§1. Матрицы. Действия с матрицами.

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Эти числа называют *элементами* матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Матрицы играют важную роль в математике и ее приложениях. С помощью матриц записываются многие математические соотношения, в том числе, системы алгебраических и дифференциальных уравнений и их решения. Матричный язык применяют при выполнении различных преобразований. В экономике в виде матриц удобно записывать многие зависимости. Например, таблица распределения ресурсов по отраслям экономики

Ресурсы	Отрасли экономики	
	промышленость	сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

может быть записана в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям

$$A = \begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу размера $1 \times n$ называют *матрицей-строкой*, а матрицу размера $m \times 1$ – *матрицей-столбцом*.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой* матрицей. Матрицу размера $n \times n$ называют *квадратной* матрицей порядка n. Диагональ матрицы, идущая от элемента a_{11} к элементу a_{nn} называется *главной диагональю*, вторая диагональ называется *побочной*. Квадратная матрица, все элементы которой, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ равны единице, называется *единичной.* Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие ниже (выше) диагонали, равны нулю, называется *треугольной.* Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$, то есть элементы матрицы симметричные относительно главной диагонали равны. Для любой матрицы A размера $m \times n$ можно построить матрицу A^T, заменив строки матрицы столбцами, а столбцы — строками. Матрица A^T называется *транспонированной* для матрицы A. Транспонированная матрица имеет размер $n \times m$.

Над матрицами можно производить различные операции.

Прежде всего введем понятие равенства матриц. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны. Даны две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$. Тогда $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ ($\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$).

Матрицы одного размера можно складывать. *Суммой* двух матриц называется матрица того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц слагаемых. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – матрицы размера $m \times n$. Тогда $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Матрицу можно умножать на число. *Произведением матрицы на число* называется матрица, которая получается при умножении всех элементов исходной матрицы на это число.

Однако главные применения матриц связаны с операцией их умножения. Эта операция лежит в основе целого раздела линейной алгебры — алгебры матриц.

Пусть даны две матрицы A – размера $m \times n$ и B – размера $n \times k$. Причем число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом случае можно определить произведение матриц A и B. Матрица C размера $m \times k$ называется *произведением* матриц A и B, если любой элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующий элемент j-того столбца матрицы B, то

есть
$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}. \tag{1.1}$$

Отметим, что число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, и число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B.

Пример 1.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ -2 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -7 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$. Тогда

$$AB=\begin{pmatrix}3\cdot 2+5\cdot(-7)+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+5\cdot 2+(-1)\cdot(-5)\\ (-2)\cdot 2+(-3)\cdot(-7)+4\cdot 3 & (-2)\cdot 3+(-3)\cdot 2+4\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-32 & 24\\ 29 & -32\end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot 3+3\cdot(-2) & 2\cdot 5+3\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+3\cdot 4\\ (-7)\cdot 3+2\cdot(-2) & (-7)\cdot 5+2\cdot(-3) & (-7)\cdot(-1)+2\cdot 4\\ 3\cdot 3+(-5)\cdot(-2) & 3\cdot 5+(-5)\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+(-5)\cdot 4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 10\\ -25 & -41 & 15\\ 19 & 30 & -23\end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Тогда
$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)-2\cdot 4 & 1\cdot 3-2\cdot 1 & 1\cdot 1-2\cdot 2\\ 3\cdot(-2)+1\cdot 4 & 3\cdot 3+1\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 1 & -3\\ -2 & 10 & 5\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число строк матрицы A не равно числу столбцов матрицы B.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$ – сложение матриц коммутативно. Но $AB\neq BA$ – умножение матриц не коммутативно (пример 1.4). Более того, не всегда существуют оба произведения (пример 1.5).

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ и $(AB)C=A(BC)$ – сложение и умножение матриц удовлетворяют закону ассоциативности.

3) $(A+B)C = AC + BC$ и $C(A+B) = CA + CB$, если эти произведения существуют. Это свойство называют законом дистрибутивности умножения относительно сложения.

4) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

5) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

7) $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A — квадратная, E — единичная матрицы порядка n.

8) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

9) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Покажем на примерах, почему умножение матриц вводится по такому, на первый взгляд, сложному правилу.

Пример 1.3. Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4, используя 3 вида сырья S_1, S_2, S_3. Составим матрицу A, где a_{ij} количество сырья S_i, расходуемое на выпуск единицы продукции P_j.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 11 & 7 & 4 \\ 10 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Поставим задачу определить затраты сырья, необходимого для производства следующего количества продукции $C = \begin{pmatrix} 150 & 120 & 100 & 130 \end{pmatrix}^T$ (c_j — количество продукции P_j):

Затраты сырья составляют

$S_1 = 5 \cdot 150 + 3 \cdot 120 + 0 \cdot 100 + 9 \cdot 130 = 2280$,

$S_2 = 2 \cdot 150 + 11 \cdot 120 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 130 = 2840$,

$S_3 = 10 \cdot 150 + 6 \cdot 120 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 130 = 3430$.

Используя произведение матриц, вектор затрат S можно записать следующим образом:

$$S = A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 11 & 7 & 4 \\ 10 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 100 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2280 \\ 2840 \\ 3430 \end{pmatrix}.$$

Если кроме того известны стоимости единицы каждого сырья

$P = \begin{pmatrix} 29 & 41 & 33 \end{pmatrix}$, то стоимость затраченного сырья можно подсчитать по формуле $Q = 29 \cdot 2280 + 41 \cdot 2840 + 33 \cdot 3430 = 295750$ или в матричном виде $Q = P \cdot S = P \cdot A \cdot C$.

Пример 1.4. Некая фирма занимается реализацией n видов товаров в m регионах. Данные об уровне продаж образуют матрицу уровня продаж $A = (a_{ij})$, где a_{ij} обозначает количество j-го товара, проданного в i-ом регионе ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$). Таким образом, строки матрицы соответствуют регионам, а столбцы — видам товара. Пусть известны также цены на реализуемые товары. Через c_{jk} обозначена цена j-го товара в k-ом квартале ($j = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,4}$). Эти цены образуют матрицу $C = (c_{jk})$.

Чтобы найти суммарный объем продаж (в рублях) товаров в i-ом регионе за k-ый квартал, нужно вычислить сумму $p_{ik} = a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \ldots + a_{in}c_{nk}$.
Получили матрицу суммарных продаж $P = (p_{ik}) = A \cdot C$.

Пример 1.5. k предприятий отрасли производят n видов товаров, используя m видов ресурсов. Даны матрицы $A = (a_{is})$, в которой a_{is} — норма затрат ресурсов i-го вида на производство единицы продукции s-го вида, и $X = (x_{sj})$, где x_{sj} — количество продукции s-го вида, произведенное за месяц j-ым предприятием. ($i = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$). Тогда матрица затрат за месяц $C = (c_{ij}) = AX = \left(\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}x_{tj}\right)$ имеет размер $m \times k$, и c_{ij} — затраты ресурсов i-го вида за месяц j-ым предприятием.

Пусть $k \in \mathbf{N}$ — натуральное число. *k-ой степенью квадратной матрицы A* называется матрица $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}$.

Пример 1.6. Завод производит автомобили. Каждый автомобиль может находится в одном из двух состояний: 1) работает хорошо; 2) требует регулировки. Статистические исследования показали, что из тех автомобилей, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70% также будут работать хорошо, а 30% требуют регулировки, а из тех автомобилей, которые сегодня требуют регулировки, через месяц 60% будут работать хорошо, а 40% потребуют регулировки. В момент изготовления все автомобили работали хорошо. Какова доля машин, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца, через 3 месяца?

Введем вектор $\overline{x}_t = (x_{1t};\ x_{2t})$ состояний в момент t , где x_{it} — доля автомобилей, которые в момент t находятся в состоянии i и введем матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где a_{ij} — доля автомобилей, которые в настоящий момент находятся в состоянии i, а через месяц будут находится в состоянии j. Квадратную матрицу A будем называть *матрицей перехода*, если все ее элементы положительны и сумма элементов каждой строки равна 1.

Согласно условиям задачи $\overline{x}_0 = (1;\ 0)$ и $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что A — матрица перехода.

Через месяц доля машин, работающих хорошо, будет равна $1 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,3 = 0,7$, а доля машин, требующих регулировки, будет равна $1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,7 = 0,3$.

