями $\frac{1}{n}$, в идеале при $n \to \infty$ он становится бесконечно малым, то получим, что через t лет размер вклада составит

$$S_t = \lim_{n\to\infty} S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{tn} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}\cdot\frac{pnt}{100n}} = S_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}.$$

§4. Предел функции.

Пусть функция $y = f(x)$ отображает множество $X \subset \mathbb{R}^{(n)}$ во множество $Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, и пусть x_0 – точка сгущения множества X, точка $A \in \mathbb{R}^{(m)}$.

Определение 4.1. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 значения функции $f(x)$ принадлежат окрестности $U_\varepsilon(A)$.

Обозначается предел функции в точке $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Таким образом $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ имеем $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

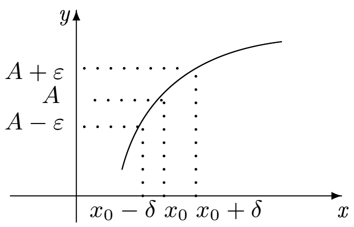
Если $y = f(x)$ – скалярная функция скалярного аргумента, то определение предела можно сформулировать следующим образом:

Определение 4.2. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0 $\ (A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x))$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 4.3. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0 $\ (A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x))$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ следует, что $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Определения 4.1 – 4.3 называют *определением на языке* $\varepsilon - \delta$ или *определением Коши.*

Определение предела для скалярной функции скалярного аргумента можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение 4.4. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке A.

Иными словами, $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой последовательности точек $\{x_n\} \to x_0$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\} \to A$.

Определение 4.4 называют *определением на языке последовательностей или определением Гейне.*

Мы сформулировали два определения одного понятия. Но никакого противоречия мы не получим, так как справедлива теорема.

Теорема 4.1. *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

На практике определение Коши используют, когда нужно доказать существоване предела функции в точке, а определение Гейне – когда нужно доказать, что функция предела в точке не имеет.

Пример 4.1. Докажите, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Решение . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $|x^2 - 4| < \varepsilon$ при $|x - 2| < \delta$. Раскрыв неравенство с модулем, получим $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$. Обозначим через δ меньшее из расстояний от точки 2 до точек$\sqrt{4-\varepsilon}$ и $\sqrt{4+\varepsilon}$ ($\delta = \min\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\}$). Тогда при $0 <$

$|x-2|<\delta$ выполнено неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Значит, по определению предела $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Например, $\varepsilon = 0,01$. Неравенство примет вид $\sqrt{3,99} < x < \sqrt{4,01}$ или $1,9975 < x < 2,0025$. Если взять $\delta = 0,0025$, то из неравенства $|x-2| < 0,0025$ будет следовать, что $|x^2-4| < 0,01$. Пусть $x = 1,999$, тогда $x^2 = 3,996$ и $4-3,994 = 0,004 < 0,01$. Пусть $x = 2,001$, тогда $x^2 = 4,004$ и $4,004-4 = 0,004 < 0,01$.

Пример 4.2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Решение . Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $|x-3| < \delta$. По определению предела $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right| = \left|\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$. Если взять $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x-3| < \delta$ будет следовать, что $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right| < \varepsilon$. Значит, по определению предела $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Пример 4.3. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-6}{x-4} = 2$.

Решение . Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $|x-2| < \delta$. По определению предела $\left|\dfrac{x-6}{x-4}-2\right| = \left|\dfrac{2-x}{x-4}\right| = \dfrac{|x-2|}{4-x} < \varepsilon$ (так как $x \to 2$, то $4-x > 0$). Решая это неравенство получим систему

$$\begin{cases} x-2 & < & (4-x)\varepsilon \\ x-2 & > & (x-4)\varepsilon \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < \dfrac{2+4\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ x > \dfrac{2-4\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{cases}.$$

Если взять $\delta = \min\left\{\dfrac{2+4\varepsilon}{1+\varepsilon}-2,\ 2-\dfrac{2-4\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}$, то из неравенства $|x-2| < \delta$ будет следовать, что $\left|\dfrac{x-6}{x-2}-2\right| < \varepsilon$. Значит, по определению предела $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-6}{x-4} = 2$.

Пример 4.4. Докажите, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Решение . Чтобы доказать, что предел функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не существует, применим определение Гейне.

Рассмотрим последовательность $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$. Соответствующая последовательность значений функции $f(x'_n) = \sin 2\pi n = 0$, то есть

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 0$.

Рассмотрим последовательность $x''_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$. Соответствующая последовательность значений функции $f(x''_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = 1$.

Последовательности значений функции $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ сходятся к разным пределам. По определению Гейне функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Определение 4.5. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует положительное число $\Delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, принадлежащих окрестности $U_\Delta(\infty)$ значения функции $f(x)$ принадлежат окрестности $U_\varepsilon(A)$.

Таким образом, $A = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 4.6. Точка A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к ∞, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке A.

Если $f(x)$ скалярная функция скалярного аргумента, то иногда различают $A_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $A_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Определение 4.7. Говорят, что ***предел функции*** $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности, если для любого положительного числа E существует положительное число $\delta(E)$ такое, что для всех x, принадлежащих окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ значения функции $f(x)$ принадлежат окрестности $U_E(\infty)$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если $\forall E > 0 \;\; \exists\delta(E) > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$ следует $|f(x)| > E$.

Задание 4.1. Сформулируйте следующие определения пределов на языке $\varepsilon - \delta$ и на языке последовательностей;

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$;
4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
9) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Определение 4.8. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0, то ее можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции, то есть, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то в окрестности точки x_0 справедливо равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция.

Заметим, что определение предела функции $f(x)$ в точке x_0 не требует, чтобы функция была определена в этой точке.

§5. Основные теоремы о пределах.

В этом параграфе будет сформулирован ряд теорем о свойствах предела функции в точке и правилах вычисления пределов. Эти теоремы доказываются для скалярной функции скалярного аргумента, либо аналогично соответствующим теоремам §2, либо используя определение предела по Гейне.

Теорема 5.1. *Функция не может иметь в точке более одного предела.*

Иными словами, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, то этот предел единственный.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 два предела, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$ и $B \neq A$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|B-A|}{3}$. Тогда по определению предела для этого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$ выполняется $f(x) \in U_\varepsilon(A)\,(*)$.

Аналогично для этого же самого ε существует $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0)$ выполняется $f(x) \in U\varepsilon(B)$ (**). Обозначим через $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in \dot{U}_{\delta(x_0)}$ справедливы условия (*) и (**). Но окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $U_\varepsilon(B)$ не пересекаются. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 5.2. *Всякая функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 предел, ограничена в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство. По определению предела $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тогда $\forall x$ из $\dot{U}_\delta(x_0)$ справедливо неравенство $|f(x)| < |A| + \varepsilon$ и функция $f(x)$ ограничена в δ-окрестности точки x_0. □

Теорема 5.3. *Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Справедливы следующие утверждения:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = A - B$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot A$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (g(x) \neq 0,\ B \neq 0)$.

Теорема 5.4. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ скалярные функции скалярного аргумента. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$), то справедливо неравенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ($A \leqslant B$).*

Теорема 5.5. (теорема о зажатой функции.) *Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ скалярные функции скалярного аргумента. Если в некоторой окрестности точки x_0 (в частности может быть, что $x_0 = \infty$) выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и функции $f(x)$ и $h(x)$ имеют в точке*

x_0 равные пределы ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$), то функция $g(x)$ имеет в точке x_0 тот же самый предел, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.
По определению предела для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Для этого же самого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0)$ справедливо неравенство $|h(x) - A| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon.$$

Обозначим через $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in \dot{U}_{\delta}(x_0)$ верно неравенство

$$A - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < A + \varepsilon.$$

По определению предела функции имеем $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$. □

Теорема 5.6. *Произведение бесконечно малой в окрестности точки x_0 функции на ограниченную есть бесконечно малая в окрестности точки x_0 функция.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является бесконечно малой, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, а функция $g(x)$ — ограничена, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D(g)$ справедливо условие $|g(x)| \leqslant M$. По определению предела для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_{\delta}(x_0)$ справедливо неравенство $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для всех $x \in \dot{U}_{\delta}(x_0)$ имеем $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. По определению предела функции имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$. □

Теорема 5.7. *Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, $\lim\limits_{u\to b} f(u) = A$, то существует предел сложной функции и $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.*

Доказательство. Функция $g(x)$ имеет предел в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, а функция $f(u)$ имеет предел в точке b: $\lim\limits_{u\to b} f(u) = A$. По определению предела для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\omega(\varepsilon) > 0$, что для всех $u \in \dot{U}_\omega(b)$ выполнено условие $f(u) \in U_\varepsilon(A)\,(*)$ и для найденного выше $\omega(\varepsilon)$ существует такое $\delta(\omega(\varepsilon)) > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполнено условие $g(x) \in \dot{U}_\omega b\,(**)$. Тогда применив формулы (*) и (**), получим что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)) > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполнено условие $f(g(x)) \in U_\varepsilon(A)$. По определению предела функции имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$. $\square$

Теорема 5.8. *Если существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = A^B$.

Пример 5.1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение . Используя теорему 5.3, получим

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 2x^2 - 5\lim\limits_{x\to 3} x + 2}{\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 3} x + 2} = \frac{18 - 15 + 2}{9 - 9 + 2} = 2,5.$$

Пример 5.2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение . Дробь представляет собой неопределенность $\frac{0}{0}$ и сразу применять теорему 5.3 нельзя. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, $2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$ и подставим в заданное выражение (заметим, что $x \neq 2$)

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 2x - 1}{\lim\limits_{x\to 2} x - 1} =$$
$$= \frac{4-1}{2-1} = 3.$$

Пример 5.3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение . Дробь представляет собой неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и сразу применять теорему 5.3 нельзя. Вынесем в числителе и знаменателе дроби за скобки x^2 и сократим дробь:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{2}{1}=2.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Пример 5.4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-5x}$.

Решение . Дробь представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$ и сразу применять теорему 5.3 нельзя. При вычислении предела в выражении, стремящемся к нулю, избавимся от радикалов. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-5x}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{x(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{x-1-4}{x(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{x(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{1}{x(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{20}.$$

Пример 5.5. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{13+2x}-\sqrt{7-x}}$.

Решение . Выполним преобразования как в предыдущем примере, умножив числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные числителю и знаменателю.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{13+2x}-\sqrt{7-x}}=$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{6+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{6+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{13+2x}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{13+2x}-\sqrt{7-x})(\sqrt{13+2x}+\sqrt{7-x})(\sqrt{6+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(6+x-2+x)(\sqrt{13+2x}+\sqrt{7-x})}{(13+2x-7+x)(\sqrt{6+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(4+2x)(\sqrt{13+2x}+\sqrt{7-x})}{(6+3x)(\sqrt{6+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to-2}\frac{2\left(\sqrt{13+2x}+\sqrt{7-x}\right)}{3\left(\sqrt{6+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$
$$=\frac{12}{12}=1.$$

Исследуем поведение функций Торнквиста при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1} = \lim_{b_1 x\to\infty} \frac{x(1-a_1/x)}{x(1-c_1/x)} = b_1,$$
$$\lim_{x\to\infty} y_2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2(x-a_2)}{x-c_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-a_2/x)}{x(1-c_2/x)} = b_2,$$
$$\lim_{x\to\infty} y_3(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_3 x(x-a_3)}{x-c_3} = \lim_{x\to\infty} \frac{b_3 x^2(1-a_3/x)}{x(1-c_3/x} = \infty.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении доходов спрос на товары первой необходимости растет до определенного предела, равного b_1, а спрос на товары второй необходимости растет до предела b_2 (поэтому коэффициенты b_1 и b_2 называют уровни насыщения). Спрос на предметы роскоши при неограниченном росте доходов неограничено возрастает.

Предположим, что предложение $s(t)$ некоторого товара в текущем периоде формируется на основе цены $p(t)$, установившейся в предыдущем периоде, а спрос $d(t)$ на товар изменяется в зависимости от цены в текущем периоде (предположение о запазывании предложения вполне объяснимо, так как производство товара имеет определенную продолжительность). Если спрос s и предложение d линейно зависят от p, то динамика цен описывается уравнениями $s(t) = ap(t-1) + b$, $d(t) = -mp(t) + n$, причем $n > b > 0$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение, $a > 0$, так как функция предложения возрастающая, $m > 0$, так как функция спроса убывающая.

Если спрос на товар равен предложению этого товара, то из уравнения $ap(t-1) + b = -mp(t) + n$ получим реккурентное соотношение
$p(t) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}p(t-1)$.

Последовательно применяя это соотношение, получим:

$$p(1) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\cdot p(0),$$
$$p(2) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\cdot p(1) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\left(\frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\cdot p(1)\right) =$$
$$= \frac{n-b}{m}\left(1-\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{a}{m}\right)^2\cdot p(0),$$
$$p(3) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\left(\frac{n-b}{m}\left(1-\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{a}{m}\right)^2\cdot p(0)\right),$$
$$\ldots$$
$$p(t) = \frac{n-b}{m}\left(1-\frac{a}{m}+\left(\frac{a}{m}\right)^2+\ldots+(-1)^{t-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{t-1}\right) + (-1)^t\left(\frac{a}{m}\right)^t\cdot p(0).$$

Выражение в скобках — сумма первых t членов геометрической прогрессии $S_t = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{t-1} = \frac{1-q^t}{1-q}$, где $q = -\frac{a}{m}$. Отсюда получаем выражение для цены $p(t)$ в произвольный момент времени t: $p(t) = \frac{n-b}{m} \cdot \frac{1-q^t}{1-q} + q^t \cdot p(0)$.

Пусть $t \to \infty$.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} S_t = \frac{1}{1-q}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \frac{n-b}{m} \cdot \frac{m}{m+a} = \frac{n-b}{m+a}$, то есть при $t \to \infty$ и $\frac{a}{m} < 1$ равновесие между спросом и предложением устойчиво, и цена стремится к своему равновесному значению $\overline{p} = \frac{n-b}{m+a}$. Если $|q| > 1$, то $p(t) \to \infty$ и равновесие неустойчиво. Если $|q| = 1$, то есть $a = m$, то цена $p(t)$ колеблется вокруг своего равновесного значения.

§6. Односторонние пределы.

Пусть задана скалярная функция скалярного аргумента $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$.

Определение 6.1. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 ***слева***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in U_\delta^-(x_0)$ справедливо $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Иными словами, если $x_0 - \delta < x < x_0$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается предел слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Определение 6.2. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in U_\delta^+(x_0)$ справедливо $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Иными словами, если $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается предел справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Связь между пределом функции в точке односторонними пределами дает теорема.

Теорема 6.1. *Если существует конечный* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *то оба односторонних предела* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ *также существуют и они* *равны A.*

Обратно, если оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и оба равны одному числу A, то предел функции в этой точке также существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Пример 6.1. Вычислите односторонние пределы функции
$f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \text{если } x<2 \\ x+1, & \text{если } x>2 \end{cases}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение . $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x^2-3) = 4-1 = 1.$
$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(x+1) = 2+1 = 3.$

Для функции, заданной в условии задачи, оба односторонних предела в точке $x_0 = 2$ существуют, но они различны. Следовательно, функция $f(x)$ предела в точке $x_0 = 2$ не имеет.