Таким образом вектор состояния $\overline{x}_1 = (0,7;\ 0,3)$.

Нетрудно доказать, что $\overline{x}_t = \overline{x}_0 \cdot A^t$.

Тогда $\overline{x}_2 = \overline{x}_0 \cdot A^2,\ \ \overline{x}_3 = \overline{x}_0 \cdot A^3$.

Вычислим матрицы A^2 и A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix}.$$

Найдем векторы $\overline{x}_2$ и $\overline{x}_3$

$$\overline{x}_2 = (1;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,66 & 0,34 \end{pmatrix} = (0,67;\ 0,33),$$

$$\overline{x}_3 = (1;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix} = (0,667;\ 0,333).$$

В экономических приложениях важную роль играет свойство квадратных матриц, называемое неразложимостью. Поясним его смысл.

Согласованной перестановкой рядов квадратной матрицы A называется такая их перестановка, при которой одновременно с перестановкой i-ой и j-ой строки меняются местами i-ый и j-ый столбцы.

Квадратная матрица A называется *разложимой*, если согласованными перестановками строк и столбцов ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_2 – квадратные матрицы не обязательно одного и того же порядка; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица. В противном случае матрица называется *неразложимой*.

Если $B = 0$ и при дальнейшем разложении матриц A_1 и A_2 и их частей, стоящих на диагонали, будет получена матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, ..., A_k – квадратные неразложимые матрицы не обязательно одного и того же порядка, то матрица A называется *вполне разложимой*.

Пример 1.7. Рассмотрим n отраслей промышленности и a_{ij} $(i = 1, 2, .., n;\ j = 1, 2, \ldots n)$ – доля продукции i-ой отрасли, применяемой j-ой отраслью в процессе производства. Причем $a_{ij} = 0$, если продукция i-ой отрасли не применяется j-ой отраслью. Если матрица $A = (a_{ij})$ порядка $n \times n$ разложима, это означает, что существует группа отраслей, не поставляющих свою продукции ряду других отраслей, но может быть потребляющих их продукцию. Вполне разложимость матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \times n$ означает, что в выбранных нами отраслях существует несколько самостоятельных групп отраслей, между которыми нет обмена продукцией.

Задание 1.1. Найдите произведения матриц AB и BA, если
$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Задание 1.2. Найдите произведения матриц AB и BA, если
$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 1.3. Найдите произведения матриц AB и BA, если
$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

§2. Перестановки.

Дано множество первых n натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Это множество можно упорядочить различными способами. Всякое расположение $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из n чисел .

Предложение 2.1. *Число различных перестановок из n чисел равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.*

Доказательство. Первый элемент i_1 можно выбрать n способами, элемент для выбора элемента i_2 осталась $n-1$ возможность и так далее, элемент i_{n-1} можно выбрать всего 2 способами, наконец берем последний элемент i_n. Всего получилось $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных перестановок. □

Если в некоторой перестановке поменять местами два числа, а остальные оставить на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование перестановки называется *транспозицией*. Говорят, что в данной перестановке числа i и j образуют *инверсию*, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке раньше чем j. Перестановка называется *четной*, если она имеет четное число инверсий, и *нечетной* в противном случае.

Теорема 2.2. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Дана перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

а) Поменяем местами два соседних элемента i_k и i_{k+1}. В этом случае число инверсий изменится на 1, и, значит, изменится и четность перестановки.

б) Чтобы поменять местами элементы i_k и i_{k+m} нужно $2m-1$ раз переставить соседние элементы. Поэтому число инверсий изменится на нечетное число, и, значит, перестановка сменит четность. □

§3. Определители.

Понятие определителя (детерминанта) возникло в связи с необходимостью решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. Определитель матрицы A обозначается $|A|$, $detA$ или Δ.

Если $A = (a_{11})$ — матрица первого порядка, то *определителем первого порядка* называется число a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$.

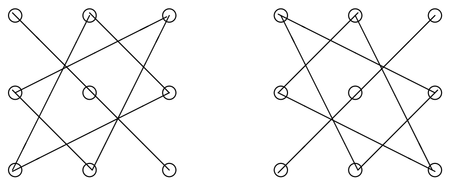
Определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{3.1}$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix} \tag{3.2}$$

Это выражение — алгебраическая сумма 6 слагаемых. В каждое слагаемое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (3.2), легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется *правилом звездочки.* Первая звездочка – это слагаемые, входящие в определитель со знаком плюс, а вторая – со знаком минус.



Пример 3.1. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение . $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3\cdot 3 + (-5)\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-6) -$
$- 3\cdot 3\cdot(-6) - 3\cdot(-5)\cdot(-1) - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 36 - 15 - 12 + 54 - 15 + 8 = 56.$

Пусть дана квадратная матрица A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ $(*)$. Обозначим число инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ через s, а число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ через t. Если в перестановке $(*)$ поменять местами два сомножителя и подсчитать число инверсий в новых перестановках, то сумма $s_1 + t_1$ будет иметь ту же четность, что и сумма $s + t$ (теорема 2.2). Поэтому число $(-1)^{s+t}$ не зависит от порядка сомножителей. Не нарушая общности, можно произведение $(*)$ записывать в виде $a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}$.

Число различных произведений вида $(*)$ равно $n!$ (предложение 2.1).

Определение 3.1. *Определителем* порядка n квадратной матрицы A порядка n называется число, равное алгебраической сумме $n!$ всех возможных различных произведений n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, умноженных на $(-1)^{s+t}$, где

s – число инверсий в перестановке первых, а t – число инверсий в перестановке вторых индексов перемножаемых элементов матрицы.

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}. \quad (3.3)$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель $detA \neq 0$.

Свойства определителей.

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы, то есть $|A| = |A^T|$. Иными словами, определитель при транспонировании не меняется.

Из свойства 1 следует, что строки и столбцы матрицы равноправны. Все свойства и теоремы можно формулировать как для строк, так и для столбцов определителя.

2. Если все элементы некоторой строки определителя равны 0, то определитель равен 0.

Это свойство следует из определения, так как в каждом слагаемом есть нулевой сомножитель, и, значит, сумма равна 0.

3. При перестановке двух строк определитель меняет знак.

При вычислении определителя по формуле (3.3) при перестановке двух строк каждое слагаемое изменит знак (по теореме 2.2 перестановка вторых индексов сменит четность), а, значит, определитель сменит знак.

4. Определитель, имеющий две одинаковых строки, равен 0.

Пусть определитель равен d. Поменяем местами в этом определителе две одинаковых строки. По свойству 3 определитель сменит знак и станет равным $-d$. Но так как строки одинаковы, то определитель не изменится, то есть получим $d = -d$. Откуда и следует, что $d = 0$.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t \lambda a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} =$$

$$= \lambda \cdot \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = \lambda \cdot \Delta.$$

Свойство 5 можно сформулировать следующим образом: общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак определителя.

6. Если две строки определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

Для доказательства примените свойства 5 и 4.

7. Если все элементы i-той строки определителя представимы в виде суммы $a_{ij} = b_j + c_j$, то определитель равен сумме определителей $D = D_1 + D_2$, причем в i-той строке определителя D_1 стоят элементы b_i, в i-той строке определителя D_2 стоят элементы c_i, все остальные элементы совпадают с элементами определителя D.

Например,

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на некоторое число.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{i1} & a_{12} + k \cdot a_{i2} & \dots & a_{1n} + k \cdot a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \ldots & k\cdot a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей матриц, то есть $|AB| = |A| \cdot |B|$.

10. Определитель диагональной матрицы (а также верхней и нижней треугольных матриц) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то есть $D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$. Выберем в матрице k строк и k столбцов ($1 \leqslant k \leqslant m$; $1 \leqslant k \leqslant n$). Из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, построим квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется *минором* порядка k матрицы A. Минор порядка k получается из матрицы A вычеркиванием $m - k$ строк и $n - k$ столбцов.

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n.

Определение 3.2. Минором M_{ij} матрицы A порядка n, соответствующим элементу a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n - 1$, получающейся из A вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Каждая квадратная матрица порядка n имеет n^2 миноров порядка $n - 1$.