§7. Повторные пределы.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^{(2)} \to Z \subset \mathbb{R}$, то есть $z = f(x,y)$ — функция двух переменных.

В §6 было дано определение предела функции в точке. Этот предел можно вычислить, применяя теорему 5.3.

Пример 7.1. Вычислите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2y}{2xy-3}$.

Решение . $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2y}{2xy-3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^2 \cdot \lim\limits_{y\to 1} y}{2\lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{y\to 1} y - 3} = \dfrac{2^2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 1-3} = \dfrac{4}{1} = 4.$

Пример 7.2. Докажите, что не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$.

Решение . Заданная в условии дробь представляет собой неопределенность $\frac{0}{0}$. Для доказательства применим определение предела функции по Гейне. Для этого выберем две последовательности точек, сходящихся к точке $(0,0)$ таких, что соответствующие последовательности значений функции сходятся к разным числам.

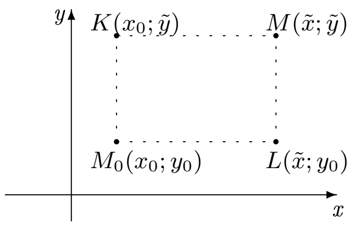
Пусть $M_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ и $M_n \to (0,0)$ при $n\to\infty$. Тогда $f(M_n) = \dfrac{\dfrac{1}{n}\cdot 0^3}{\dfrac{1}{n^4}+0^4} = 0$ и $f(M_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть $K_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $K_n \to (0,0)$ при $n \to \infty$. Тогда $f(K_n) = \dfrac{\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^4}} = \dfrac{\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}$ и $f(K_n) \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$.

По определению Гейне предел функции в точке $(0,0)$ не существует.

Можно привести много примеров, в которых функция двух переменных не имеет предела в некоторой точке. Легкость построения таких примеров объясняется тем, что на плоскости существует много различных путей приближения к заданной точке. Рассмотрим два таких пути.

Пусть заданы две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M(\tilde{x}; \tilde{y})$.



Будем двигаться от точки M к точке M_0 по ломаной MKM_0. Вычислим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, \tilde{y})$, если он существует (движение параллельно оси OX). Этот предел зависит от y. Обозначим его $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. Вычислим теперь $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$, если он существует (движение параллельно оси OY). Предел

$$\lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x, y)) \tag{7.1}$$

называется ***повторным пределом***.

Аналогично, двигаясь по ломаной MLM_0, вычислим $\psi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$. Получим еще один повторный предел

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y)) \tag{7.2}$$

Связь между пределом функции двух переменных в точке и повторными пределами дает теорема.

Теорема 7.1. *Если существует конечный* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, *и для каждого* y *существует* $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, *то существует повторный предел* $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to y_0} (\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y))$, *также равный* A.

Аналогично, если существует конечный $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, *и для каждого* x *существует* $\psi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, *то существует повторный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(y) =$

$\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\big)$, *также равный* A.

Заметим, что из существования повторных пределов функции в точке и даже их равенства не следует существование двойного предела функции в этой точке.

Пример 7.3. Докажите, что функция $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ имеет в точке $A(0;0)$ оба повторных предела, они равны между собой, но двойной предел фунции в этой точке не существует.

Решение . Вычислим повторные пределы в заданной точке.
$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0\cdot y}{0+y^2} = 0,\quad \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0.$

Покажем, что двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ функции в этой точке не существует. Для этого рассмотрим две последовательности точек, сходящихся к точке $A(0;0)$.

Пусть $M_n = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$

Пусть $K_n = \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$

По определению Гейне предела функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $A(0;0)$ не существует.

§8. Непрерывность функции.

Понятие непрерывности функции, как и понятие предела функции является одним из основных понятий математического анализа. Непрерывные функции обладают целым рядом важных свойств, помогающих при изучении функций, решении различных типов уравнений.

Определение 8.1. Функция $y = f(x)$ $(f : \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(m)})$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в окрестности этой точки (и в самой точке x_0), существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и он равен значению функции в точке.

То есть $x_0 \in D(f)$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{8.1}$$

Из определения 8.1 следует, что для непрерывной функции символы предела и функции можно менять местами.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) \tag{8.2}$$

Определение 8.2. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в этой точке и для любой окрестности $U_\varepsilon(f(x_0))$ существует окрестность $U_\delta(x_0)$ такая, что для всех точек $x \in U_\delta(x_0)$ значения функции $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Определение 8.3. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в этой точке и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только расстояние между точками x и x_0 становится меньше δ ($|x - x_0| < \delta$), то расстояние между точками $f(x)$ и $f(x_0)$ становится меньше ε ($|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

Обозначим через $\Delta x = x - x_0$ — *приращение аргумента*, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — *приращение функции.*

Определение 8.4. Функция $y = f(x)$ ($f : \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(m)}$) называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Определения 8.1 – 8.4 эквивалентны.

Докажем эквивалентность определений 8.1 и 8.4 для скалярной функции скалярного аргумента. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} \Delta y = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций для непрерывной функции можно записать

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(x_0, \Delta x), \tag{8.3}$$

где $\alpha(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке области, называется ***непрерывной в этой области***.

Для для скалярной функции скалярного аргумента можно ввести понятия односторонней непрерывности.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***слева***, если она определена в левой полуокрестности этой точки, существует $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и он равен значению функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***справа***, если она определена в правой полуокрестности этой точки, существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и он равен значению функции в точке.

Теорема 8.1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева и односторонние пределы равны $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то функция непрерывна в этой точке.*

Теорема 8.2. *Сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель отличен от нуля) непрерывных функций являются непрерывными функциями.*

Теорема 8.3. *Если функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = \psi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $z = (\psi \circ \varphi)(x)) = \psi(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Функция $z = \psi(y)$ непрерывна в точке y_0, значит, $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = \psi(y_0)$. Имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(\varphi(x)) = \psi(\lim\limits_{x \to x_0} (\varphi(x)) = \psi(\varphi(\lim\limits_{x \to x_0} x)) = \psi(\varphi(x_0))$. Следовательно, сложная функция $z = \psi(\varphi(x))$ непрерывна.

Теорема 8.4. *Все элементарные функции непрерывны в области своего определения.*

§9. Точки разрыва функции.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $y = f(x)$, если функция не является непрерывной в этой точке.

Рассмотрим характеризацию точек разрыва для скалярной функции скалярного аргумента.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$.

Различают следующие типы точек разрыва.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода*** функции $f(x)$, если существуют оба односторонних предела, но они не равны между собой. То есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a_1$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a_2$, но $a_1 \neq a_2$. Величина $|a_1 - a_2|$ называется ***скачком***.

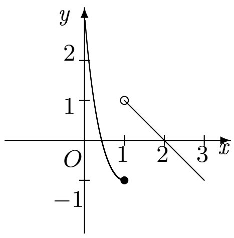
Точка x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода*** функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен ∞ или не существует.

Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если существуют оба односторонних предела, они равны, но функция $f(x)$ не определена в точке x_0. То есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a_1$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a_2$, $a_1 = a_2$, но $\nexists f(x_0)$.

Пример 9.1. Исследуйте непрерывность функции
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{если} \quad x < 2 \\ 4 - x, & \text{если} \quad x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Решение . Во всех точках, кроме $x = 2$ функция $f(x)$ является элементарной, поэтому она непрерывна. Исследуем точку $x = 2$. Для этого найдем пределы функции $f(x)$ в точке $x = 2$ слева и справа.

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x^2 - 4x + 3) = -1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} (4 - x) = 2$.
В точке $x = 2$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.



Пример 9.2. При каких значениях параметра a функция
$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 4, & \text{если} \quad x < 3 \\ x + a, & \text{если} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$ непрерывна.

Решение . При всех $x \neq 3$ функция является элементарной, поэтому она непрерывна. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 3$.
$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x^2 - x - 4) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0}(x + a) = 3 + a$.
Если функция непрерывна, то пределы справа и слева равны, то есть $3 + a = 2$. Значит, $a = -1$.

Пример 9.3. Исследуйте непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 3}$.

Решение . Во всех точках, кроме $x = 0$ функция $f(x)$ является элементарной, поэтому она непрерывна. Исследуем точку $x = 0$. Для этого найдем пределы функции $f(x)$ в точке $x = 0$ слева и справа.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{2^{-\infty} - 1}{2^{-\infty} + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +0} \frac{2^{1/x}\left(1 - 2^{-1/x}\right)}{2^{1/x}\left(1 + 3\cdot 2^{-1/x}\right)} = \lim_{x\to +0} \frac{1 - 2^{-1/x}}{1 + 3\cdot 2^{-1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to +0} \frac{1 - 2^{-\infty}}{1 + 3\cdot 2^{-\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 3\cdot 0} = 1.$$

В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.

§10. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

В этом параграфе будем рассматривать скалярную функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a; b]$.

Теорема 10.1. (Первая теорема Больцано-Коши.) *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на* *концах отрезка значения разных знаков. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;\, b)$, значение функции в которой равно нулю, то есть $f(c) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы Больцано-Коши состоит в том, что если функция $y = f(x)$ на концах отрезка $[a;\, b]$ принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка, в которой график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс.

Теорема 10.2. (Вторая теорема Больцано-Коши.) *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и принимает на концах отрезка разные значения A и B. Тогда для любого числа C, расположенного между числами A и B существует хотя бы одна точка $c \in (a;\, b)$, значение функции в которой равно C, то есть если $f(a) = A$, $f(b) = B$ и $A < B$, то $\forall C \in (A;\, B)\ \exists c \in (a;\, b)$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть $A < B$ и $C \in (A;\, B)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$. Так как $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$, то функция $\varphi(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков. По теореме 10.1 существует точка $c \in (a;\, b)$, значение функции в которой равно нулю, то есть $\varphi(c) = 0$. Тогда $f(c) = \varphi(c) + C = C$. □

Теоремы Больцано-Коши имеют не только теоретическое, но и практическое значение. Основные алгоритмы вычисления приближенных значений функций обосновываются с помощью теорем Больцано-Коши.

Теорема 10.3. (Первая теорема Вейерштрасса.) *Всякая непрерывная на отрезке $[a;\, b]$ функция $y = f(x)$ ограничена на этом отрезке, то есть существуют числа m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a; b]$.*

При доказательстве теоремы показывается, что $m = \inf\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$.

Теорема 10.4. (Вторая теорема Вейерштрасса.) *Всякая непрерывная на отрезке* $[a; b]$ *функция* $y = f(x)$ *принимает на этом отрезке свое наименьшее и наибольшее значения.*

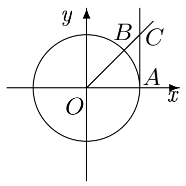
Следствие 10.5. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *то ее значения заполняют некоторый отрезок* $[m; M]$.

§11. Замечательные пределы.

В этом параграфе выведем формулы для вычисления пределов, имеющих большое теоререческое и практическое значения.

1 замечательный предел.

В окружности радиуса R с центром в начале координат проведем луч OB под углом α $(0 < \alpha < \pi/2)$ к оси OX. Он пересекает окружность в точке B и линию тангенсов в точке C.



Очевидно, что $\Delta OAB \subset$ сектор $OAB \subset \Delta OAC$. Тогда

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сектор } OAB} < S_{\Delta OAC}\,;$$
$$\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha < \frac{1}{2}R^2\alpha < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}\alpha\,;$$
$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Так как $\sin\alpha \neq 0$, то разделив неравенство на $\sin\alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

По теореме о зажатой функции с учетом непрерывности функции $\cos\alpha$ получим, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Так как дробь $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ – четная, то при $\alpha < 0$ также верно $\lim\limits_{\alpha\to-0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Вывели формулу для первого замечательного предела

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \tag{11.1}$$

2 замечательный предел.

Используя теорему о зажатой функции, можно показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{11.2}$$

Если обозначить $\alpha = \dfrac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ $\alpha \to 0$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{11.3}$$

Из второго замечательного предела можно вывести следующие следствия.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1. \tag{11.4}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln\alpha}. \tag{11.5}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1. \tag{11.6}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a. \tag{11.7}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu. \tag{11.8}$$

Докажем формулу (11.5).

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a e = \dfrac{1}{\ln a}.$

Докажем формулу (11.7).

Обозначим $a^\alpha - 1 = y$. Тогда $\alpha = \log_a(1+y)$ и при $\alpha \to 0$ имеем $y \to 0$.

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)} = \dfrac{1}{\log_a e} = \ln a.$

Докажем формулу (11.8).

Обозначим $(1+\alpha)^\mu - 1 = y$. Тогда $(1+\alpha)^\mu = 1+y$ и $\mu\ln(1+\alpha) = \ln(1+y)$.

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{y}{\alpha}\cdot\dfrac{\mu\ln(1+\alpha)}{\ln(1+y)} = \mu\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)} = \mu.$

Пример 11.1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 4x}$.

Решение . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x\cos 6x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x\cdot 4x\cdot 6}{\sin 4x\cdot 6x\cdot 4\cdot\cos 6x} =$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}\cdot\dfrac{4y}{\sin 4x}\cdot\dfrac{6}{4\cos 6x} = \dfrac{6}{4} = 1,5.$

Пример 11.2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-1}-e}{\ln(2x-3)}$.

Решение . Введем новую переменную $x-2=y$, причем если $x\to 2$, то $y\to 0$ Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-1}-e}{\ln(2x-3)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y+1}-e}{\ln(2y+1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e(e^{y}-1)\cdot 2y}{\ln(2y+1)\cdot 2y}=$ $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e(e^{y}-1)}{2y}\cdot\dfrac{2y}{\ln(2y+1)}=\dfrac{e}{2}$.

§12. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Пусть $f(x)$ — скалярная функция скалярного аргумента. В §6 было дано определение бесконечно малой в точке x_0 функции (определение 6.8). Напомним его.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Сформулируем основные теоремы о свойствах бесконечно малых в точке x_0 функций.

Теорема 12.1. *Сумма двух бесконечно малых в точке x_0 функций есть бесконечно малая в точке x_0 функция.*

Теорема 12.2. *Произведение бесконечно малой в точке x_0 функции на ограниченную в окрестности этой точки функцию есть бесконечно малая в точке x_0 функция.*

Следствие 12.3. *Произведение двух бесконечно малых в точке x_0 функций есть бесконечно малая в точке x_0 функция.*

Теорема 12.4. *Частное от деления бесконечно малой в точке x_0 функции на функцию, имеющую в точке x_0 предел, отличный от нуля, есть бесконечно малая в точке x_0 функция.*

Теоремы 12.1 – 12.4 доказать самостоятельно.

В теореме 12.4 не рассматривается предел отношения двух бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые в точке x_0 функции.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ $(C\neq 0,\ C\neq\infty)$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка малости*** в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ имеет в точке x_0 ***больший порядок малости***, чем $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ имеет в точке x_0 ***меньший порядок малости***, чем $\beta(x)$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые в точке x_0 функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** в точке x_0.

Так в точке $x=0$ имеют место следующие эквивалентности: $\sin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $1-cosx\sim\dfrac{x^2}{2}$.

Сформулируем основные свойства эквивалентных в точке x_0 функций.

1) Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\beta(x)\sim\alpha(x)$;

2) Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$,то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

3) Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\alpha(x)-\beta(x)$ бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждая из функций;

4) Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$.