Определение 3.3. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема:

Теорема 3.1. (**Лапласа**). *Определитель D квадратной матрицы A равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.*

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{3.4}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы первой строки кроме a_{11} равны 0. ($a_{11} \neq 0$, $a_{1j} = 0$, $j = \overline{2;n}$). Тогда определитель

$$|A| = \sum (-1)^t a_{11} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} \sum (-1)^t a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

(под знаком суммы стоит сумма всех возможных различных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с номерами от 2 до n, умноженное на $(-1)^t$, t – число инверсий в перестановке вторых индексов и $M_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = A_{11}$).

2) Пусть теперь в матрице A в i-ой строке только один элемент a_{ij} отличен от нуля

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

($a_{ij} \neq 0$, $a_{ik} = 0$, $k \neq j$). Поменяем j-ый столбец последовательно со столбцами номер $j-1, j-2, \dots, 1$, а затем i-ую строку со строками с номерами $i-1, i-2, \dots, 1$. Всего сделаем $j+i-2$ перестановок строк и столбцов. Получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее определитель

$$|A| = (-1)^{i+j-2} |A'| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

3) В общем случае представим определитель матрицы A в виде суммы n определителей $|A_j|$ ($|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} |A_j|$), у которых все строки кроме i-ой одинаковы, а в i-ой строке каждого определителя только один элемент $a_{ij} \neq 0$. Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Доказательство закончено. □

Теорема 3.2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} = a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \ldots + a_{in} A_{sn} = 0. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Дана квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n. Рассмотрим матрицу B, у которой все строки кроме s-той совпадают со строками матрицы A, а в строке s стоят числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Подсчитаем $|B|$, разложив этот определитель по s-той строке.

$$|B| = c_1 A_{s1} + c_2 A_{s2} + \ldots + c_n A_{sn}.$$

Заметим, что если определители отличаются только элементами одной строки (например, s-ой), то алгебраические дополнения элементов этой строки в обоих определителях равны $A_{sj}^{(1)} = A_{sj}^{(2)}$ ($\forall j = \overline{1, n}$), так как при разложении определителя по s-ой строке строка с этим номером вычеркивается.

Если положить $c_j = a_{ij}$, то в матрице B будет две одинаковых строки, и, значит, $|B| = 0$. □

Пример 3.2. Вычислите двумя способами определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение . 1) Вычислим определитель, разложив его по первой строке
$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} +$
$(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 11 + 3 \cdot (-1) = -27.$
2) Вычислим определитель, получив нули в первом столбце.
$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 7 = -27.$

Пример 3.3. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение . Вычислим определитель, получив нули в первом столбце
$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$
$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$
$5 \cdot (2 - 6) = -20.$

Задание 3.1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$.

Задание 3.2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Задание 3.3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \\ -2 & 9 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание 3.4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 11 & 7 \\ 3 & 5 & -4 & 10 \\ -2 & -7 & 5 & 13 \end{vmatrix}$.

§4. Обратная матрица.

В школьном курсе алгебры число b называли *обратным* числу a, если $ab = 1$. Для любого числа $a \neq 0$ существует единственное обратное число $b = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$. Аналогично в линейной алгебре определяется матрица, обратная матрице A.

Определение 4.1. Матрица A' называется *обратной* для матрицы A, если произведение этих матриц коммутативно и равно единичной матрице.

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E. \qquad (4.1)$$

Обозначается обратная матрица A^{-1}.

Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы.

Теорема 4.1. (О существовании и единственности обратной матрицы) *Любая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу.*

Доказательство. 1) Пусть матрица $A = (a_{ij})$ – невырожденная. Значит, $|A| \neq 0$. Докажем, что для этой матрицы существует обратная. Рассмотрим матрицу $A^* = (A_{ij})$, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A, транспонируем ее и разделим на определитель $|A|$. (Матрицу A^* называют *присоединенной*).

Покажем, что построенная таким способом матрица, является обратной для матрицы A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

является обратной матрице A. Для этого рассмотрим произведение

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix}.$$

По теореме 3.1 все элементы произведения матриц, стоящие на главной диагонали, равны определителю матрицы A, а остальные элементы полученной матрицы равны нулю по теореме 3.2. Следовательно, произведение

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично показывается, что произведение $A^{-1} \cdot A = E$.

2) Теперь докажем единственность обратной матрицы. Пусть матрица A'' также является обратной для матрицы A. Рассмотрим произведение $A^{-1} \cdot A \cdot A''$. Имеем

$$A^{-1} \cdot A \cdot A'' = (A^{-1} \cdot A) \cdot A'' = E \cdot A'' = A'',$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot A'' = A^{-1} \cdot (A \cdot A'') = A^{-1} \cdot E = A^{-1}.$$

Из этих равенств следует, что $A'' = A^{-1}$. □

Условие невырожденности квадратной матрицы является не только достаточным, но и необходимым для существования обратной матрицы.

Теорема 4.2. *Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу, то она невыроженная матрица.*

Доказательство. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $A \cdot A^{-1} = E$. Значит, $|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$. По свойству 9 определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. Следовательно, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Откуда вытекает, что $|A| \neq 0$. □

Пример 4.1. Найдите матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение . Вычислим определитель.
$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2 \neq 0$,
значит матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = -(-4) = 4, \quad A_{21} = -(-7) = 7, \quad A_{22} = 6.$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице A

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. Для этого вычислим произведение

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2,5 - 7 \cdot 2 & 6 \cdot 3,5 - 7 \cdot 3 \\ -4 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 3,5 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 4.2. Найдите матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение . Вычислим определитель.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -10 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$

значит, матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -10,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 17 & -5 & -14 \\ -10 & 10 & 10 \\ 11 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Транспонировав ее и разделив на определитель, получим матрицу, обратную матрице A

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -14 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверку выполните самостоятельно.

Свойства обратной матрицы.

1. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; 2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

3. $(A^{-1})^{-1} = A$; 4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Задание 4.1. Найдите матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 4.2. Найдите матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 4.3. Найдите матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 4.4. Найдите матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 7 & 13 \\ 3 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.

§5. Матричные уравнения.

Пусть A – невырожденная квадратная матрица.

Поставим задачу: найти такие матрицы X и Y, чтобы были справедливы уравнения $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$ (в общем случае $X \neq Y$).

Так как A – невырожденная матрица, то существует матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения $AX = B$ на матрицу A^{-1} слева. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{или} \quad X = A^{-1}B.$$

Аналогично можно получить, что $Y = BA^{-1}$.

Задание 5.1. Решите уравнения $AX = B$ и $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 5.2. Решите уравнения $AX = B$ и $XA = B$, где
$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 7 & 13 \\ 3 & -10 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 5.3. Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 5.4. Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задание 5.5. Решите уравнение
$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

§6. Системы линейных уравнений.

В школе вы изучали системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases}.$$

Напомню один из методов решения этой системы.

Умножим первое уравнение на b_2, а второе – на $-b_1$, а затем сложим эти уравнения

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y &= b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y &= -b_1c_2 \end{cases}.$$

Получим $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$.

Заметим, что $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Обозначим эти определители через Δ и Δ_x соответственно.

Равенство для определения x принимает вид

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Если $\Delta \neq 0$, то
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$
Аналогично можно получить, что
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$
где $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Так как уравнение $ax + by = c$ задает на плоскости прямую, то система двух уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение, если прямые, задающие уравнения, пересекаются; не имеет решений, если прямые параллельны; имеет бесконечно много решений, если прямые совпадают.

Аналитически эти условия можно записать следующим образом:
система имеет единственное решение, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$,
система не имеет решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_1} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$,
система имеет бесконечно много решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_1} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

В курсе линейной алгебры мы будем изучать системы линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.
$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Числа a_{ij} – коэффициенты системы, они образуют матрицу $A = (a_{ij})$, называемую *матрицей системы.*

Дополняя матрицу A столбцом свободных членов, получим *расширенную матрицу системы*
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \tag{6.2}$$

Свободные члены отделены от основной матрицы чертой.

Обозначим $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – матрицу-столбец неизвестных, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ – матрицу-столбец свободных членов. Используя операцию умножения матриц, систему (6.1) можно записать в матричном виде

$$AX = B \tag{6.3}$$

Решением системы (6.1) называется упорядоченный набор чисел $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, при подстановке которого в систему уравнений вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое уравнение превращается в верное числовое равенство. Система (6.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система (6.1) называется *определенной*, если она имеет только одно решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), и *неоднородной*, если хотя один из свободных членов отличен от нуля.

При рассмотрении систем линейных уравнений возникают вопросы:
1) имеет ли система хотя бы одно решение (совместна ли система);
2) если система совместна, то сколько решений она имеет (система определенная или нет);
3) как найти все решения системы.

В курсе линейной алгебры мы рассмотрим три метода решения систем линейных уравнений: матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса.

Пример 6.1. Решите матричным способом систему уравнений
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -4 \\ 3x - 7y + 15z = -16 \\ 4x + y - 2z = 9 \end{cases}.$$

Решение . Обозначим
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 15 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 28 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}.$$
Систему можно записать в матричном виде $AX = B$ и решить ее через

обратную матрицы. Так как матрица A невырожденная $|A| = -9 \neq 0$, то для нее существует обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix}$,

и $X = A^{-1}B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 66 & -18 & -3 \\ 31 & -9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

то есть $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$.

Пример 6.2. (модель национального дохода). Из экономической теории известно, что национальный доход Y складывается из потребления населения C, инвестиций I и затрат правительства G: $Y = C + I + G$.

С другой стороны, потребление можно представить как линейную функцию национального дохода $C = a + bY$, где a – автономные расходы на потребление, b – предельная склонность к потреблению, причем $0 < b < 1$.

Предположим, что коэффициенты a и b, а также величины I и G известны, и запишем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными Y и C:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y - C & = & I + G \\ -bY + C & = & a. \end{array}\right.$$

Решим эту систему, используя обратную матрицу. Представим данную систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} Y \\ C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I + G \\ a \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b > 0$, (так как $b < 1$). Следовательно, матрица A имеет обратную. Найдем ее

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{1-b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I + G \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{pmatrix} I + G + a \\ bI + bG + a \end{pmatrix}.$$

Итак, найдены национальный доход $Y = \dfrac{I+G+a}{1-b}$ и потребление населения $C = \dfrac{bI+bG+a}{1-b}$.

Задание 6.1. Решите матричным способом систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 28 \\ 3x - y + 2z = 13 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$.

Задание 6.2. Решите матричным способом систему уравнений $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$.

§7. Правило Крамера.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{7.1}$$

Запишем соотвествующее матричное уравнение $AX = B$, где $A = (a_{ij})$ – матрица системы, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – матрица-столбец неизвестных, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ – матрица-столбец свободных членов.

Если матрица A – невырожденная ($\Delta = |A| \neq 0$), то для нее существует обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}(A_{ij})^T$.

Решим систему (7.1) матричным способом.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ получается из определителя Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов. Его называют *дополнительным определителем неизвестной* x_1.

Аналогично получаем, что $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots \ , x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где определитель

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

получается из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots \ , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{7.2}$$

называют *формулами Крамера.*

Сформулируем доказанную теорему

Теорема 7.1. (Крамера) *Если определитель системы n уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad (k = \overline{1, n})$$

где Δ – определитель системы, Δ_k – дополнительный определитель неизвестной x_k.

Из формул (7.2) вытекает следствие.

Следствие 7.2. *Если определитель системы Δ равен нулю, а хотя бы один из дополнительных определителей неизвестных отличен от нуля, то система решений не имеет.*

Задание 7.1. Решите методом Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}.$$

Задание 7.2. Решите методом Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 15 \\ 3x - 4y + 5z = 25 \\ 4x + 3y + z = 8 \end{cases}.$$

Задание 7.3. Решите методом Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 2x_4 = -14 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}.$$

§8. Метод Гаусса.

Наиболее удобным для отыскания решений системы линейных уравнений с числовыми коэффициентами на практике является метод последовательного исключения неизвестных или метод Гаусса.

Дана система линейных уравнений (6.1). Рассмотрим следующие преобразования системы, называемые *элементарными преобразованиями*:

1) Умножение (деление) обеих частей уравнения на некоторое отличное от нуля число;

2) Прибавление к обеим частям j-ого уравнения соответствующих частей i-того уравнения, умноженных на некоторое отличное от нуля число;

3) Перестановка местами двух уравнений.

Полученная в результате такого преобразования система будет равносильна системе (6.1), то есть они либо обе несовместны, либо обе совместны и имеют одни и те же решения. Может получиться так, что после выполнений нескольких таких преобразований получим уравнение, все коэффициенты которого равны 0. Отбрасывая это уравнение, также получим систему, равносильную исходной.

Рассмотрим метод Гаусса. Идея этого метода состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований привести систему уравнений к треугольному (ступенчатому) виду. Уравнение, которое будем прибавлять к другим уравнениям назовем *разрешающим уравнением*, а коэффициент при переменной, которую будем исключать из всех уравнений, кроме разрешающего назовем *разрешающим элементом.*

Дана система (6.1). Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$. Возьмем a_{11} за разрешающий элемент. Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений кроме первого. Для этого будем первое уравнение умножать последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и прибавлять к остальным уранениям системы. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}\right. ,$$

равносильную исходной. Будем считать, что $a'_{22} \neq 0$, тогда неизвестное x_2 можно исключить из всех уравнений системы кроме второго, и так далее, пока не получим систему треугольного или ступенчатого вида, из которой легко находить неизвестные.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a''_{mk}x_k + ... + a''_{mn}x_n & = & b''_m \end{array}\right. ,$$

Решать систему методом Гаусса удобно, преобразовывая расширенную матрицу системы.

Пример 8.1. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Решение . Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & 0,5 \end{array}\right)$$

Итак, $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_4 = -1,5x_3 + 0,5 \end{cases}.$

Неизвестные x_2 и x_3 называются свободными. Придавая им различные значения, будем получать различные частные решения системы. Например, если положить $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, то получим $x_1 = 2$, $x_4 = -1$, и $(2; -1; 1; -1)$ – частное решение системы.

§9. Арифметические векторы и действия над ними.

В школе на уроках геометрии и физики вектор определяли как направленный отрезок, вводили графически сумму и разность векторов, произведение вектора на число. Если ввести в пространстве декартову систему координат, то каждому вектору будет соответствовать упорядоченная тройка чисел $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Обобщая известные из школы факты, можно ввести следующее понятие

Определение 9.1. *Арифметическим n-мерным вектором* называется упорядоченная последовательность n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначается вектор

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{9.1}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют *координатами вектора.*

Векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называют *равными*, если если их соотвествующие координаты равны, то есть $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$, $a_n = b_n$.

Суммой векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad (9.2).$$

Произведением вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число k называется вектор

$$k\overline{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) \qquad (9.3).$$

Вектор $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, все координаты которого равны 0, называется *нулевым.*

Вектор $-\overline{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ называется *противоположным* вектору $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Введенные выше операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяют условиям:

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;
4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;
5. $k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$;
6. $(k + l)\overline{a} = k\overline{a} + l\overline{a}$;
7. $(kl)\overline{a} = k(l\overline{a})$;
8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными*, если $\overline{b} = k\overline{a}$.

Пример коллинеарных векторов дает таблица обменных курсов валют.

	1рубль	1 доллар	1 евро
1рубль	1	0,0317	0,0239
1доллар	31,55	1	0,754
1 евро	41,87	1,327	1

Любые две строки или любые два столбца этой матрицы представляют собой коллинеарные вектора.

Определение 9.2. Множество n-мерных арифметических векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие условиям 1– 8, называется *арифметическим n-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}_n$.

Определение 9.3. *Скалярным произведением двух n-мерных векторов* $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное сумме произведений их одноименных координат.

$$(\overline{a},\, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \tag{9.4}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$;

2) $(\overline{a} + \overline{b}, c) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$;

3) $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$;

4) $(\overline{a}, \overline{a}) > 0$ при $\overline{a} \neq 0$ и $(\overline{a}, \overline{a}) = 0$ только тогда, когда $\overline{a} = 0$.

Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

§10. Линейная зависимость векторов.

Операции сложения и умножения векторов лежат в основе и находят многочисленные приложения в разделе математики, называемом линейной алгеброй.