Говорят, что бесконечно малая в точке x_0 функция $\alpha(x)$ имеет ***порядок малости k*** относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C$ $(C\neq 0,\ C\neq\infty)$.

Бесконечно малая $C(\beta(x))^k$ называются ***главной частью*** бесконечно малой $\alpha(x)$.

В практических задачах чаще всего берут $\beta(x)=x-x_0$.

Пример 12.1. Найдите главную часть бесконечно малой в точке $x_0=2$ функции $\alpha(x)=(e^{\sin(x-2)}-1)\cdot\ln(5x-9)\cdot(\sqrt{2x+5}-3)$.

Решение . Рассмотрим отношение $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{(x-2)^k}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{(x-2)^k}=\lim_{x\to 2}\frac{(e^{\sin(x-2)}-1)\cdot\ln(5x-9)\cdot(\sqrt{2x+5}-3)}{(x-2)^k}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{\sin(x-2)}-1}{x-2}\cdot\frac{\ln(1+5(x-2))}{5(x-2)}\cdot\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}+3)(x-2)}\cdot\frac{5(x-2)^3}{(x-2)^k}=$$
$$=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x+5}+3)(x-2)}\cdot\frac{5(x-2)^3}{(x-2)^k}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}\cdot\frac{5(x-2)^3}{(x-2)^k}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{10}{6}\cdot\frac{(x-2)^3}{(x-2)^k}=\frac{5}{3}\text{ при } k=3.$$
Таким образом, главная часть $\beta(x)=\frac{5}{3}(x-2)^3$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Справедлива следующая теорема, выражающая связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

Теорема 12.5. *Если функция $f(x)\neq 0$ является бесконечно малой в точке x_0, то функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой в этой точке. Если функция $f(x)$ является бесконечно большой в точке x_0, то функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой в этой точке.*

Заметим, что бесконечно большая в точке x_0 (при $x\to\infty$) функция неограничена. В то же время неограниченная функция может и не быть бесконечно большой. Например, функция $f(x)=x\sin x$ при $x\to\infty$ является неограниченной, но не является бесконечно большой, так как ее значения могут быть сколь угодно большими, но в то же время она принимает равные нулю значения при сколь угодно больших значениях аргумента x.

Свойства бесконечно больших в точке x_0 функций.

Теорема 12.6. *Сумма бесконечно большой в точке x_0 и ограниченной функций есть бесконечно большая в точке x_0 функция.*

Теорема 12.7. *Произведение бесконечно большой в точке x_0 функции на функцию, имеющую в этой точке конечный, отличный от нуля предел, есть бесконечно большая в точке x_0 функция.*

Теорема 12.8. *Частное от деления бесконечно большой в точке x_0 функции на функцию, имеющую в точке x_0 предел, отличный от нуля, есть бесконечно большая в точке x_0 функция.*

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две бесконечно большие в точке x_0 функции.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$ $(C \neq 0,\ C \neq \infty)$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются ***бесконечно большими одного порядка роста*** в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 ***меньший порядок роста***, чем $g(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ имеет в точке x_0 ***больший порядок роста***, чем $g(x)$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ две бесконечно большие в точке x_0 функции и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно большими*** в точке x_0.

Говорят, что бесконечно большая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***порядок роста k*** относительно бесконечно большой функции $g(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(g(x))^k} = C$ $(C \neq 0,\ C \neq \infty)$.

Бесконечно большая $C \cdot (g(x))^k$ называются ***главной частью*** бесконечно большой функции $f(x)$.

Наиболее часто берут $g(x) = x^k$.

Глава II
Дифференциальное исчисление.

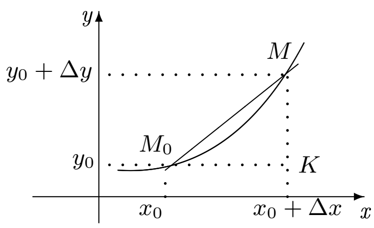
В первых 16 параграфах этой главы (до параграфа "Частные производные") будем рассматривать только скалярные функции скалярного аргумента.

§1. Понятие производной.

Одной из основных задач математического анализа является исследование функций. И мощным инструментов такого исследования являются дифференциальное и интегральное исчисления. В основе дифференциального исчисления лежат понятия производной и дифференциала.

1. Задача о мгновенной скорости точки.

2. Задача о касательной к кривой.



Пусть на плоскости задана непрерывная кривая $y = f(x)$. Нужно найти уравнение касательной к кривой в точке $M(x_0; y_0)$. Возьмем на кривой еще одну точку $M(x; y)$. Тогда $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Проведем секущую M_0M.

Касательной к кривой $y = f(x)$ называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M приближается к точке M_0, то есть $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой M_0M имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k – угловой коэффициент прямой. Из ΔM_0MK получаем $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MK}{M_0K} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
Тогда угловой коэффициент касательной
$k = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

3. Задача о производительности труда. Пусть функция $u(t)$ выража-

ет количество произведенной продукции за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За промежуток времени $[t_0;\, t] = [t_0;\, t_0 + \Delta t]$ количество произведенной продукции изменится с $u(t_0)$ до $u(t_0 + \Delta t)$ и составит $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$. Тогда средняя производительность труда за этой промежуток времени $z_{\text{ср.}} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ и производительность в момент t_0 равна $z(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

4. Пусть функция $Q(x)$ выражает зависимость количества произведенной продукции от величины затрат x. Отношение $\dfrac{\Delta Q}{\Delta x}$ — это средняя величина произведенной продукции, соответствующая величине затрат Δx. *Предельным* или *маржинальным продуктом* в экономике называют предел $MQ(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta x}$.

Получили, что во всех задачах необходимо вычислить однотипные пределы. Этот предел играет в математическом анализе важную роль.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ и $x \in X$. Дадим аргументу приращение $\Delta x \neq 0$, причем $x + \Delta x \in X$. Функция получит приращение $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 1.1. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Термин производная был введен Лагранжем в конце XVIII века.

Процесс нахождения производной функции называют *дифференцированием* функции. Если функция в точке x имеет конечную производную, то она *дифференцируема* в этой точке.

Существует несколько обозначений для производной:
$y'(x)$ — обозначение Лагранжа;
$\dfrac{dy}{dx}$ — обозначение Лейбница;
$\dot{y}$ — обозначение Ньютона.

Из рассмотренных задач следует, что

механический смысл производной – это мгновенная скорость точки в заданный момент времени; поэтому для функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x_0)$ – это скорость изменения функции в точке x_0;
геометрический смысл производной – это угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке (тангенс угла между касательной к графику функции в данной точке и положительным направлением оси абсцисс), уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$;
экономический смысл производной – это производительность труда в заданный момент времени, если известен объем произведенной продукции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$. Так как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то дробь $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части равенства на Δx, получим

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \tag{1.2}$$

Из этого равенства следует, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta f(x) \to 0$. Значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 (определение 10.4).

Мы доказали теорему

Теорема 1.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, то она непрерывна в этой точке.*

Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, функция $y = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$, но она не имеет производной в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$.

§2. Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Выберем точку $x \in X$ и зададим приращение аргумента Δx так, чтобы $x + \Delta x \in X$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Пусть приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1}$$

причем, если Δx – бесконечно малая, то и $\alpha(x, \Delta x)$ – бесконечно малая, то есть слагаемое $\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx.

Определение 2.1. *Дифференциалом* функции $y = f(x)$ x в точке x называется главная линейная часть приращения функции в этой точке.

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{2.2}$$

Таким образом, дифференциал функции – это часть приращения функции, линейно зависящая от Δx.

Если приращение функции представимо в виде (2.1), то функция называется *дифференцируемой*.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) была дифференцируема в точке x необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(x)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда ее приращение представимо в виде (2.1). Разделив равенство (2.1) на Δx, запишем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(x, \Delta x)$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $A = y'(x)$.
2. Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y(x)}{\Delta x}$. Тогда $\dfrac{\Delta y(x)}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(x, \Delta x)$, где $\alpha(x, \Delta x)$ бесконечно малая функция. Умножив это равенство на Δx, получим $\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x$. Условие (2.1) выполнено. □

Из доказательства теоремы вытекает, что дифференциал функции представим в виде $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Если обозначить $\Delta x = dx$, то получим формулу для вычисления дифференциала функции

$$dy = f'(x) \cdot dx. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) легко получить обозначение Лейбница для производной как отношение двух дифференциалов.

С помощью дифференциала можно приближенно вычислять значения функции.

Будем считать, что $\Delta y \approx dy$, то есть $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда имеем, что

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.4}$$

Формула (2.4) дает возможность в окрестности точки x_0 заменять произвольную функцию, имеющую производную, линейной функцией. При этом формула тем точнее, чем меньше Δx.

§3. Правила вычисления производных.

Все функции, рассматриваемые в этом параграфе дифференцируемы.

1. Производная константы равна нулю.

$$c' = 0. \tag{3.1}$$

2. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{3.2}$$

3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение производной второго сомножителя на первый.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \tag{3.3}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'. \tag{3.4}$$

5. Производная частного двух функций равна дроби, в числителе которой стоит произведение производной числителя на знаменатель минус

произведение производной знаменателя на числитель, а в знаменателе — квадрат знаменателя ($v \neq 0$).

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \tag{3.5}$$

6. Производная дроби, знаменатель которой является константой, находится по формуле

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}. \tag{3.6}$$

7. Производная дроби, числитель которой является константой, находится по формуле

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -c \cdot \frac{v'}{v^2}. \tag{3.7}$$

Докажем формулы для вычисления производных. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на множестве X, $x \in X$, задано приращение аргумента Δx и $x+\Delta x \in X$. Тогда $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$.

2. $(u \pm v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = (u)' \pm (v)'.$

3. $(u \cdot v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x} +$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) +$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \cdot u(x) = u' \cdot v + u \cdot v'.$

4. $(c \cdot u(x))' = c' \cdot u(x) + c \cdot u' = 0 + c \cdot u' = c \cdot u'.$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}\right) \cdot \dfrac{1}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot \Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x) - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot u(x)\right)\cdot$$
$$\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

6. $\left(\dfrac{u(x)}{c}\right)' = \dfrac{u'\cdot c-u\cdot c'}{c^2} = \dfrac{c\cdot u'-0}{c^2} = \dfrac{u'}{c}.$

7. $\left(\dfrac{c}{v(x)}\right)' = \dfrac{c'\cdot v-c\cdot v'}{v^2} = \dfrac{0-c\cdot v'}{v^2} = -c\cdot\dfrac{v'}{v^2}.$

Для вычисления дифференциалов используются те же правила, что и для вычисления производных.

1. $d(u\pm v) = du\pm dv$;
2. $d(u\cdot v) = du\cdot v+u\cdot dv$;
3. $d(c\cdot u) = c\cdot du$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \dfrac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}.$

§4. Производная сложной функции.

Пусть $\varphi : x\in X\to u\in U$ и $f : u\in U\to y\in Y$, то есть $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$. Тогда $y=f(\varphi(x))$ — сложная функция от переменной x.

Теорема 4.1. *Если функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)\neq C$ имеют конечные производные в областях X и $\varphi(X)$ соответственно, то производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ существует и равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженному на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.*

$$y'(x) = f'(u(x))\cdot u'(x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Дадим независимой переменной приращение $\Delta x\neq 0$. Функция $u=\varphi(x)$ получит приращение $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$. Этому приращению промежуточного аргумента Δu будет соответствовать приращение функции $\Delta y = f(u+\Delta u)-f(u)$.

Функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta f(u)}{\Delta u}$ и $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$.

Покажем, что сложная функция имеет производную.

В равенстве $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности функции $u(x)$ из $\Delta x \to 0$ вытекает, что $\Delta u \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Следовательно, производная $y'(x)$ существует и ее можно найти по формуле $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$. □

Формулу дифференцирования сложной функции легче запомнить, если воспользоваться обозначением Лейбница $y'(x) = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, то есть $y = f(\varphi(t))$ – сложная функция от переменной t. Дифференциал этой функции можно вычислить по формуле

$$dy = y'_t \cdot dt \tag{4.2}$$

Производная суперпозиции функций находится по формуле $y'_t = y'_x \cdot x'_t$, Подставив производную в формулу (2.5), получим $dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt$. Так как $x'_t \cdot dt = dx$, то

$$dy = y'_x \cdot dx \tag{4.3}$$

Из формул (4.2) и (4.3) вытекает, что формула вычисления дифференциала верна и в случае, когда y сложная функция. Это свойство называют *инвариантностью формы* первого дифференциала.

§5. Производная обратной функции.

Пусть на некотором промежутке X определена непрерывная функция $y = f(x)$. По свойству непрерывной функции ее значения заполняют некоторый промежуток. Поэтому для существования обратной функции необходимо, чтобы функция $f(x)$ была монотонной $(\forall x \; \exists !\, y = f(x))$.

При этих условиях обратная функция $x = \varphi(y)$ будет непрерывна на множестве $Y = f(X)$.

Теорема 5.1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и имеет на этом промежутке производную, отличную от нуля. Тогда обратная функция также имеет производную, которая вычисляется по формуле*

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}. \tag{5.1}$$

Доказательство. По условию теоремы существуют $y' \neq 0$ и функция $x = \varphi(y)$ – обратная к функции $y = f(x)$. Пусть $\Delta y \neq 0$ – приращение независимой переменной y, а Δx – приращение обратной функции. Тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$. Так как из $\Delta y \to 0$ следует, что $\Delta x \to 0$ (в силу непрерывности функций), то переходя к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Следовательно, $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$. □

§6. Производные основных элементарных функций.

Из определения производной вытекает способ ее вычисления. Пусть задана функция $y = f(x)$. Вычисление производной проводится по следующей схеме.

1. Зафиксируем значение аргумента x, зададим приращение аргумента Δx и вычислим значения функции в точках x и $x+\Delta x$: $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$;

2. Вычислим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3. Найдем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4. Вычислим предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует.

Составим таблицу производных элементарных функций.

1. $y = x^{\alpha}$.

Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^\alpha \left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^\alpha}{x} \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$ (воспользовались формулой (17.8)).

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \tag{6.1}$$

2. $y = \sin x$.

Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ (воспользовались формулой (17.1)).

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{6.2}$$

3. $y = \cos x$.

Проведя вычисления аналогично предыдущим, получаем

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{6.3}$$

4. $y = a^x$.
$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$ (воспользовались формулой (17.7)).

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \tag{6.4}$$

5. $y = e^x$.

Из формулы (6.4) при $a = e$ получаем

$$(e^x)' = e^x. \tag{6.5}$$

6. $y = \log_a x$.

Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x} \cdot x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

(воспользовались формулой (17.5)).

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}. \qquad (6.6)$$

7. $y = \ln x$.

Из формулы (6.6) при $a = e$ получаем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (6.7)$$

8. $y = \operatorname{tg} x$.

Применим правило дифференцирования дроби. Получим

$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (6.8)$$

9. $y = \operatorname{ctg} x$.

Проведя вычисления аналогично предыдущим, получаем

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (6.9)$$

10. $y = \arcsin x$.

Функция $x = \sin y$ – обратная к данной. По правилу дифференцирования обратной функции имеем $x' = \cos y \neq 0$. Тогда

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (6.10)$$

11. $y = \arccos x$.