Вектор $\overline{b}$ называется *пропорциональным* вектору $\overline{a}$, если существует число $k \neq 0$ такое, что $\overline{b} = k\overline{a}$. Обобщением понятия пропорциональности векторов является понятие их линейной комбинации.

Определение 10.1. Пусть дана система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_m$ из пространства $\mathbb{R}_n$. Вектор $\overline{b}$ вида

$$\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m, \tag{10.1}$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m – действительные числа называется *линейной комбинацией векторов* $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_m$.

Говорят также, что вектор $\overline{b}$ *линейно выражается* через вектора $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_m$.

Если векторы заданы своими координатами, то используя определение операций над векторами, для любой координаты вектора $\overline{b}$ получим $b_i = \lambda_1\overline{a}_{1i} + \lambda_2\overline{a}_{2i} + \ldots + \lambda_m\overline{a}_{mi}$.

Определение 10.2. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m \, (m \geqslant 2)$ из пространства $\mathbb{R}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно ($\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_m^2 \neq 0$), что справедливо равенство

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0} \tag{10.2}$$

(линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ равна нулю). Если равенство (10.2) выполняется только тогда, когда все коэффициенты равны нулю ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$), то система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ называется *линейно независимой*.

Докажем несколько теорем о свойствах линейно зависимых векторов.

Теорема 10.1. *Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима. По определению существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}.$$

Пусть для определенности $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\overline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\overline{a}_m.$$

Вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для определенности вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы, то есть выполнено равенство $\overline{a}_1 = \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_m\overline{a}_m$ или $\overline{a}_1 - \lambda_2\overline{a}_2 - \ldots - \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$. В линейной комбинации $\overline{a}_1 - \lambda_2\overline{a}_2 - \ldots - \lambda_m\overline{a}_m = \overline{0}$ не все коэффициенты равны нулю ($\lambda_1 = 1$), значит, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима. □

Теорема 10.2. *Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

Доказательство. Дана система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$, $\overline{0}$, содержащая нулевой вектор. Коэффициенты линейной комбинации можно выбрать так: 0, 0, ..., 0, 1. Линейная комбинация векторов равна нулю $0\overline{a}_1+0\overline{a}_2+\ldots+0\overline{a}_m+1\overline{0}=\overline{0}$, но не все коэффициенты нулевые. □

Теорема 10.3. *Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.*

Доказательство. Дана система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$, и ее подсистема $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ $(k<m)$. Так как система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно зависимой, то существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, не все равные нулю, что справедливо равенство $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_k\overline{a}_k=\overline{0}$. Если взять коэффициенты линейной комбинации λ_1, λ_2, ..., λ_k, 0, ..., 0, то получим верное равенство $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_k\overline{a}_k+0\overline{a}_{k+1}+\ldots+0\overline{a}_n=\overline{0}$, в которой не все коэффициенты равны 0. □

Теорема 10.4. *Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.*

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что в линейно независимой системе векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$ существует линейно зависимая подсистема. По теореме 10.3 тогда и вся система векоров будет линейно зависима. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, и система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$ линейно независима. □

Теорема 10.5. *Система векторов, содержащая два коллинеарных вектора, линейно зависима.*

Докажите эту теорему самостоятельно.

Примером линейно независимых векторов являются два неколлинеарных вектора на плоскости. В самом деле, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы и в равенстве $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}=0$, например, $\lambda_1\neq 0$, то $\overline{b}=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}$

и, значит, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Также линейно независимыми являются три некомпланарных вектора в пространстве $\mathbb{R}_3$ (векторы называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости).

Данное выше определение линейно зависимой системы векторов предполагает, что эта система содержит конечное число векторов. Однако часто приходится рассматривать и бесконечные системы. Мы условимся бесконечную систему считать *линейно зависимой*, если линейно зависимой будет какая-нибудь ее подсистема, и *линейно независимой*, если любая ее подсистема является линейно независимой. С бесконечными линейно независимыми системами мы встретимся в курсе анализа.

Возникает вопрос: сколько линейно независимых векторов может содержать система n-мерных векторов. Для ответа на него рассмотрим систему векторов

$$\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0),\ \overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0),\ \ldots,\ \overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1) \qquad (10.3)$$

Эта система векторов линейно независима. Действительно, линейная комбинация векторов (10.3) обращается в 0 только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (проверить самостоятельно). Значит, существует система n линейно независимых n-мерных векторов.

Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 10.6. *Всякие k n-мерных векторов при $k > n$ линейно зависимы (без доказательства).*

Задание 10.1. Найдите линейную комбинацию векторов $3\overline{a}_1 - 2\overline{a}_2 + 5\overline{a}_3$, где $\overline{a}_1 = (2; -3; -5; 7)$, $\overline{a}_2 = (-3; 4; 6; 1)$, $\overline{a}_3 = (1; -4; -7; 2)$.

Задание 10.2. Решите уравнение $2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3 - 7\overline{x} = \overline{a}_4$, где $\overline{a}_1 = (1; 2; -3; 4)$, $\overline{a}_2 = (-1; -1; -1; 5)$, $\overline{a}_3 = (2; -5; -1; 3)$, $\overline{a}_4 = (2; 1; -2; -1)$.

Задание 10.3. Будет ли линейно независимой система векторов, если
а) $\overline{a}_1 = (1; 2; -3)$, $\overline{a}_2 = (-1; -1; -1)$, $\overline{a}_3 = (2; 5; -10)$;
б) $\overline{a}_1 = (3; -1; 4)$, $\overline{a}_2 = (1; 2; -1)$, $\overline{a}_3 = (7; 1; 5)$.

Задание 10.4. Даны четыре вектора $\overline{a}_1 = (1; -2; 2)$, $\overline{a}_2 = (-1; 3; -2)$, $\overline{a}_3 = (2; -4; 3)$, $\overline{a}_4 = (5; 1; -9; 8)$. Покажите, что система векторов $\overline{a}_1$,

$\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ линейно независима, а система $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ линейно зависима. Выразите вектор $\overline{a}_4$ через вектора $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$.

Задание 10.5. Пусть $\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$ — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимыми системы
а) $\overline{x}$, $\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$;
б) $\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{x}+\overline{z}$, $\overline{y}+\overline{z}$;
в) $\overline{x}-\overline{y}$, $\overline{y}-\overline{z}$, $\overline{z}-\overline{x}$?

§11. Линейные пространства.

Для построения общей теории систем линейных уравнений недостаточно того аппарата, который мы до этого применяли. Помимо матриц и определителей нам необходимо понятие линейного пространства.

Определение 11.1. Множество $\mathbb{V}$ элементов произвольной природы называется *линейным пространством*, если

а) задана внутренняя операция – сложение элементов пространства (правило, по которому $\forall x,\, y \in \mathbb{V}$ ставится в соответствие элемент $z \in \mathbb{V}$), то есть $z = x + y$;

б) задана внешняя операция – умножение элемента на число (правило, по которому $\forall x \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) ставится в соответствие элемент $w \in \mathbb{V}$), то есть $w = \alpha \cdot x$.

Эти операции удовлетворяют следующим условиям:

I. 1) $x + y = y + x,\ \ \forall x,\, y \in \mathbb{V}$;
2) $(x + y) + z = x + y + z,\ \ \forall x,\, y\, z \in \mathbb{V}$;
3) $\exists\, 0 \in \mathbb{V}$ (нулевой элемент), такой что $0 + x = x,\ \ \forall x \in \mathbb{V}$;
4) $\forall x \in \mathbb{V}\ \ \exists x' \in \mathbb{V}$ (противоположный элемент), такой что $x + x' = 0$;

II. 5) $1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{V}$;
6) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,\ \ \forall x \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$;
7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,\ \ \forall x \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$;
8) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \ \forall x,\, y \in \mathbb{V},\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Исходя из определения линейного пространства можно доказать следующие утверждения:

Предложение 11.1. *1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент;*

2. $\forall x \in \mathbb{V}$ существует единственный противоположный элемент, который равен $(-1) \cdot x = -x$;

3. Произведение $0 \cdot x = 0, \ \forall x \in \mathbb{V}$;

4. Произведение $\alpha \cdot 0 = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

5. Если произведение $\alpha \cdot x = 0$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = 0$.

Доказательство. Доказывать утверждения 1 и 2 будем от противного.
1. Предположим, что в линейном пространстве существуют два нулевых элемента 0_1 и 0_2. Тогда с одной стороны $0_1 + 0_2 = 0_1$, с другой стороны $0_1 + 0_2 = 0_2$. Откуда следует равенство $0_1 = 0_2$.
2. Предположим, что в линейном пространстве для любого элемента x существуют два противоположных элемента x' и x''. Имеем $x' + x + x'' = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$ или $x' + x + x'' = x' + (x + x'') = x' + 0 = x'$. Откуда $x' = x''$.
3. Пусть $0 \cdot x = 0$. Тогда $0 \cdot x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0$.
4. Пусть $\alpha \cdot 0 = 0$. Тогда $\alpha \cdot (x - x) = \alpha x - \alpha x = 0$.
5. Пусть $\alpha \cdot x = 0$, но $\alpha \neq 0$.
Тогда $x = 1 \cdot x = \left(\dfrac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) x = \dfrac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$ □

Примеры линейных пространств.

1. Множество матриц размера $m \times n$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

2. Множество многочленов степени меньше или равной n с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

3. Множество $\mathbb{R}_n$ n-мерных векторов с введенными в предыдущем параграфе операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

4. Множество $C[a; b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$. Введем на этом множестве операции сложения функций и умножения функции на число по следующим правилам: сумма функций $f + g$ находится по правилу $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, произведение функции f на число α

находится по правилу $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Линейное пространство $\mathbb{V}$, в котором для любых двух элементов x, y определено число $\rho(x, y)$ (*расстояние* между точками или *метрика*), удовлетворяющее условиям:

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$;
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (неравенство треугольника)

называется *метрическим пространством.*

Расстояние можно вводить различными способами, при этом будем получать различные метрические пространства. Например, можно ввести расстояние через скалярное произведение.

Линейное пространство $\mathbb{R}_n$, в котором введено скалярное произведение называется *евклидовым* и обозначается $\mathbb{E}_n$.

Длиной (*нормой*) вектора $\overline{x}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ называется число $|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *нормированным.* Два вектора, скалярное произведение которых равно 0, называются *ортогональными.*

Теорема 11.2. *Всякая система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, векторы которой попарно ортогональны, линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию данных векторов $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{a}_m = 0 \quad (*)$. Найдем, при каких значениях коэффициентов α_i она обращается в 0. Умножим $(*)$ скалярно на $\overline{a}_i$. $\alpha_1(\overline{a}_1, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_m(\overline{a}_m, \overline{a}_i) = 0$. Получим $\alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) = 0$, так как $(\overline{a}_i, \overline{a}_j) = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, для каждого $i = \overline{1, m}$ имеем $\alpha_i = 0$. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно независима. □

Задание 11.1. Пусть $L = \{(x_1; x_2; x_3) | x_3 = 0\}$ $(L \subset \mathbb{R}_3)$. Проверьте, что L — линейное пространство.

Задание 11.2. Докажите, что множество матриц размера $m \times n$ относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

Задание 11.3. Докажите, что множество многочленов степени меньше или равной n с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на число образует линейное пространство.

Задание 11.4. Докажите, что множество $C[a; b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ образует линейное пространство.

Задание 11.5. Докажите, что множество положительных чисел $\mathbb{R}^+ = \{x|x > 0\}$ с операциями сложения $x \oplus y = xy$ $(x > 0, y > 0)$ и умножения на число $\alpha \odot x = x^\alpha$ образует линейное пространство.

Задание 11.6. Проверьте, образуют ли линейное пространство множества векторов из $\mathbb{R}_n$, удовлетворяющих условиям
а) $\{(x_1; x_2; \ldots x_n)|x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$;
б) $\{(x_1; x_2; \ldots x_n)|x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}$;
в) $\{(x_1; x_2; \ldots x_n)|x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0\}$.

§12. Базис линейного пространства. Подпространства.

Определение 12.1. Линейное векторное пространство $\mathbb{V}$ называется *n-мерным*, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов уже являются линейно зависимыми.

Другими словами, *размерность пространства* – это максимальное число содержащихся в этом пространстве линейно независимых векторов. Обозначают n-мерное пространство $\mathbb{R}_n$.

Определение 12.2. Максимальная совокупность линейно независимых векторов называется *базисом линейного векторного пространства.*

Теорема 12.1. *Все базисы конечномерного линейного векторного пространства $\mathbb{V}$ состоят из одного и того же числа векторов. (без доказательства)*

Теорема 12.2. *Каждый вектор $\overline{x}$ линейного векторного пространства $\mathbb{R}_n$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса.*

Доказательство. Пусть векторы $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_n$. Так как любые $n+1$ векторов в $\mathbb{R}_n$ линейно зависимы, то система $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$, $\overline{x}$ будет линейно зависимой. Тогда существуют числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, λ, не равные одновременно нулю, такие что $\lambda_1\overline{f}_1 + \lambda_2\overline{f}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{f}_n + \lambda\overline{x} = 0$. При этом $\lambda \neq 0$, ибо в противном случае система $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$ будет линейно зависима. Следовательно, $\overline{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overline{f}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\overline{f}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\overline{f}_n$. Обозначив $x_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, получим

$$\overline{x} = x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + \ldots + x_n\overline{f}_n. \qquad (12.1)$$

Это выражение $\overline{x}$ через $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$, единственное, так как если существует другое выражение вектора $\overline{x}$ через векторы базиса, например, $\overline{x} = y_1\overline{f}_1 + y_2\overline{f}_2 + \ldots + y_n\overline{f}_n$, то вычитая из этого равенства равенство (12.1), получим $(y_1 - x_1)\overline{f}_1 + (y_2 - x_2)\overline{f}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\overline{f}_n = 0$. В силу линейной независимости векторов $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$, получим $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \ldots = y_n - x_n = 0$ или $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ..., $y_n = x_n$. □

Равенство (12.1) называется *разложением вектора* $\overline{x}$ *по базису* $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, ..., $\overline{f}_n$. Коэффициенты в разложении вектора по базису называют *координатами вектора* в данном базисе.

В n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}_n$ базис состоит из n векторов. Система векторов (10.3) содержит n векторов и линейно независима. Значит, эти векторы образуют базис. Базис, состоящий из векторов $\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, ..., $\overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$, называют *каноническим.*

Определение 12.3. Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют в пространстве $\mathbb{E}_n$ *ортонормированный базис*, если длина каждого равна 1 и векторы попарно ортогональны, то есть $(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\overline{e}_i| = 1$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 12.3. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ существует ортонормированный базис. (без доказательства)*

Примером ортонормированного базиса является канонический базис: $\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, ..., $\overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$.

Теорема 12.4. *При сложении векторов их координаты (относительно одного базиса) складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

В произвольном n-мерном пространстве понятие линейной комбинации элементов, их линейной зависимости, базиса пространства вводятся аналогично. После выбора базиса задание любого элемента сводится к заданию упорядоченного набора из n чисел – координат элемента в данном базисе. Все линейные пространства одной конечной размерности n устроены одинаково (говорят они *изоморфны*), поэтому обозначать их мы будем также $\mathbb{R}_n$.

Определение 12.4. Множество $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$ называется *подпространством*, если оно само является линейным пространством относительно введенных в $\mathbb{R}_n$ операций, то есть
1. $\forall x, y \in \mathbb{L}$ их сумма $x + y \in \mathbb{L}$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{L}$ произведение $\alpha x \in \mathbb{L}$.

Определение 12.4 эквивалентно определению

Определение 12.5. Множество $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}_n$ называется *подпространством*, если $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall x,\ y \in \mathbb{L}$ имеем $\alpha x + \beta y \in \mathbb{L}$.

Если вектора $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$, то *линейной оболочкой* этой системы векторов называется множество их всевозможных линейных комбинаций $L(\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k) = \{\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{a}_k\}$.
Линейная оболочка является подпространством в $\mathbb{R}_n$.

Простейший способ построения подпространств состоит в следующем. Выберем систему векторов $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$ и рассмотрим линейную оболочку этой системы. Согласно определению 12.4 эта линейная оболочка образует в $\mathbb{R}_n$ подпространство. Базисом подпространства будет максимальная линейно независимая подсистема в $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k \in \mathbb{R}_n$.

§13. Ранг матрицы.