Проведя вычисления аналогично предыдущим, получаем

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (6.11)$$

12. $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция $x = \operatorname{tg} x$ – обратная к данной. По правилу дифференцирования обратной функции имеем $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (6.12)$$

13. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Проведя вычисления аналогично предыдущим, получаем

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (6.13)$$

Для вывода следующей формулы применим правило дифференцирования сложной функции

14. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

$y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}. \qquad (6.14)$$

Пример 6.1. Вычислите производную функции $y = \sin^3 5x$.

Решение . Запишем сложную функцию $y = \sin^3 5x$ в виде цепочки элементарных функций: $y = u^3$, $u = \sin t$, $t = 5x$. Вычислим производную: $y' = 3u^2 \cdot u' = 3u^2 \cdot \cos t \cdot t' = 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$.

Пример 6.2. Вычислите производную функции $y = \sqrt{\ln(x^2 - 6x + e^{4x})}$.

Решение . Запишем сложную функцию $y = \sqrt{\ln(x^2 - 6x + e^{4x})}$ в виде цепочки элементарных функций: $y = \sqrt{u}$, $u = \ln t$, $t = x^2 - 6x + e^{4x}$. Вычислим производную: $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2-6x+e^{4x})}} \cdot \frac{1}{t} \cdot t' =$
$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2-6x+e^{4x})}} \cdot \frac{1}{x^2-6x+e^{4x}} \cdot (2x - 6 + 4e^{4x}) =$
$= \frac{x-3+2e^{4x}}{(x^2-6x+e^{4x}) \cdot \sqrt{\ln(x^2-6x+e^{4x})}}$.

§7. Логарифмическая производная.

Логарифмической производной положительной функции $y = f(x)$ называется производная функции $\ln y = \ln f(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем формулу для логарифмической производной

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \tag{7.1}$$

Если производную y' рассматривать как скорость изменения функции, то логарифмическая производная $\frac{y'}{y}$ определяет относительную скорость изменения функции.

Логарифмическую производную применяют при дифференцировании степенно-показательных функций $y = u(x)^{v(x)}$.

Пример 7.1. Вычислите производную функции $y = x^{2x+4}$.

Решение . Имеем $\ln y = (2x+4)\ln x$. Возьмем производную от правой и от левой частей равенства. Получим $\frac{y'}{y} = 2\ln x + \frac{2x+4}{x}$. Следовательно, $y' = y \cdot \left(2\ln x + \frac{2x+4}{x}\right) = x^{2x+4} \cdot \left(2\ln x + \frac{2x+4}{x}\right)$.

§8. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x)$ и $f'(x)$ — ее производная. Производную также можно рассматривать как функцию и эта функция также может иметь производную. Производная от производной функции называется *второй производной*. В общем случае, *производной порядка* n называется производная от производной порядка $(n-1)$.

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \tag{8.1}$$

или

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f(x)}{dx^{(n-1)}}\right). \tag{8.2}$$

Выясним механический смысл второй производной. Ранее было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$ (где

t – время, а s – путь), то $s'(t)$ – скорость движения точки (скорость изменения пути). Следовательно, вторая производная пути по времени $s''(t) = (s'(t))' = v'(t)$ – это скорость изменения скорости, то есть ускорение.

Пример 8.1. Вычислите третью производную функции $y = x^2\sqrt{8x+1}$.

Решение . Вычислим первую производную
$y' = 2x\sqrt{8x+1} + \dfrac{4x^2}{\sqrt{8x+1}}$.

Вычислим вторую производную

$$y'' = 2\sqrt{8x+1} + \frac{8x}{\sqrt{8x+1}} + \frac{8x\sqrt{8x+1} - \dfrac{16x^2}{\sqrt{8x+1}}}{8x+1} =$$
$$= 2\sqrt{8x+1} + \frac{8x}{\sqrt{8x+1}} + \frac{48x^2+8x}{\sqrt{(8x+1)^3}}.$$

Вычислим третью производную

$$y''' = \frac{8}{\sqrt{8x+1}} + \frac{8}{\sqrt{8x+1}} - \frac{32x}{\sqrt{(8x+1)^3}} + \frac{96x+8}{\sqrt{(8x+1)^3}} - \frac{12(48x^2+8x)}{\sqrt{(8x+1)^5}} =$$
$$= \frac{16}{\sqrt{8x+1}} + \frac{64x+8}{\sqrt{(8x+1)^3}} - \frac{12(48x^2+8x)}{\sqrt{(8x+1)^5}}.$$

Для некоторых функций можно получить общую формулу для нахождения производной любого порядка. Например,

1. $y = e^x$, тогда $y^{(n)} = e^x$;
2. $y = \ln x$, тогда $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$;
3. $y = \sin x$, тогда $y^{(n)} = \sin(x + \pi n/2)$;
4. $y = \cos x$, тогда $y^{(n)} = \cos(x + \pi n/2)$;
5. $y = x^\alpha$, тогда $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;
6. $y = a^x$, тогда $y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$.

Запишем несколько правил вычисления производной

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
2. $(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}$;
3. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Формула вычисления производной произведения двух функций называется *формулой Лейбница.*

Пример 8.2. Вычислите четвертую производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение . По формуле Лейбница
$y^{(4)} = uv^{(4)} + 4u'v''' + 6u''v'' + 4u'''v' + u^{(4)}v$, где $u = x^2$, $v = \sin x$.
Так как $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = u^{(4)} = 0$, $v' = \cos x$, $v'' = -\sin x$,
$v''' = -\cos x$, $v^{(4)} = \sin x$, то $y^{(4)} = x^2 \sin x - 8x \cos x - 12 \sin x$.

Пусть $y = f(x)$ и $dy = y'(x)dx$ – ее дифференциал.

Дифференциал от дифференциала называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается d^2y. В общем случае *дифференциалом* порядка n называется дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$.

$$d^n y = d(d^{n-1}y). \tag{8.3}$$

Выведем формулу для вычисления диффернциалов различных порядков.

Пусть x – независимая переменная. Тогда
$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''(dx)^2$,

$$d^2y = y''(x)dx^2, \tag{8.4}$$

$$d^3y = y'''(x)dx^3. \tag{8.5}$$

В общем виде

$$d^n y = y^{(n)}(x)dx^n. \tag{8.6}$$

Пусть теперь $y = f(x)$, а $x = x(t)$, тогда $y = f(x(t))$ – сложная функция от переменной t. Найдем второй дифференциал.
$d^2y = d(y'dx) = d(y')dx + y'd(dx) = y''(dx)^2 + y'd^2x$, то есть

$$d^2y = y''(t)dx^2 + y'(t)d^2x. \tag{8.7}$$

Сравнивая формулы (8.4) и (8.7), видим, что форма второго дифференциала изменилась. Появилось дополнительное слагаемое.

В формуле (8.4) второго слагаемого нет, так как $dx = \Delta x = const$ и $d(dx) = 0$. Если $x = x(t)$ – некоторая функция, dx – ее дифференциал, то есть $dx = x'dt$, то $d^2x = x''dt^2 \neq 0$.

Следовательно, второй дифференциал инвариантностью формы не обладает.

§9. Теоремы о средних значениях.

Мы уже научились вычислять производные различных функций. Теперь перейдем к рассмотрению связи между свойствами функции и свойствами ее производных.

В этом параграфе будут рассмотрены и доказаны теоремы, имеющие большое теоретическое и практическое значение.

Пусть на промежутке X задана функция $y = f(x)$.

Будем говорить, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, принимает в точке x_0 *наибольшее (наименьшее) значение*, если для всех $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

Теорема 9.1. (Ферма) *Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и во внутренней точке x_0 этого отрезка принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 функция имеет производную $f'(x_0)$, то производная равна нулю ($f'(x_0) = 0$).*

Доказательство. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Это значит, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ или $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ для всех $x \in X$.

Пусть x стремится к x_0 справа, то есть $x \to x_0 + 0$. Тогда $x - x_0 > 0$ и дробь $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$. Переходя к пределу, получим, что $f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.

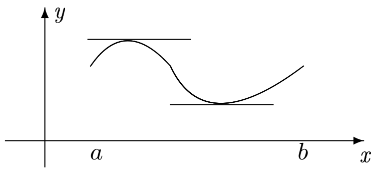
Пусть x стремится к x_0 слева, то есть $x \to x_0 - 0$. Тогда $x - x_0 < 0$ и дробь $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Переходя к пределу, получим, что $f'(x_0 - 0) =$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$

Так как в точке x_0 производная $f'(x_0)$ существует, то из полученных неравенств следует, что $f'(x_0) = 0$.

Случай, когда в точке x_0 функция принимает наименьшее значение рассматривается аналогично. □

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если функция $y = f(x)$ принимает в точке x_0 наибольшее или наименьшее значение, то касательная к кривой в этой точке, если она существует, параллельна оси OX.



Теорема 9.2. (Ролля) *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, на интервале $(a;\, b)$ имеет конечную производную и принимает на концах интервала равные значения ($f(a) = f(b)$). Тогда существует точка $c \in (a;\, b)$, производная в которой равна нулю ($f'(c) = 0$).*

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то по теореме Вейерштрасса (теор. 10.4 главы I) она достигает на $[a;\, b]$ своего наибольшего (M) и наименьшего (m) значений. Возможны два случая.

1. $M = m$. Значит, $f(x) = M$ для всех $x \in [a;\, b]$. Тогда $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\, b)$. В качестве c можно взять любую точку промежутка.

2. $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то хотя одно наибольшее или наименьшее значение функции достигается во внутренней точке c. По теореме Ферма (теор. 9.1) $f'(c) = 0$. □

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что если непрерывная кривая – график дифференцируемой функции, то между двумя точками графика, имеющими одинаковые ординаты, всегда есть точка, в которой касательная к кривой параллельна оси OX.

Следствие 9.3. *Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции существует хотя бы один корень ее производной.*

Теорема 9.4. (Лагранжа) *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, на интервале $(a;\, b)$ имеет конечную производную $f'(x)$. Тогда существует точка $c \in (a;\, b)$, такая, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{9.1}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

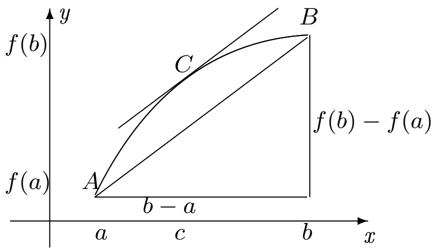
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (теор. 9.2). Функция $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, на интервале $(a;\, b)$ имеет конечную производную $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
и принимает на концах интервала равные значения
$F(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$,
$F(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$.
По теореме Ролля существует точка $c \in (a;\, b)$, такая, что $F'(c) = 0$. Но $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Из этого равенства получаем, что
$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Теорема Ролля — частный случай теоремы Лагранжа, когда $f(a) = f(b)$.

Формулу (9.1) называют *формулой Лагранжа.*

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что если непрерывная кривая AB — график дифференцируемой на отрезке $[a;\, b]$ функции, то на графике существует точка C, в которой касательная к кривой параллельна секущей AB.



Если в формуле (9.1) положить $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, то получим $f'(c) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ или $\Delta f(x_0) = f(x_0{+}\Delta x){-}f(x_0) = f'(c){\cdot}\Delta x$. Так как $c \in (x_0;\ x_0{+}\Delta x)$, то $c = x_0{+}\Theta\Delta x$, где $0 < \Theta < 1$. Тогда получим

$$\Delta f(x) = f'(x + \Theta\Delta x) \cdot \Delta x \tag{9.2}$$

Формулу (9.2) называют формулой *конечных приращений.*

Теорема 9.5. (Коши) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a;\ b]$, на интервале $(a;\ b)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a;\ b)$, такая, что*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{9.3}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы Лагранжа, и вспомогательная функция имеет вид $\Phi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.

Заметим, что теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, когда $g(x) = x$.

§10. Правило Лопиталя.

Вернемся к вопросу о вычислении пределов функции в точке. Основная трудность заключалась в том, что не было общего метода вычисления пределов, и в зависимости от вида неопределенности приходилось разыскивать различные способы и приемы их раскрытия. Дифференциальное исчисление значительно облегчает эти вычисления, предоставляя весьма мощный, но в то же время простой метод раскрытия неопределенностей. В основе этого метода лежат теоремы о среднем значении.

Теорема 10.1. (Лопиталя) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале $(a;\, b)$ и удовлетворяют условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$*;*

2. на интервале $(a;\, b)$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;

3. существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тогда предел отношения функций также существует и он равен пределу отношения производных K, то есть

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{10.1}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, положив $f(a) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$, $g(a) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;\, b)$ (непрерывность функций на $(a;\, b)$ следует из существования производной).

Возьмем точку $x \in (a;\, b)$. Тогда на отрезке $[a;\, x]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши (теорема 9.5). Следовательно, существует точка $c \in (a;\, b)$ такая, что справедливо равенство

$\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Так как $f(a) = g(a) = 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Если $x \to a$, то и $c \to a$, так как $a < c < x$. Перейдем к пределу при $x \to a + 0$. Получим

$\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = K$. □

Аналогично формулируется теорема Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ преобразуются к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем раскрываются по правилу Лопиталя.

Пример 10.1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{3x - \sin 2x}$.

Решение . Данное выражение представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Вычислим предел, применив правило Лопиталя.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{3x-\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{3-2\cos 2x}=\dfrac{1+1}{3-2}=2.$

Пример 10.2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot \operatorname{tg} x}$.

Решение . Данное выражение представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Вычислим предел, применив правило Лопиталя.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot \operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos^2 x}{\sin x\cos x+x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=\dfrac{1-0}{1-0+1}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 10.3. Вычислите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}+x}{\operatorname{tg} x-x}$.

Решение . Данное выражение представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вычислим предел, применив правило Лопиталя.
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}+x}{\operatorname{tg} x-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1+0}{1-0}=1.$

Пример 10.4. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{1-x}$.

Решение . Данное выражение представляет собой неопределенность $0\cdot\infty$. Вычислим предел, применив правило Лопиталя два раза.
$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{x-1}}=\dfrac{2}{\infty}=0.$

Осталось рассмотреть неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0. С помощью тождества $u^v=e^{v\ln u}$ они сводятся в выражениям вида $0\cdot\infty$, раскрывать которые мы уже научились.

Пример 10.5. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

Решение . Имеем $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}$. Вычислим предел выражения, стоящего в показателе степени, применив правило Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{x\ln^2 x}{x-1}=$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{1} = -\lim_{x\to 1}(\ln^2 x + 2\ln x) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = e^0 = 1$.

Замечание 10.2. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно вычислять **только тогда**, когда существует предел отношения производных. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, это не значит, что и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует.

Пример 10.6. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение . Проверим, что предел отношения функций существует. В самом деле, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Но предел отношения производных не существует (по определению Гейне), так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$.

§11. Монотонность функции.

Теорема 11.1. (необходимое и достаточное условие постоянства функции.) *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\, b]$ и на $(a;\, b)$ имеет конечную производную. Для того чтобы $f(x)$ была постоянной на $[a;\, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\, b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Так как на отрезке $[a;\, b]$ функция $f(x) = c$, то по правилу вычисления производной $f'(x) = (c)' = 0$.

2. Достаточность. Пусть для любой точки $x \in (a;\, b)$ $f'(x) = 0$ и пусть x_1 и x_2 – произвольные точки отрезка $[a;\, b]$, причем $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа(теорема 9.4) существует точка $c \in (a;\, b)$ такая, что $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности выбора точек x_1 и x_2 получаем, что $f(x) = c$. □

Теорема 11.2. (необходимое и достаточное условие монотонности функции.) *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\, b]$ и на $(a;\, b)$*

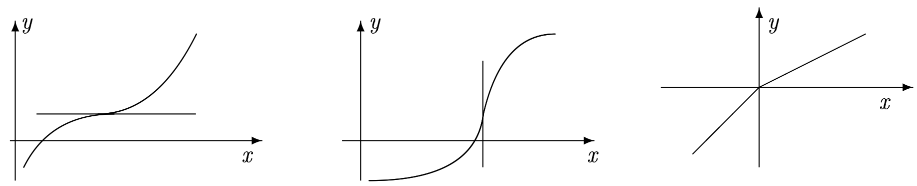
имеет конечную производную. Для того чтобы $f(x)$ возрастала на $[a;\, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a;\, b)$. Для того чтобы $f(x)$ убывала на $[a;\, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \leqslant 0$ для всех $x \in (a;\, b)$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;\, b]$. Тогда для любых точек $x_0, x \in [a;\, b]$ из неравенства $x_0 < x$ следует неравенство $f(x_0) < f(x)$. Поэтому дробь $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Перейдем к пределу при $x \to x_0$. Получим, что производная $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

2. Достаточность. Пусть для любой точки $x \in (a;\, b)$ производная $f'(x) \geqslant 0$ и пусть x_1 и x_2 – произвольные точки отрезка $[a;\, b]$, причем $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (теор. 9.4) существует точка $c \in (x_1;\, x_2)$ такая, что $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geqslant 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ или $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. В силу произвольности выбора точек x_1 и x_2 получаем, что функция $f(x)$ возрастает возрастает на отрезке $[a;\, b]$.

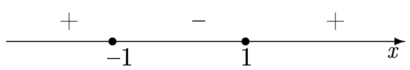
Для убывающей функции доказательство проводится аналогично. □

На рисунке приведены графики возрастающих функций.



Пример 11.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 3x$.

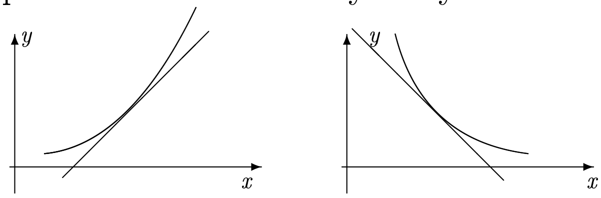
Решение . Вычислим производную $y' = 3x^2 - 3$ и найдем точки, в которых производная обращается в ноль: $3x^2 - 3 = 0$ при $x = \pm 1$. Отметим эти точки на числовой оси. Находим знаки производной на получившихся промежутках.



Получим, что функция $y = x^3 - 3x$ возрастает при $x \in (-\infty; -1]$ и при

$x \in [1; +\infty)$ и функция $y = x^3 - 3x$ убывает при $x \in [-1; 1]$.

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a;\, b]$, то касательная к графику функции образует с положительным направлением оси OX острый угол, а если $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a;\, b]$, то касательная к графику функции образует с положительным направлением оси OX тупой угол.

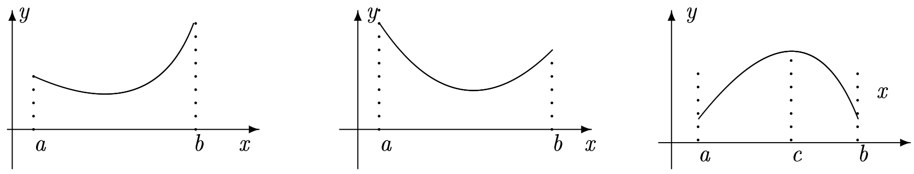


§12. Точки экстремумов функции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на промежутке X. Эта функция имеет во внутренней точке x_0 *локальный максимум* (*локальный минимум*), если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

Максимумы и минимумы функции объединяют одним словом *экстремум.*

Понятия локального максимума и локального минимума нельзя путать с наибольшим или наименьшим значением функции на промежутке (отрезке). Локальный максимум — это наибольшее значение функции относительно близлежащих точек, но он может не быть наибольшим значением функции на отрезке. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a;\, b]$, нужно найти все ее максимальные и минимальные значения, значения функции на концах отрезка. Затем выбрать наибольшее и наименьшее значения. На рисунке приведены примеры функций, имеющих наибольшее значения в точке a, в точке b и во внутренней точке отрезка $[a;\, b]$.



Теорема 12.1. (необходимое условие экстремума) *В точке экстремума производная дифференцируемой функции равна нулю.*

В теореме утверждается, что, если дифференцируемая функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a;\, b]$, имеет в точке $x_0 \in (a;\, b)$ экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка локального максимума функции $y = f(x)$, тогда при достаточно малых Δx $\;f(x) < f(x_0)$.
1 способ.
Пусть $x < x_0$. Тогда $\Delta x = x - x_0 < 0$ и дробь $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$.
Пусть $x > x_0$. Тогда $\Delta x > 0$ и дробь $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$.
Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$,
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$.
Так как производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует, то из двух последних неравенств следует, что $f'(x_0) = 0$.
2 способ. Рассмотрим отрезок $[x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x]$. На этом отрезке в точке x_0 функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение. По теореме Ферма (теор. 9.1) $f'(x_0) = 0$. □

Заметим, что для дифференцируемой функции условие равенства нулю производной является *необходимым*, но не является *достаточным*.

Точки, подозрительные на экстремум, будем называть *критическими*. К критическим точкам относят *стационарные точки*, то есть точки, производная в которых равна нулю, и точки, в которых производная бесконечна или не существует.

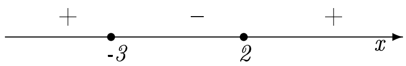
Пусть x_0 – критическая точка. Рассмотрим достаточные условия экстремума функции.

Теорема 12.2. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, может быть, самой точки x_0.*
Если при переходе аргумента через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "плюса" на "минус", то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум.
Если при переходе аргумента через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "минуса" на "плюс", то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.
Если при переходе аргумента через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Теорема 12.3. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$.*
Если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум.
Если $f''(x_0) > 0$, то функция $y = f(x)$, имеет в точке x_0 локальный минимум.

Пример 12.1. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$.

Решение . Вычислим производную $y'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, найдем критические точки $x = -3$ и $x = 2$, и вычислим знаки производной на получившихся промежутках.

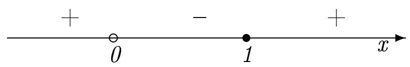


По теореме 12.2 $x = -3$ – точка максимума и $y_{\max} = 88$, $x = 2$ – точка минимума и $y_{\min} = -37$.

Пример 12.2. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию

$y = (x-2,5)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

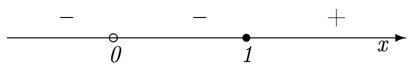
Решение . Вычислим производную $y'(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2(x-2,5)}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$, найдем критические точки $x = 1$ и $x = 0$ и вычислим знаки производной на получившихся промежутках.



Итак, функция $y = (x-2,5)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ возрастает при $x \in (-\infty; 0]$ и при $x \in [1; +\infty)$ и убывает при $x \in [0; 1]$. По теореме 12.2 $x = 0$ – точка максимума и $y_{\max} = 0$, $x = 1$ – точка минимума и $y_{\min} = -1,5$.

Пример 12.3. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = (x-4)\cdot\sqrt[3]{x}$.

Решение . Вычислим производную $y'(x) = 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$, найдем критические точки $x = 1$ и $x = 0$ и вычислим знаки производной на получившихся промежутках.



Функция $y = (x-4)\cdot\sqrt[3]{x}$ убывает при $x \in (-\infty; 1]$ и возрастает при $x \in [1; +\infty)$. По теореме 12.2 $x = 1$ – точка минимума и $y_{\min} = -3$. В точке $x = 0$ функция экстремума не имеет.

Пример 12.4. Требуется огородить прямоугольный участок площадью S м^2, имеющий наименьший периметр.

Решение . Пусть x – длина участка, y – его ширина. Тогда площадь $S = xy$. Следовательно, $y = \dfrac{S}{x}$. Периметр участка $P = 2(x+y) = 2x + \dfrac{2S}{x}$. Исследуем эту функцию на экстремум. Вычислив производную $P'(x) = 2 - \dfrac{2S}{x^2}$ и приравняв ее нулю, получим, что функция имеет одну критическую точку $x = \sqrt{S}$ (по условию задачи $x > 0$). Вторая производная $P''(x) = \dfrac{4S}{x^3}$ и $P''(\sqrt{S}) = \dfrac{4S}{\sqrt{S^3}} = \dfrac{4}{\sqrt{S}} > 0$. Следовательно $x = \sqrt{S}$ – точка минимума и $P_{\min} = 4\sqrt{S}$.

Пример 12.5. (задача Дидоны). Из имеющихся досок можно сделать забор длины l. Как этим забором огородить участок наибольшей площади, используя в качестве одной стороны стену прилегающего дома.

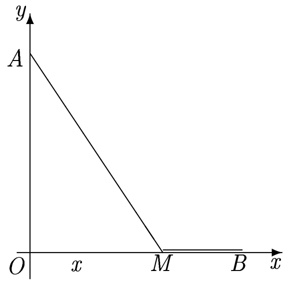
Решение . Пусть стороны прямоугольника, не прилегающие к дому, равны $x\,(0 < x < l/2)$, третья сторона равна $y = l - 2x$. Площадь участка $S(x) = x(l - 2x) = lx - 2x^2$. Вычислив производную $S'(x) = l - 4x$ и приравняв ее нулю, найдем критическую точку $x = \dfrac{l}{4}$. Вторая производная $S''(x) = -4 < 0$, поэтому в точке $x = \dfrac{l}{4}$ функция $S(x)$ имеет максимум и $S_{\max} = \dfrac{l^2}{8}$.

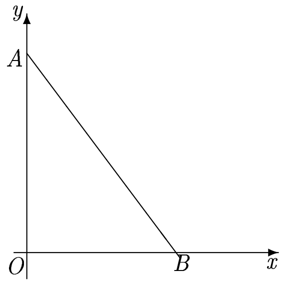
Пример 12.6. Требуется огородить прямоугольный участок площадью S м^2, а затем разделить его на n частей, $n-1$ перегородкой, параллельными меньшей стороне участка. Каковы должны быть размеры участка (x – длина, y – ширина), чтобы на постройку пошло наименьшее количество материала?

Решение . Пусть x – длина участка, y – его ширина и $x < y$. Тогда его площадь $S = xy$, следовательно, $y = \dfrac{S}{x}$. Длина всех перегородок и ограды $P = (n+1)x + 2y = (n+1)x + \dfrac{2S}{x}$. Вычислив производную $P'(x) = (n+1) - \dfrac{2S}{x^2}$ и приравняв ее нулю, найдем критическую точку $x = \sqrt{2S/(n+1)}$ (по условию $x > 0$). Вторая производная $P''(x) = \dfrac{4S}{x^3} > 0$ при $x > 0$, поэтому в точке $x = \sqrt{2S/(n+1)}$ функция $P(x)$ имеет минимум и $P_{\min} = 2\sqrt{2S(n+1)}$.

Пример 12.7. (о наименьшей стоимости перевозок). Завод A нужно соединить с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город B. Расстояние OA от завода до железной дороги равно a, а расстояние OB по железной дороге равно b. Стоимость перевозок по шоссе в k $(k > 1)$ раз выше стоимости перевозок по железной дороге. Как провести шоссе AM к железной дороге, чтобы стоимость перевозок была наименьшей.

Решение . Сделаем чертеж.





Очевидно, что точка M не может лежать левее точки O и правее точки B. Обозначим расстояние $OM = x$, тогда $MB = b - x$ и $AM = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Пусть стоимость перевозки груза на 1 км по железной дороге равна z рублей, тогда стоимость перевозки груза на 1 км по шоссе равна kz рублей и общая стоимость перевозок из A в B $P = z(b - x) + kz\sqrt{a^2 + x^2}$. Рассмотрим функцию $f(x) = b - x + k\sqrt{a^2 + x^2}$ при $x \in [0;\, b]$ и исследуем ее на экстремум. Вычислим производную $f'(x) = -1 + \dfrac{kx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ и приравняем ее нулю. Единственной критической точкой является точка $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$ ($x > 0$, поэтому рассматриваем только положительный корень).

Рассмотрим два случая. Первый случай — найденная точка принадлежит интервалу $(0;\, b)$, второй случай — найденная точка лежит вне интервала $(0;\, b)$.

1 случай. Пусть $x_0 \in (0;\, b)$ $(k > \sqrt{2})$, Тогда $f''(x) = \dfrac{ka^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} > 0$, следовательно x_0 — точка минимума и наименьшая стоимость перевозки груза равна $P_{\min} = z(b + a\sqrt{k^2 - 1})$.

2 случай. Пусть $x_0 \notin (0;\, b)$ $(1 < k < \sqrt{2})$. тогда на отрезке $[0;\, b]$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, функция $f(x)$ убывает и наименьшее значение принимает в точке $x = b$. Таким образом, $P_{\min} = zk\sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 12.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x - 1)^2\sqrt{x^2 - 2x + 6}$ на отрезке $[0;\, 3]$.

Решение . Функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$. Вычислив производную

$$y'(x) = 2(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \frac{(x - 1)^3}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{(x - 1)(3x^2 - 6x + 13)}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$$

и приравняв ее нулю, найдем критическую точку $x = 1$. Подсчитаем значения функции в критической точке и на концах отрезка: $y(1) = 0$, $y(0) = \sqrt{6}$, $y(3) = 12$. Таким образом получили, что $y_{\text{наим.}} = y(1) = 0$, $y_{\text{наиб.}} = y(3) = 12$.

§13. Выпуклость графиков функции. Точки перегиба.

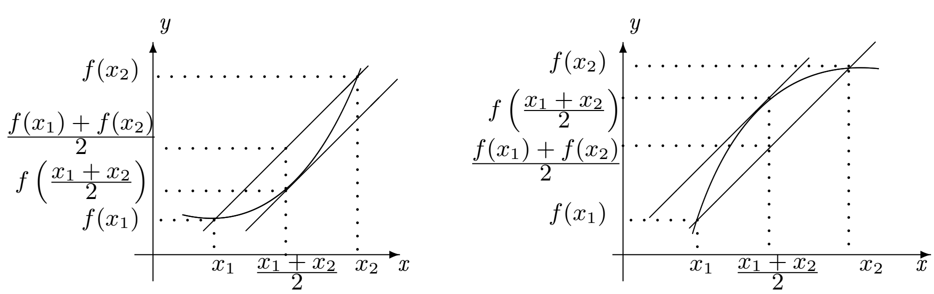
Функция (график функции) $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{13.1}$$

Функции $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{13.2}$$

Очевидно, что если график дифференцируемой функции является выпуклым вниз на промежутке X, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, лежит выше графика функции, а касательная к графику функции, проведенная в любой точке из промежутка X, лежит ниже графика функции. Если график дифференцируемой функции является выпуклым вверх на промежутке X, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, лежит ниже графика функции, а касательная к графику функции, проведенная в любой точке из промежутка X, лежит выше графика функции.