Дана матрица A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы можно рассматривать как n-мерные вектора, а столбцы как m-мерные вектора.

Минором порядка k называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов матрицы (см. §3).

Определение 13.1. Число r называется *рангом матрицы* , если в матрице существует минор M порядка r, отличный от 0, а все миноры порядка $r+1$, если они существуют, равны 0.

Другими словами *рангом матрицы* называется порядок наибольшего отличного от 0 минора матрицы.

Из определения ранга матрицы следует, что ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, то есть $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

В общем случае нахождение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения вычислений матрицу приводят к более простому виду с помощью некоторых преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие ее преобразования:

1) Транспонирование;

2) Перестановка двух строк или двух столбцов;

3) Умножение всех элементов строки (столбца) на любое число $k \neq 0$;

4) Прибавление ко всем элементам строки (столбца) другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;

5) Отбрасывание нулевой строки (столбца).

Теорема 13.1. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду. Ранг новой матрицы вычислить намного легче, так как число миноров, отличных от 0 будет небольшим.

Пример 13.1. Найдите с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение . $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \end{pmatrix},$$

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14$. Следовательно, $r(A) = 3$.

Для рангов матриц справедливы следующие свойства:

1) $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$; 2) $r(A+B) \geqslant |r(A) - r(B)|$;

3) $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$;

4) $r(AB) = r(A)$, если B невырожденная квадратная матрица.

Если ранг $r(A) = r$, то минор порядка r, отличный от 0, называется *базисным*, а входящие в него строки и столбцы *базисными*. Заметим, что о базисных строках и столбцах можно говорить только после выбора базисного минора.

Строки матрицы можно рассматривать как n-мерные вектора. Поэтому понятия *линейной комбинации* и *линейной зависимости* строк вводятся также как в §10 эти понятия вводились для векторов. Сформулируем и докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 13.2. (теорема о базисном миноре) *Любая строка (любой столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).*

Доказательство. Пусть $r(A) = r$. Не умаляя общности, можно считать, что отличный от 0 минор M стоит в правом верхнем углу (при перестановке строк и столбцов по теореме 13.1 ранг не меняется).

Пусть s и t – целые числа такие, что $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant t \leqslant n$.

Рассмотрим определитель порядка $r+1$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rt} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{st} \end{vmatrix}$$

Он равен 0. В самом деле, при $s < r$ в определителе две одинаковых строки, а при $t < r$ – два одинаковых столбца. Значит, $D = 0$. При $s > r$, $t > r$ определитель $D = 0$ как минор порядка $r+1$.

Разложим D по последнему столбцу:

$$D = a_{1t}A_{1t} + a_{2t}A_{2t} + \ldots + a_{rt}A_{rt} + a_{st}A_{st} = 0.$$

Алгебраическое дополнение $A_{st} = M \neq 0$ и не зависит от выбора чисел s и t. Обозначим через $\lambda_{si} = -\frac{A_{it}}{A_{st}}$ $(i = \overline{1,r})$. Тогда $a_{st} = \lambda_{1s}a_{1t} + \lambda_{2s}a_{2t} + \ldots + \lambda_{rs}a_{rt}$ (для всех $t = \overline{1;n}$). Таким образом, строка с номером s является линейной комбинацией базисных строк. $\square$

Сформулируем несколько следствий из теоремы о базисном миноре.

Следствие 13.3. *Если число строк матрицы больше ее ранга r, то строки матрицы линейно зависимы. Если число строк совпадает с рангом матрицы, то строки матрицы линейно независимы.*

Следствие 13.4. *Определитель квадратной матрицы A равен 0 тогда и только тогда, когда одна из строк является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть A – матрица порядка n, определитель которой $|A| = 0$. Тогда $r(A) = r < n$. После выделения базисного минора в матрице A найдется строка, не вошедшая в этот минор. По теореме 13.2 она является линейной комбинацией базисных строк.
2. Достаточность. Пусть k-тая строка матрицы A является линейной комбинацией строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$: $a_{ki} = \lambda_1 a_{i_1 j} + \lambda_2 1 a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_r a_{i_r j}$. Вычтем из k-той строки i_1-ю строку, умноженную на λ_1, i_2-ю, умноженную на λ_2, …, i_r-ю, умноженную на λ_r. Получим $a_{kj} - \lambda_1 a_{i_1 j} - \lambda_2 1 a_{i_2 j} - \ldots - \lambda_r a_{i_r j} = 0$. Значит, определитель $|A| = 0$. $\square$

Следствие 13.5. *Определитель квадратной матрицы A равен 0 тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.*

Следствие 13.6. *Если к некоторой строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на число, то ранг матрицы не изменится.*

Следствие 13.7. *Если в матрице вычеркнуть строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, то ранг матрицы не изменится.*

Так как строки матрицы, входящие в базисный минор, линейно независимы (следствие 13.5), и любая совокупность строк, число которых больше ранга матрицы, линейно зависима, то справедлива теорема

Теорема 13.8. *Ранг матрицы равен числу ее линейно независимых строк.*

Эта теорема может быть взята за определение ранга матрицы.

Теорема о ранге матрицы играет принципиально важную роль в матричном анализе, в частности, при исследовании систем линейных уравнений.

Задание 13.1. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & -7 \\ 1 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 13.2. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 13 & 5 \\ 6 & 4 & 19 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 13.3. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 11 & 9 \\ 5 & -11 & 27 & 17 \\ 5 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Задание 13.4. При каких значениях m и n ранг матрицы
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & m & -6 \\ 1 & 3 & -7 & n \end{pmatrix}$ равен 2?

Задание 13.5. При каких значениях m и n ранг матрицы
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & m & 7 & -4 \\ n & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ равен 2?

§14. Теорема Кронекера–Капелли.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{14.1}$$

Обозначим через $A = (a_{ij})$ — основную матрицу системы, через $\widetilde{A} = (a_{ij}|b_i)$ — расширенную матрицу системы.

Ответ на вопрос о разрешимости системы (14.1) дает теорема

Теорема 14.1. (Кронекера-Капелли) *Система* (14.1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, то есть* $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть система (14.1) совместна и вектор $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ — ее решение. Тогда, подставив его в систему, получим

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ & = & b_1 \\ a_{21}x_1^\circ + a_{22}x_2^\circ + \ldots + a_{2n}x_n^\circ & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ & = & b_m \end{array}\right.$$

Это означает, что последний столбец матрицы $\widetilde{A}$ является линейной комбинацией остальных столбцов и его вычеркивание не меняет ранга матрицы. Следовательно, $r(A) = r(\widetilde{A})$.

б) Достаточность. Пусть $r(A) = r(\widetilde{A})$. Это значит, что базисный минор матрицы A является базисным минором матрицы $\widetilde{A}$. Столбец свободных членов, не вошедший в базисный минор, является линейной комбинацией остальных столбцов, то есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ является решением системы (14.1), то есть система (14.1) совместна. $\square$

§15. Исследование систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{15.1}$$

Найдем ранги $r(A)$ и $r(\widetilde{A})$ основной и расширенной матриц системы.

Если $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, то система несовместна. Пусть $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$, то есть система совместна. Будем считать, что базисный минор M расположен в левом верхнем углу. Тогда последние $m - r$ уравнений являются линейной комбинацией первых r уравнений (являются следствиями первых уравнений) и система (15.1) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right. \tag{15.2}$$

Если $n = r$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение, так как $\Delta = M \neq 0$.

Пусть $n > r$. Оставим в левой части системы первые r неизвестных, остальные перенесем в правую часть.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_r & = & b_m - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right. \tag{15.3}$$

Неизвестные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, называются *свободными*. Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *базаисными* или *зависимыми*. Очевидно, число свободных неизвестных равно $n - r$.

Решая систему (15.3) любым известным нам способом, найдем зависимые неизвестные

$$\begin{cases} x_1 & = & f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r & = & f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{cases}, \tag{15.4}$$

где f_i – линейные функции от переменных x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots$, x_n .

По формулам (15.4) находят *общее решение* системы (15.3), а, значит, и системы (15.1). Придавая свободным неизвестным произвольные значения, будем получать *частные решения* системы.