Теорема 13.1. *Дифференцируемая функция $y = f(x)$ выпукла вниз на промежутке X, если ее первая производная $f'(x)$ на этом промежутке*

возрастает. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ выпукла вверх на промежутке X, если ее первая производная $f'(x)$ на этом промежутке убывает.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что если $f'(x)$ возрастает на промежутке X, то тангенс угла наклона касательной к графику функции возрастает, а это означает выпуклость графика функции вниз. Если $f'(x)$ убывает на промежутке X, то тангенс угла наклона касательной к графику функции убывает, а это означает выпуклость графика функции вверх.

Используя условие монотонности производной функции, можно сформулировать достаточные условия выпуклости функции.

Теорема 13.2. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X. Функция выпукла вниз, если ее вторая производная положительна ($f''(x) > 0$) и выпукла вверх, если ее вторая производная отрицательна ($f''(x) < 0$).*

Если $f''(x) = (f'(x))' > 0$ на промежутке X, то на этом промежутке функция $f'(x)$ возрастает, и по теореме 13.1 функция выпукла вниз.

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка, в которой функция меняет направление выпуклости.

Теорема 13.3. (необходимое условие существования точки перегиба) *Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X, то в точке перегиба ее вторая производная равна нулю ($f''(x) = 0$).*

Теорема 13.4. (достаточное условие существования точки перегиба) *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X и $f''(x_0) = 0$. Если при переходе аргумента через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Заметим, что в точке перегиба касательная к графику функции переходит с одной стороны графика на другую.

Пример 13.1. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Решение . Найдем производные: $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.
Вторая производная $y'' = 0$ при $x = 0;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}$. На интервалах $(-\infty; \sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ вторая производная отрицательна, следовательно, на этих интервалах функция выпукла вверх. На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ вторая производная положительна, следовательно, на этих интервалах функция выпукла вниз. Точки $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ являются точкми перегиба графика функции.

§14. Асимптоты графика функции.

Понятие асимптоты вводится обычно для кривых, ветви которых уходят в бесконечность. Это возможно, если функция неограничена или если функция определена на бесконечном промежутке.

Прямая называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки кривой $(x;\ f(x))$ до прямой стремится к нулю, при движении точки по кривой к бесконечности.

Различают 3 вида асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Теорема 14.1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (исключая, быть может, саму точку x_0). Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равен бесконечности, то в точке x_0 функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.*

Уравнение вертикальной асимптоты $y = x_0$.

Очевидно, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то в этой точке не может быть вертикальной асимптоты. Вертикальные асимптоты функция может иметь в точках разрыва и на концах промежутка определения.

Теорема 14.2. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке и при $x \to \infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.*

Если существует только один из пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b_1$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b_2$, то функция имеет только левостороннюю или правосторонюю горизонтальную асимптоту. Например, функция $y = e^x$ при $x \to -\infty$ имеет левостороннюю горизонтальную асимптоту $y = 0$, функция $y = \operatorname{arctg} x$. при $x \to -\infty$ имеет левостороннюю горизонтальную асимптоту $y = -\frac{\pi}{2}$, а при $x \to +\infty$ имеет правостороннюю горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, то функция $y = f(x)$ не может иметь горизонтальных асимптот, но может иметь наклонные.

Теорема 14.3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке и при $x \to \infty$ существуют конечные пределы $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.*

Наклонная асимптота, как и горизонтальная может быть левосторонней, правостороней или двухсторонней.

Пример 14.1. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 5}{x^3 - 1}$.

Решение . Так как $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4 + 3x^3 + 5}{x^3 - 1} = \infty$, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика этой функции.

Функция определена на бесконечном промежутке. Проверим существование наклонных асимптот.
Найдем k: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 3x^3 + 5}{(x^3 - 1)\cdot x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 3x^3 + 5}{x^4 - x} = 1.$

Найдем b: $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4 + 3x^3 + 5}{x^3 - 1} - x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 + x + 5}{x^3 - 1} = 3.$
Прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика этой функции.

Пример 14.2. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Решение . Функция $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ непрерывна, следовательно, она не имеет вертикальных асимптот. Проверим существование наклонных асимптот. Так как $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\cdot x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$, то график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

§15. Исследование функции и построение графика.

Схема исследования функции:

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность и периодичность;
3. Исследовать функцию на непрерывность, если функция имеет точки разрыва, исследовать поведение функции вблизи точек разрыва;
4. Найти асимптоты графика функции, если они существуют;
5. Вычислить первую производную, найти точки экстремумов и интервалы монотонности функции;
6. Вычислить вторую производную, найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции;
7. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и, если необходимо, другие точки;
8. Построить график функции.

Пример 15.1. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ и построить ее график.

Решение . 1. Область определения функции $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Функция общего вида.

3. Функция непрерывна.

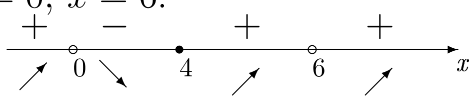
4. Вертикальных асимптот не имеет. Найдем наклонные асимптоты. Вычислим $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x}=1$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-6x^2}+x^2}=\frac{-6}{3}=-2.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y=x-2$.

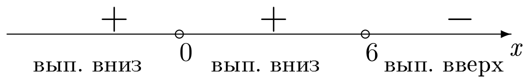
5. Вычислим производную: $y'=\dfrac{x^2-4x}{\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}=\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$.

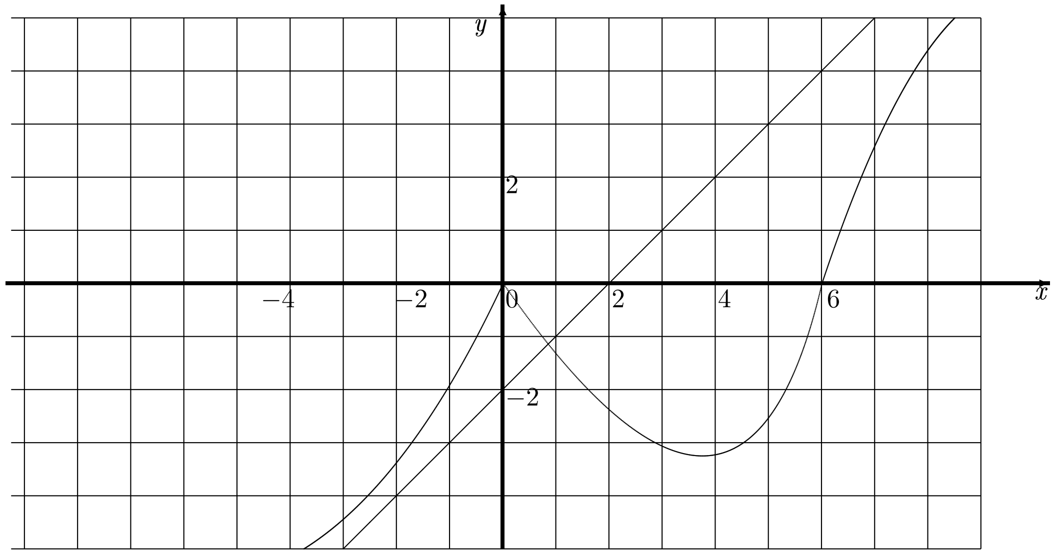
Найдем критические точки функции, точки экстремумов и интервалы монотонности функции. Имеем $y'=0$ при $x=4$ и y' не существует при $x=0$, $x=6$.



$x=0$ – точка максимума, $y=0$ – максимум функции, $x=4$ – точка минимума, $y=-2\sqrt[3]{4}\approx-3,2$ – минимум функции. функция возрастает при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(4;+\infty)$, функция убывает при $x\in(0;4)$.

6. Вычислим вторую производную $y''=\dfrac{-8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}$. Имеем y'' не существует при $x=0$, $x=6$ и ни обращается в ноль ни в одной точке.





§16. Понятие частной производной. Дифференциал функции векторного аргумента.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$ двух переменных x и y. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y – приращение Δy. Величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется *полным приращением* функции $f(x, y)$ в точке (x, y). Если задать приращение только одного аргумента, то получим *частные приращения* функции

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \qquad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

В общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Например, если $z = xy$, то $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$, $\Delta_x z = y\Delta x$, $\Delta_y z = x\Delta y$.

Определение 16.1. *Частной производной* функции нескольких переменных называется предел отношения частного приращения функции по одной переменной к приращению этой переменной, когда приращение переменной стремится к нулю.

Если $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, то она имеет две частных производных

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \tag{16.1}$$

Обозначаются частные производные следующим образом: z'_x, z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Если $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция n независимых переменных, то она имеет n частных производных $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial y}{\partial x_n}$.

Для вычисления частной производной нужно рассматривать все переменные, кроме одной, как постоянные и вычислять производную по обычным правилам и формулам.

Пример 16.1. Вычислите частные производные функции
$z = x^2y^3 - 3xy^2 + 4x^3 - 10y$.

Решение . Вычислим частные производные, полагая сначала y постоянной, а затем x.
$z'_x = (x^2y^3 - 3xy^2 + 4x^3 - 10y)'_x = y^3(x^2)' - 3y^2(x)' + 4(x^3)' - 0 =$
$= y^3 \cdot 2x - 3y^2 \cdot 1 + 12x^2 = 2xy^3 - 3y^2 + 12x^2$;
$z'_y = (x^2y^3 - 3xy^2 + 4x^3 - 10y)'_y = x^2(y^3)' - 3x(y^2)' + 0 - 10(y)' =$
$= x^2 \cdot 3y^2 - 3x \cdot 2y - 10 = 3x^2y^2 - 6xy - 10$.

Пример 16.2. Вычислите частные производные функции $z = x^2 \cdot \ln y$.

Решение . Вычислим частные производные, полагая сначала y постоянной, а затем x.
$z'_x = (x^2 \cdot \ln y)'_x = (x^2)'_x \cdot \ln y + x^2 \cdot (\ln y)'_x = 2x \ln y + x^2 \cdot 0 = 2x \ln y$;
$z'_y = (x^2 \cdot \ln y)'_y = (x^2)'_y \cdot \ln y + x^2 \cdot (\ln y)'_y = 0 \cdot \ln y + x^2 \cdot \dfrac{1}{y} = x^2 \cdot \dfrac{1}{y}$.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, зависящая от переменных x и y. Рассмотрим приращение этой функции $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$. Представим приращение в виде

$$\Delta z = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y \tag{16.2}$$

где α_1, α_2 — бесконечно малые при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная часть приращения функции.

Если Δz записывается в виде (16.2), то

$$dz = A_1\Delta x + A_2\Delta y.$$

Можно показать, что $A_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $A_2 = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Например, в формуле (16.2) положить $\Delta y = 0$ и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда $A_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$, то есть $A_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x}$. Формула для дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{16.3}$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Выражение (16.3) задает *полный дифференциал* функции $z = f(x, y)$. Слагаемые в этой формуле называются *частными дифференциалами*.

Для функции, приведенной в примере 16.2 полный дифференциал принимает вид $dz = 2x \ln y \, dx + \dfrac{x^2}{y} \, dy$, а частные дифференциалы равны $dz_x = 2x \ln y \, dx$ и $dz_y = \dfrac{x^2}{y} \, dy$.

Если полное приращение функции $z = f(x, y)$ представимо в виде (16.2), то функция называется *дифференцируемой*.

Для функции одной переменной условие дифференцируемости и условие существования конечной производной эквивалентны, то есть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $f'(x_0)$. Для функции многих переменных условие дифференцируемости более сложное.

Теорема 16.1. *Если частные производные функции $z = f(x, y)$ существуют в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в точке M_0, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0.*

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то формулу (16.2) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y. \tag{16.4}$$

Для функции $y = f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ от n переменных определения дифференциала и условие дифференцируемости даются аналогично.

Полный дифференциал функции векторного аргумента находится по формуле

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{16.5}$$

Как и производная функции одной переменной, частные производные для функции двух переменных имеют геометрический, механический и экономический смысл. Так экономический смысл частной производной

— это количество продукции, приходящееся на единицу одного фактора (переменной), если другой фактор (переменная) остается неизменной.

Ранее было дано определение касательной к кривой, как предельное положение секущей. Аналогично определяется касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ ($F(x, y, z) = 0$). Плоскость, проходящая через точку M_0 поверхности, называется *касательной плоскостью* в данной точке, если угол между данной плоскостью и секущей, проходящей через точку M_0 и любую другую точку поверхности M, когда точка M, двигаясь по поверхности, приближается к точке M_0, стремится 0.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{16.6}$$

а уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{16.7}$$

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{16.8}$$

а уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{16.9}$$

§17. Производная произвольной функции. Производная матрица.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$, то есть $y = f(x)$ – обычная скалярная функция. Ее производную мы определили следующим образом:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{17.1}$$

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^{(n)} \to Y \subset \mathbb{R}$, то есть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ – скалярная функция векторного аргумента. Ее производная определяется как вектор, координатами которого являются частные производные:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) \tag{17.2}$$

Пусть $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, то есть $y(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ – векторная функция скалярного аргумента.

Производной векторной функции скалярного аргумента назовем вектор

$$y'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \dots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^{(n)} \to Y \subset \mathbb{R}^{(m)}$, то есть $y(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ – векторная функция векторного аргумента.

Производной векторной функции векторного аргумента назовем матрицу A размера $m \times n$, элементами которой являются частные производные функций $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$

$$A(x_0) = y'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{17.4}$$

Можно показать, что если приращение функции можно представить в виде $\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)$, где $\alpha(x_0, \Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема и матрица A есть производная матрица функции $y = f(x)$.

§18. Производные высших порядков функции векторного аргумента.

Рассмотрим вычисление производных порядка выше первого для скалярной функции векторного аргумента. Все рассуждения будем проводить для функции $z = f(x, y)$.

Так как частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ являются функциями, то для них также можно находить частные производные. Это будут *частные производные второго порядка*:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right), \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Частные производные $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ называют *смешанными производными*. Они отличаются порядком дифференцирования.

Пример 18.1. Вычислите частные производные второго порядка от функции $z = x^2 y + 2x \ln y$.

Решение . Частные производные первого порядка имеют вид:
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2\ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \dfrac{2x}{y}$. Тогда
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2x}{y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + \dfrac{2}{y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x + \dfrac{2}{y}$.

Пример 18.2. Вычислите частные производные второго порядка от функции $z = (x^2 y + xy^3)^2$.

Решение . Частные производные первого порядка имеют вид:
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2y + xy^3)(2xy + y^3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2y + xy^3)(x^2 + 3xy^2)$. Тогда
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(2xy+y^3)(2xy+y^3)+2(x^2y+xy^3)2y = 2(2xy+y^3)^2+4y(x^2y+xy^3)$,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(x^2 + 3xy^2)(x^2 + 3xy^2) + 2(x^2y + xy^3)6xy = 2(x^2 + 3xy^2)^2 +$
$+12xy(x^2y + xy^3)$,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2(x^2 + 3xy^2)(2xy + y^3) + 2(x^2y + xy^3)(2x + 3y^2)$,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2(2xy + y^3)(x^2y + 3xy^3) + 2(x^2y + xy^3)(2x + 3y^2)$.

В этих примерах смешанные производные равны между собой. Возникает вопрос – всегда ли выполняется подобное равенство. Ответ на него дает теорема.

Теорема 18.1. *Если у функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности существуют частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, причем смешанные производные непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то их значения в точке $M_0(x_0, y_0)$ равны, то есть $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.*

Можно определить частные производные любого порядка для функции, зависящей от любого числа переменных. Утвержение, аналогичное теореме 18.1 можно сформулироать и доказать для частных производных любого порядка, отличающихся лишь порядком дифференцирования. Например,
$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)$,
$\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y}\right)$ и т.д.

§19. Дифференциалы высших порядков.

В §8 был определен дифференциал порядка n от скалярной функции скалярного аргумента. Аналогично вводятся дифференциалы высших порядков для функции векторного аргумента

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала.

$$d^2 y = d(dy) \tag{19.1}$$

Дифференциалом порядка n называется дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$.

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \tag{19.2}$$

Выведем формулу для вычисления дифференциалов различных порядков.

Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков. Тогда
$d^2 z = d(dz) = d\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} dx\right) dx + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} dx\right) dy +$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy^2,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy^2 \tag{19.3}$$

Рассуждая как в §8, можно вывести формулу для вычисления дифференциала порядка n для функции двух переменных

$$d^nz=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial^k x\partial^{n-k}y}dx^kdy^{n-k} \tag{19.4}$$

Пусть задана функция от n переменных $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Тогда второй дифференциал можно вычислить по формуле

$$d^2y=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j \tag{19.5}$$

или в операторном виде

$$d^2y=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(x_1,\ldots,x_n) \tag{19.6}$$

Для дифференциала порядка n вычислительная формула имеет вид

$$d^ny=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)^n f(x_1,\ldots,x_n) \tag{19.7}$$

Если $x_1,\ldots,x_n$ не являются независимыми переменными, то

$$d^2y=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}d^2x_i \tag{19.8}$$

Сравнивая формулы (19.4) и (18.8), видим, что форма второго дифференциала изменилась. Появилось дополнительное слагаемое. Следовательно, второй дифференциал инвариантностью формы не обладает.

§20. Производная сложной функции векторного аргумента.

Не уменьшая общности, можно проводить все рассуждения для функции двух переменных.

1. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^{(2)}$, а функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ определены на промежутке $(a;\, b)$. Тогда $z(t) = f(x(t), y(t))$ – сложная функция от переменной t. Если существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и непрерывные производные $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, то функция $z(t)$ также имеет производную, которая вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{20.1}$$

Для доказательства формулы зададим приращение Δt переменной t. Функции $x(t)$ и $y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Этим приращениям будет соответствовать приращение функции $\Delta f = \Delta z$. По формуле (16.6) приращение функции $z(t)$ будет иметь вид

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где α и β – бесконечно малые функции. Разделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2. Пусть $z = f(t)$, где $t = t(x,y)$ ($(x,y) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^{(2)}$, $t(x,y) \in (a;b)$, $D(f) = (a;b)$ и область $D(f)$ определения функции z и множество значений $E(t)$ функции t согласованы). Тогда $z = f(t(x,y))$ – сложная функция двух переменных. И пусть существуют непрерывные производные $\dfrac{df}{dt}$, $\dfrac{\partial t}{\partial x}$, $\dfrac{\partial t}{\partial y}$. Тогда функция $z = f(t(x,y))$ имеет частные производные, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \tag{20.2}$$

3. Пусть $z = f(u,v)$, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ ($(x,y) \in D(f)$ и $D(f)$ согласована с $E(u)$, $E(v)$). Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y))$ – сложная функция двух переменных. И пусть существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. Тогда функция $z = f(u(x,y), v(x,y))$ имеет

частные производные, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{20.3}$$

Для сложной функции двух переменных $z = f(u(x,y), v(x,y))$ вычислим дифференциал.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$

Таким образом, мы доказали, что первый дифференциал для функции многих переменных обладает инвариантностью формы, то есть не меняет свой вид, если функция z является сложной функцией.

§21. Производная параметрически заданной функции.

Зависимость функции y от аргумента x не всегда выражается формулой, непосредственно связывающей x и y. Иногда эта связь осуществляется с помощью новой переменной, называемой *параметром.*

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \qquad (t \in [\alpha;\, \beta]) \tag{21.1}$$

В этом случае говорят, что функция $y(x)$ задана *параметрически.* Если x и y рассматривать как декартовы координаты точки на плоскости, то уравнения (21.1) каждому значению параметра t ставят в соответствие точку на плоскости. Множество этих точек образует на плоскости кривую. Уравнения (21.1) называют *параметрическими уравнениями кривой.*

Если в параметрическом задании функции из второго уравнения можно выразить $t = \varphi(x)$ и подставить это выражение в первое уравнение, то получим явное задание функции $y = y(\varphi(x))$.

Предположим, что функции $y(t)$ и $x(t)$ непрерывны, дифференцируемы, причем $x'(t) \neq 0$ (тогда существует обратная функция $t = \varphi(x)$). Применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций,

получим $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
Таким образом, производная функции, заданной параметрически находится по формуле

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \\ x = x(t) \end{cases} \tag{21.2}$$

Найдем вторую производную этой функции: $y''_x = \dfrac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \dfrac{y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}$.
Вторая производная находится по формуле

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{y''_{t^2} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3} \\ x = x(t) \end{cases} \tag{21.3}$$

Пример 21.1. $\begin{cases} y = 1 + t^2 - 2t^3 \\ x = 2t + t^2 \end{cases}$

Решение . В области определения функции $y(x)$ вычислим первую производную. Для этого вычислим производные функций $y(t)$ и $x(t)$ по переменной t: $y'_t = 2t - 6t^2 = 2(t - 3t^2)$, $x'_t = 2 + 2t = 2(1 + t)$. Получаем
$\begin{cases} y'_x = \dfrac{t - 3t^2}{1 + t} \\ x = 2t + t^2 \end{cases}$.
Вычислим вторую производную
$(y'_x)'_t = \dfrac{(1 - 6t)(1 + t) - (t - 3t^2)}{(1 + t)^2} = \dfrac{1 - 6t - 3t^2}{(1 + t)^2}$.
Получаем
$\begin{cases} y''_x = \dfrac{1 - 6t - 3t^2}{(1 + t)^3} \\ x = 2t + t^2 \end{cases}$.

§22. Производная неявно заданной функции.

Пусть задано уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{22.1}$$

Функция $F(x, y)$ определена в прямоугольнике $[a;\, b] \times [c;\, d]$. Если для каждого $x \in [a;\, b]$ существует единственный $y \in [c;\, d]$ такой, что пара $(x;\, y)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, то говорят, что это уравнение определяет y как *неявную функцию* от x (хотя это представление часто бывает достаточно сложным). Если нам удалось каким-либо способом найти зависимость $y = f(x)$, то подставив функцию $y = f(x)$ в уравнение $F(x, y) = 0$, получим тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Ответ на вопрос, когда существует неявно заданная функция, при каких условиях она дифференцируема, и как найти ее производную дает теорема.

Теорема 22.1. *Задано уравнение $F(x, y) = 0$ и функция $F(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*
1) функции $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ определены и непрерывны в прямоугольнике $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta; y_0 + \beta]$;
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Тогда справедливы утверждения:
a) в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \times (y_0 - \gamma; y_0 + \gamma)$ уравнение (22.1) определяет неявную функцию $y = y(x)$;
b) в промежутке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $y = y(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, которая вычисляется по формуле

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (22.2)$$

Формулу (22.2) можно получить, продифференцировав по x уравнение (22.1)

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0.$$

Продифференцировав по x это уравнение, найдем вторую производную

$$F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y' + F''_{y^2} \cdot (y')^2 + F'_y \cdot y'' = 0 \qquad (22.3)$$

Из этого уравнения выражаем y'':

$$y'' = -\frac{F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y' + F''_{y^2} \cdot (y')^2}{F'_y} \tag{22.4}$$

Пусть задано уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{22.5}$$

Если для каждой точки $(x, y) \in D$ существует единственный z такой, что тройка $(x; y; z)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y, z) = 0$, то говорят, что это уравнение определяет z как *неявную функцию* от x и y. Если нам удалось каким-либо способом найти зависимость $z = f(x, y)$, то подставив функцию $z = f(x, y)$ в уравнение $F(x, y, z) = 0$, получим тождество $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$.

Можно также сформулировать теорему о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции от двух переменных. Тогда в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ будет существовать неявная функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные можно вычислить по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \tag{22.6}$$

Пример 22.1. Вычислите первую и вторую производные неявно заданной функции $xy - \ln y = 0$.

Решение . Продифференцируем равенство по x, считая, что $y = y(x)$: $y + x \cdot y' - \dfrac{y'}{y} = 0$. Перенесем слагаемые, не содержащие y' в правую часть уравнения: $y' \cdot \dfrac{1 - xy}{y} = y$. Из этого уравнения выразим производную. Итак, $y' = \dfrac{y^2}{1 - xy}$.

Продифференцируем равенство еще раз: $y' + y' + xy'' - \dfrac{y''y - y'y'}{y^2} = 0$. Приведем подобные $2y' + xy'' - \dfrac{y''}{y} + \dfrac{(y')^2}{y^2} = 0$ и выразим вторую производную: $y'' = \dfrac{2y^2y' + (y')^2}{y(1 - xy)}$.

§23. Экстремум функции нескольких переменных.

Локальный эктремум для функции многих переменных определяется так же как для функции одной переменной.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^{(n)} \to Y \subset \mathbb{R}$, то есть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X$ называется точкой *локального максимума (локального минимума)* функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

Теорема 23.1. (**необходимое условие экстремума**) *Если дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет экстремум в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и частные производные функции непрерывны в некоторой окрестности точки x_0, то все частные производные функции в этой точке равны* 0*, то есть*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} = 0 \tag{23.1}$$

Если в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет максимум, то функция $y_1 = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ как функция одной переменной x_1 имеет в точке $x_1 = x_1^0$ максимум. Следовательно, частная производная $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = 0$. Аналогично получаем равенство нулю частных производных и для других переменных.

Условие (23.1) можно записать иначе.

$$df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}dx_n = 0 \tag{23.2}$$

Точки, в которых выполняется равенство (23.1) называются *стационарными.*

Равенство $df(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума функции векторного аргумента. Сформулируем достаточные условия экстремума, использовав второй дифференциал.

Теорема 23.2. (**достаточное условие экстремума**) *Пусть функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 и частные производные первого и второго порядка функции непрерывны в некоторой окрестности точки x_0. Пусть $df(x_0) = 0$ (x_0 – стационарная точка). Если $d^2f(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума. Если $d^2f(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.*

Для анализа величины второго дифференциала d^2f нужно применить критерий Сильвестра. Второй дифференциал
$d^2f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \ldots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \ldots + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n$
представляет собой квадратичную форму относительно переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ – приращений независимых аргументов. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра $d^2f(x_0)$ положительно определен, если все главные миноры матрицы Q положительны, и отрицательно определен, если $\Delta_1 < 0$ и знаки главных миноров матрицы чередуются.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – дважды дифференцируемая функция. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ частные производные равны нулю $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0$ или, что тоже, обращается в ноль дифференциал $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = 0$, то в точке M_0 функция может иметь экстремум. Геометрический смысл необходимых условий экстремума функции двух переменных состоит в том, что в стационарных точках касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ параллельна плоскости XOY.

Заметим, что экстремум может быть не только в тех точках, в которых частные производные равны нулю, но и в тех точках, в которых хотя бы одна из частных производных не существует.

Для проверки достаточных условий существования экстремума выпишем второй дифференциал

$$d^2f(M_0) = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}dy^2.$$

Иногда то, что второй дифференциал является знакоопределенным, можно проверить непосредственно. Тогда можно сразу сказать, имеет ли функция $z = f(x, y)$ в точке M_0 экстремум и какой это экстремум.

Рассмотрим, как исследовать на экстремум функцию двух переменных с помощью критерия Сильвестра. Пусть M_0 – стационарная точка, то есть $dz(M_0) = 0$ и $d^2z(M_0)$ – второй дифференциал функции, подсчитанный в точке M_0. Составим матрицу квадратичной формы.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

а) Если квадратичная форма положительно определена, то $\Delta_1 = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} > 0$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ и M_0 – точка минимума функции $z = f(x, y)$.

б) Если квадратичная форма отрицательно определена, то $\Delta_1 = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} < 0$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ и M_0 – точка максимума функции $z = f(x, y)$.

в) Если $\Delta_2 = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$, то квадратичная форма не является знакоопределенной, и функция $z = f(x, y)$ в этой точке экстремума не имеет.

Пример 23.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение . Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.

Для нахождеия стационарных точек составим и решим систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= x^2 \\ x^4 - x &= 0 \end{cases}.$

Заданная функция имеет две стационарных точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$. Вычислим частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

Рассмотрим точку $M_1(0;0)$.

Составим матрицу квадратичной формы и исследуем ее: $Q = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как $\Delta_2 = -9 < 0$, то экстремума в точке M_1 нет.

Рассмотрим точку $M_2(1;1)$.

Составим матрицу квадратичной формы и исследуем ее: $Q = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Так как $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум и $z_{\min} = 1 + 1 - 3 = -1$.

Исследуем знак второго дифференциала в точке $M_2(1;1)$ непосредственно. Имеем

$d^2 z = 6dx^2 - 6dxdy + 6dy^2 = 3(dx - dy)^2 + 3dx^2 + 3dy^2 > 0.$

Второй дифференциал в точке M_2 положителен, следовательно, M_2 – точка минимума функции.

Пример 23.2. Исследовать на экстремум функцию $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$.

Решение . Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} + y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2} + x$.

Для нахождеия стационарных точек составим и решим систему уравнений $\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + y &= 0 \\ -\dfrac{1}{y^2} + x &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= \dfrac{1}{x^2} \\ -x^4 + x &= 0 \end{cases}.$

Заданная функция имеет одну стационарную точку $M(1;1)$, так как $x \neq 0$.

Вычислим частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{y^3}$ и подсчитаем значения вторых производных в этой точке: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

Составим матрицу квадратичной формы и исследуем ее: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, то в точке M функция имеет минимум и $z_{\min} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Исследуем знак второго дифференциала в точке $M(-1; -1)$ непосредственно. Имеем
$d^2 z = 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) > 0$.
Второй дифференциал в точке M положителен, следовательно, M – точка минимума функции.

Рассмотрим класс функций, для которых задача нахождения экстремумов существенно упрощается.

Определим сначала множества, на которых задается этот класс функций.

Подмножество $X \in \mathbb{R}^{(n)}$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $A, B \in X$ отрезок, соединяющий эти точки, целиком лежит в X. Примеры выпуклых множеств в $\mathbb{R}^{(2)}$ – круг, параллелограмм, внутренняя часть угла; в $\mathbb{R}^{(3)}$ – шар, треугольная призма, параллеллепипед, тетраэдр, круговой конус.

Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^{(2)} \to Y \subset \mathbb{R}$, то есть $z = f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$, заданная на выпуклом множестве X называется *выпуклой вниз*, если для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}.$$

Функция $z = f(x, y)$, заданная на выпуклом множестве X называется *выпуклой вверх*, если для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)}{2}.$$

Выпуклая функция не может иметь "седловых" точек ("седловыми" назовем точки, в которых по одной переменной функция имеет максимум, а по другой – минимум). Это значит, что для выпуклой функции равенство нулю ее частных производных является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума. Более того, экстремум выпуклой функции является глобальным, то есть наименьшим значением функции, выпуклой вниз, и наибольшим значением функции, выпуклой вверх.

§24. Отыскание наименьшего и наибольшего значений функции двух переменных в заданной замкнутой области.

Пусть требуется найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в некоторой области D. Этих значений функция достигает либо во внутренних точках области, которые являются в стационарными, либо на границе области. Следовательно, чтобы найти наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области, необходимо:

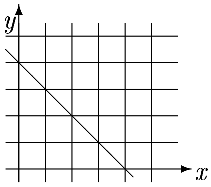
1. найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках;

2. найти наименьшее и наибольшее значения функции на границах области; если граница состоит из нескольких линий, то исследование проводится для каждой линии в отдельности;

3. сравнить полученные значения функции и выбрать из них наименьшее и наибольшее.

Пример 24.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2+2y^2-2x-8y+5$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y = 4$.

Решение . Нарисуем область D, в которой будем искать наименьшее и наибольшее значения функции. Она представляет собой треугольник.



Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8$. Для нахождения стационарных точек составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2 &= 0 \\ 4y - 4 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \end{cases}.$$

Точка $(1;2)$ принадлежит области D. Подсчитаем значение функции в этой точке $z(1,2) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -14$.

Исследуем поведение функции на границе области.

1. Пусть $x = 0$. Тогда $z = 2y^2 - 8y + 5 = 2(y-2)^2 - 3$. В точке $y = -2 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(2) = -3$.

2. Пусть $y = 0$. Тогда $z = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$. В точке $x = 1 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(1) = 4$.

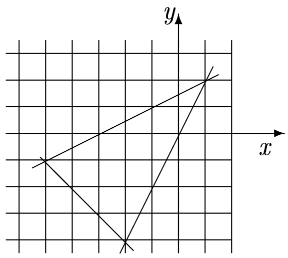
3. Пусть $y = 4 - x$. Тогда $z = x^2 + 2(4-x)^2 - 2x - 8(4-x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5 = 3(x - 5/3)^2 - 10/3$. В точке $x = 5/3 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(5/3) = -10/3$.

4. Найдем значения функции в вершинах треугольника. $z(0,0) = 5$, $z(4,0) = 13$, $z(0,4) = 5$.

Из всех найденных значений функции выберем наименьшее и наибольшее: $z_{\text{наим.}} = -14$, $z_{\text{наиб.}} = 13$.

Пример 24.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + 4x + y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = 2x$, $y = x + 2$, $y = -x - 6$.

Решение . Нарисуем область D, в которой будем искать наименьшее и наибольшее значения функции. Она представляет собой треугольник.



Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1$. Для нахождения стационарных точек составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 4 &= 0 \\ 2y - x + 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -3 \\ y &= -2 \end{cases}.$$

Точка $(-3; -2)$ принадлежит области D. Подсчитаем значение функции в этой точке $z(1, 2) = 9 + 4 - 6 - 12 - 2 = -7$.

Исследуем поведение функции на границе области.

1. Пусть $y = 2x$. Тогда $z = x^2 + 4x^2 - 2x^2 + 4x + 2x = 3x^2 + 6x$. В точке $x = -1 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(-1) = -3$.

2. Пусть $y = -x - 6$. Тогда $z = x^2 + (x+6)^2 + x(x+6) + 4x - x - 6 = 3x^2 + 21x + 30$. В точке $x = -3,5 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(-3,5) = 36,75 - 73,5 + 30 = -6,75$.

3. Пусть $y = x + 2$. Тогда $z = x^2 + (x+2)^2 - x(x+2) + 4x + x + 2 = x^2 + 7x + 6$. В точке $x = -3,5 \in D$ квадратичная функция принимает наименьшее значение и $z(-3,5) = 12,25 - 24,5 + 6 = -6,25$.

4. Найдем значения функции в вершинах треугольника. $z(2, 4) = 24$, $z(-2, -4) = 0$, $z(-4, -2) = -6$.

Из всех найденных значений функции выберем наименьшее и наибольшее: $z_{\text{наим.}} = -7$, $z_{\text{наиб.}} = 24$.

Задание 24.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в области, ограниченной кривыми $x = 0,5y^2$, $x = 2$.

Указания. 1. $z(0,6; 0) = 1,2\sqrt[3]{0,02}$, $z(1; 1) = 0$, $z(1; -1) = 0$;

2. $x = 0,5y^2$ тогда $z(0,6) = -1,2\sqrt[3]{0,02}$, $z(1) = 0$; 3. $x = 2$ тогда $z = 2$; 4. $z(2;2) = z(2;-2) = 0$. Итак, $z_{\text{наим.}} = -1,2\sqrt[3]{0,02}$, $z_{\text{наиб.}} = 2$.

§25. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве точек, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть $u = f(x, y, z)$ – функция трех переменных. Предположим, что дано некоторое соотношение $\varphi(x, y, z) = 0$, связывающее переменные. Это соотношение называют *уравнением связи.*

Определение 25.1. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению связи, называется *точкой условного максимума (условного минимума)* функции $f(x, y, z)$, если существует такая окрестность $U_\delta(M_0)$ этой точки, что для всех точек $M(x, y, z)$, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(M_0)$ и удовлетворяющих уравнению связи, выполняется неравенство $f(x, y, z) \leqslant f(x_0, y_0, z_0)$ ($f(x, y, z) \geqslant f(x_0, y_0, z_0)$).

То есть экстремум функции рассматривается только для точек, лежащих на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$. Безусловного экстремума в этой точке может и не быть.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y, z) = 0$ можно выразить $z = z(x, y)$ (условия существования неявной функции уже изучены), то подставив z в функцию $u = f(x, y, z)$, получим, что $u = f(x, y, z(x, y))$ – сложная функция двух переменных. Тогда экстремумы ищутся обычным способом, то есть находим первый дифференциал, приравниваем его нулю $du = 0$ и ищем стационарные точки.

Однако, часто явно выразить z через x и y из уравнения связи достаточно сложно. Тогда для отыскания условного экстремума применяют метод, называемый *методом неопределенных множителей Лагранжа.*

Пусть заданы функция

$$u = f(x, y, z) \tag{25.1}$$

и уравнение связи

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{25.2}$$

Пусть известно, что в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция (25.1) имеет условный экстремум. Функции $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0 и уравнение связи определяет $z = z(x, y)$ как неявную функцию. Считаем, что в функции $u = f(x, y, z)$ переменная z – эта неявная функция. Тогда сложная функция $u = f(x, y, z(x, y))$ имеет в точке M_0 обычный экстремум (точка M_0 – точка экстремума функции $u = f(x, y, z(x, y))$).

В точке экстремума первый дифференциал равен нулю, то есть

$$df = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}dz = 0. \tag{25.3}$$

Это равенство верно, так как первый дифференциал обладает свойством инвариантности формы.

В равенстве (25.3) dx и dy – приращения независимых переменных, dz – дифференциал неявной функции $z = z(x, y)$, определяемый условием связи (25.2), то есть $\varphi(x, y, z(x, y)) = 0$ и, значит, $d\varphi(x, y, z(x, y)) = 0$.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}dz = 0 \tag{25.4}$$

Равенство (25.4) умножим на λ и прибавим к равенству (25.3). Получим

$$\begin{gathered} df + \lambda d\varphi = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz + \\ +\lambda\left(\frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial z}dz\right) = 0 \end{gathered}. \tag{25.5}$$

Выберем λ так, чтобы коэффициент при dz был равен нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial z} = 0 \tag{25.6}$$

Тогда в силу независимости приращений dx и dy получим, что коэффициенты при этих приращениях также равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{25.7}$$

Присоединяя к системе (25.7) уравнение (25.6) и уравнение связи (25.2), получим систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных x, y, z, λ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(M_0)}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{25.8}$$

Из системы (25.8), которая дает необходимые условия экстремума, можно определить координаты критической точки M_0. В этих точках функция может иметь условный экстемум, а может и не иметь, так как использовано только необходимое условие экстремума.

Чтобы легче было запомнить правило составления системы, составим функцию, которая называется *функцией Лагранжа*

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) \tag{25.8}$$

Приравнивая нулю ее частные производные по всем переменным, получим систему (25.9).

Для определения типа экстремума нужно исследовать второй дифференциал. При исследовании d^2F заметим, что $d\lambda = 0$, так как $\lambda = const$ и dz выражаем из уравнения связи.

Этот метод справедлив для функций от любого числа переменных и для нескольких условий связи.

Пример 25.1. Найдите точки экстремума функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 8$.

Решение . Составим функцию Лагранжа $F(x,y,\lambda) = xy+\lambda(x^2+y^2-8)$.

Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y$.

Для нахождения стационарных точек составим и решим систему уравнений $\left\{\begin{array}{rcl} y+2\lambda x &=& 0 \\ x+2\lambda y &=& 0 \\ x^2+y^2 &=& 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2\lambda x \\ x-4\lambda^2 x &=& 0 \\ x^2+y^2 &=& 8 \end{array}\right.$.

Решая эту систему, получаем пять решений

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$ не удовлетворяет условию связи.

$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0,5 \\ x &=& 2 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0,5 \\ x &=& -2 \\ y &=& 2 \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -0,5 \\ x &=& 2 \\ y &=& 2 \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -0,5 \\ x &=& -2 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$.

Получили точки $M_1(2;-2)$, $M_2(-2;2)$, $\lambda = 0,5$; и $M_3(2;2)$, $M_4(-2;-2)$, $\lambda = -0,5$.

Вычислим частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ и составим второй дифференциал $d^2F = 2dxdy$.

Для вычисления зависимости между x и y продифференцируем условие связи $2xdx + 2ydy = 0$, откуда следует, что $dy = -\frac{x}{y}dx$.

В точках M_1 и M_2 получаем, что $dy = dx$ и второй дифференциал принимает вид $d^2F = 2dx^2 > 0$. Значит, в этих точках функция $F(x,y,\lambda)$, а значит и функция $z(x,y)$ имеет минимум.

В точках M_3 и M_4 получаем, что $dy = -dx$ и второй дифференциал принимает вид $d^2F = -2dx^2 < 0$. Значит, в этих точках функция $F(x,y,\lambda)$, а значит и функция $z(x,y)$ имеет максимум.

Пример 25.2. Найдите точки экстремума функции $u = xy^2z^3$ при условии $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Решение . Составим функцию Лагранжа
$F(x,y,z,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - 12)$.

Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2z^3 + \lambda$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xyz^3 + 2\lambda$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3xy^2z^2 + 3\lambda$.
Для нахождения стационарных точек составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2z^3+\lambda &= 0\\ 2xyz^3+2\lambda &= 0\\ 3xy^2z^2+3\lambda &= 0\\ x+2y+3z &= 12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda &= -y^2z^3\\ 2xyz^3-2y^2z^3 &= 0\\ 3xy^2z^2-3y^2z^3 &= 0\\ x+2y+3z &= 12\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda &= -y^2z^3\\ 2x-2y &= 0\\ 3x-3z &= 0\\ x+2y+3z &= 12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 2\\ y &= 2\\ z &= 2\\ \lambda &= -32\end{cases}.$$

Получили одну критическую точку $M(2;2;2)$, $\lambda = -32$.

Вычислим частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2xz^3$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 6xy^2z$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2yz^3$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 3y^2z^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 6xyz^2$, подсчитаем их значения в точке M $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial y^2} = 32$, $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial z^2} = 96$, $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial y \partial z} = 32$, $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial y \partial z} = 48$, $\dfrac{\partial^2 F(M)}{\partial y \partial z} = 96$ и составим второй дифференциал
$d^2F(M) = 32dy^2 + 96dz^2 + 64dxdy + 96dxdz + 192dydz$.

Для вычисления зависимости между dx и dy продифференцируем условие связи $dx + 2dy + 3dz = 0$, откуда следует, что $dx = -2dy - 3dz$. Подставив dx в $d^2F(M)$, получим
$d^2F(M) = 32dy^2 + 96dz^2 - 64(2dy+3dz)dy - 96(2dy+3dz)dz + 192dydz = -96(dy^2 + 2dydz + 2dz^2) = -96((dy+dz)^2 + dz^2) < 0$.

Следовательно, в точке M функция $F(x, y, z, \lambda)$, а значит и функция $u(x, y, z)$ имеет максимум и $u_{max} = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$.

Пример 25.3. Найдите точки экстремума функции $u = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и $x + y + z = 0$.

Решение . Составим функцию Лагранжа
$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6) + \mu(x + y + z).$

Вычислим первые частные производные и приравняем их нулю
$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu,\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu,\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu.$
Для нахождения стационарных точек составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu & = & 0 \\ xz + 2\lambda y + \mu & = & 0 \\ xy + 2\lambda z + \mu & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 6 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x - y)(z - 2\lambda) & = & 0 \\ (x - z)(y - 2\lambda) & = & 0 \\ (z - y)(x - 2\lambda) & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 6 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases}.$$

(из второго и третьего уравнений вычли первое)

Пусть $y = x$, тогда $z = -2x$, $\lambda = 0,5x$ и из уравнения связи получим $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$, $\lambda = 0,5$, $\mu = 1$ или $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $\lambda = -0,5$, $\mu = 1$.

Пусть $z = x$, тогда $y = -2x$, $\lambda = 0,5x$ и из уравнения связи получим $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, $\lambda = 0,5$, $\mu = 1$ или $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$, $\lambda = -0,5$, $\mu = 1$.

Пусть $z = y$, тогда $x = -2y$, $\lambda = 0,5y$ и из уравнения связи получим $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$, $\lambda = 0,5$, $\mu = 1$ или $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$, $\lambda = -0,5$, $\mu = 1$.

Получили точки $M_1(1; 1; -2)$, $M_3(1; -2; 1)$, $M_5(-2; 1; 1)$ при $\lambda = 0,5$, $\mu = 1$ и $M_2(-1; -1; 2)$, $M_4(-1; 2; -1)$, $M_6(2; -1; -1)$ при $\lambda = -0,5$, $\mu = 1$.

Вычислим частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x$ и составим второй дифференциал
$d^2F(M) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(zdxdy + ydxdz + xdydz).$

Для вычисления зависимости между dx, dy и dz продифференцируем условия связи

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz &= 0 \\ dx + dy + dz &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz &= -dx - dy \\ (y-z)dy &= (z-x)dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} dy &= \dfrac{z-x}{y-z}dx \\ dz &= \dfrac{x-y}{y-z}dx \end{cases}.$$

Рассмотрим точку M_1. Имеем $dy = -dx$, $dz = 0$. Тогда $d^2F(M_1) = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2zdxdy = 2dx^2 + 4dx^2 = 6dx^2 > 0$.

Значит, в точке M_1 функция $F(x, y, z, \lambda, \mu)$, а значит и функция $u(x, y, z)$ имеет минимум и $u_{min} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$.

Аналогично показывается, что в точках $M_3(1; -2; 1)$, $M_5(-2; 1; 1)$ функция $u(x, y, z)$ имеет минимум, а в точках $M_2(-1; -1; 2)$, $M_4(-1; 2; -1)$, $M_6(2; -1; -1)$ функция $u(x, y, z)$ имеет максимум и $u_{max} = 2$.