Сформулируем основные теоремы о числе решений системы линейных уравнений:

Теорема 15.1. *Система линейных уравнений* (15.1) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают с числом неизвестных, то есть* $r(A) = r(\widetilde{A}) = n$ *(система является определенной).*

Теорема 15.2. *Система линейных уравнений* (15.1) *имеет бесконечно много решение тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают, но меньше числа неизвестных, то есть* $r(A) = r(\widetilde{A}) < n$ *(система является неопределенной).*

При решении системы (15.1) наиболее часто применяют метод Гаусса, причем преобразования выполняют не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы. Достоинствами метода Гаусса являются: а) меньшая по сравнению с другими методами трудоемкость, б) возможность одновременно исследовать систему на совместность, и если система является совместной, получить ее общее решение.

Пример 15.1. Решите систему $\begin{cases} 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{cases}$.

Решение . Хотя число уравнений равно числу неизвестных $m = n$, но определитель системы $\Delta = 0$ и по методу Крамера систему решать нельзя.

Будем решать систему методом Гаусса. Преобразуем матрицу $\widetilde{A}$, найдем ее ранг и сравним с рангом матрицы A.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & -5 \end{array}\right).$$

Значит, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$ и по теореме Кронекера-Капелли система совместна. За свободные неизвестные примем x_2 и x_4. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 2 + 2x_2 - 2x_4 \\ 2x_3 & = & -5 - 9x_2 + 7x_4 \end{array}\right. .$$

Ее общее решение имеет вид $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -0,5 - 2,5x_2 + 1,5x_4 \\ x_3 & = & -2,5 - 4,5x_2 + 3,5x_4 \end{array}\right. .$

Пример 15.2. Цех выпускает продукцию четырех видов: A, B, C, D. Известны объемы выпуска продукции за четыре дня и денежные затраты на производство за эти дни:

Дни	Объем выпуска продукции (ед.)				Затраты (д.е.)
	A	B	C	D	
1	50	10	30	20	250
2	40	10	20	20	220
3	30	20	30	—	170
4	20	30	—	50	390

Найдите себестоимость каждого вида продукции.

Решение . Обозначим через x_i себестоимость единицы i-той продукции $(i = 1, 2, 3, 4)$ и составим систему уравнений для нахождения стоимости продукции за каждый день

$$\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 20x_4 & = & 250 \\ 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 & = & 220 \\ 30x_1 + 20x_2 + 30x_3 & = & 170 \\ 20x_1 + 30x_2 \qquad\qquad + 50x_4 & = & 250 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса, разделив предварительно все уравнения системы на 10. Будем последовательно исключать неизвестные x_2, x_1, x_3 и x_4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 3 & 2 & 25 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 22 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 17 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 3 & 2 & 25 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -3 & -4 & -33 \\ -13 & 0 & -9 & -1 & -36 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Ранги основной и расширенной матриц равны и совпадают с числом неизвестных. Значит, система имеет единственное решение. Решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$. Это решение имеет смысл, так как все переменные по условию задачи должны быть положительны.

Пример 15.3. Корм для птицы, составленный из четырех видов зерна, должен содержать 17 единиц вещества A, 35 единиц вещества B, 44 единицы вещества C и 26 единиц вещества D. Известно содержание единиц полезных веществ в 1 кг. зерна каждого вида и цена 1 кг. зерна каждого вида:

Вид	Содержание полезных веществ (ед. в 1 кг.)				Цена 1 кг. (д.е.)
	A	B	C	D	
1	1	3	4	2	5
2	2	4	5	3	7
3	1	1	1	1	2
4	1	3	4	2	5
Итого	17	35	44	26	

Найдите все возможные составы корма, обеспечивающие необходимое количество полезных веществ. Существует ли состав корма, стоимость которого равна 60 д. е.?

Решение . Обозначим через x_i вес зерна i-того вида ($i = 1, 2, 3, 4$) и составим систему уравнений для нахождения состава корма на каждый день

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 35 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 44 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса. Будем последовательно исключать неизвестные x_1 и x_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Ранги основной и расширенной матриц равны. Значит, система имеет решение. Решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - x_4 \\ x_2 = 8 - x_3 \end{cases}.$$

Это решение имеет смысл, если все переменные неотрицательны. Тогда необходимо, чтобы $x_3 \in [0;\, 8]$, $x_4 \in [0;\, x_3 + 1]$.

Ответим на второй вопрос примера. Для этого в систему нужно добавить еще одно уравнение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 17 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 35 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 44 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 26 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 60 \end{cases}.$$

Решая эту систему,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 35 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 44 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 26 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -24 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

получим, что ранги основной и расширенной матриц различны. Значит, эта система решений не имеет. Нельзя составить рацион, стоимость которого равнялась бы 60 д. е. Проверьте, можно ли составить рацион, стоимость которого равнялась бы 61 д. е.

Задание 15.1. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}.$$

Задание 15.2. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14 \end{cases}.$$

Задание 15.3. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание 15.4. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

Задание 15.5. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}.$$

Задание 15.6. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

Задание 15.7. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Задание 15.8. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + 14x_2 - 7x_3 - 15x_4 + 23x_5 = 3 \end{cases}.$$

§16. Системы линейных однородных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{16.1}$$

Система (16.1) всегда совместна так как имеет нулевое (тривиальное) решение $(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому интересен вопрос, при каких условиях система имеет нетривиальные решения. Ответ на этот вопрос дает теорема

Теорема 16.1. *Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела нетривиальные решения необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, то есть* $r(A) = r < n$.

Доказать самостоятельно.

Следствие 16.2. *Если в системе* (16.1) *число уравнений совпадает с числом неизвестных* ($m = n$), *то система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен* 0, *то есть* $\Delta = 0$.

Решения системы линейных однородных уравнений (16.1) обладают свойствами:

1. Если вектор $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ является решением системы, то вектор $kX = (kx_1^\circ, kx_2^\circ, \ldots, kx_n^\circ)$ также является решением этой системы;

2. Если векторы $X = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ и $Y = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ являются решениями системы, то вектор $X + Y = (x_1^\circ + y_1^\circ, x_2^\circ + y_2^\circ, \ldots, x_n^\circ + y_n^\circ)$ также является решением этой системы.

Из этих свойств вытекает теорема

Теорема 16.3. *Любая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.*

Так как решение системы линейных однородных уравнений с n неизвестными есть n-мерный вектор и линейная комбинация решений является решением системы, то множество решений системы линейных однородных уравнений образует линейное пространство, которое является подпространством в пространстве $\mathbb{R}_n$. Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений называется *фундаментальной системой решений*. То есть решения, входящие в фундаментальную систему решений, линейно независимы и любое решение системы является линейной комбинацией решений из фундаментальной системы.

Теорема 16.4. *Если ранг матрицы A системы линейных однородных уравнений* (16.1) *равен r и меньше числа неизвестных n, то фундаментальная система решений системы* (16.1) *существует и содержит $n - r$ решений.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r и меньше числа неизвестных $r < n$. Пусть базисный минор $M \neq 0$ стоит в левом верхнем углу. Перенеся свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в первых r уравнениях в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = & -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_r & = & -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right.$$

Зададим свободные неизвестные $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0$, …, $x_n = 0$, получим решение системы $(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1,\ \ldots,\ \alpha_r^1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Аналогично, задавая свободные неизвестные $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, …, $x_n = 0$, получим решение $(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ \ldots,\ \alpha_r^2,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0)$ и так далее. Так найдем $k = n - r$ решений системы

$e_1 = (\alpha_1^1,\ \alpha_2^1, \ldots, \alpha_r^1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$;
$e_2 = (\alpha_1^2,\ \alpha_2^2, \ldots, \alpha_r^2,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0)$;
$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$e_k = (\alpha_1^k,\, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_r^k,\, 0,\, 0,\, \ldots,\, 1)$.

Эти k решений линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_r^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_r^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_r^k & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

равен k. В этой матрице есть минор порядка k, отличный от нуля, например, содержащий последние k столбцов.

Решения $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_k$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы (16.1) имеет вид

$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k$. □

Пример 16.1. Решите систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 17x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 11x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение . Методом Гаусса найдем ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & -6 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & -11 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 18 & -21 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & -14 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы системы равен 2 (в матрице есть минор порядка 2, отличный от нуля). Неизвестные x_3, x_4 и x_5 — свободные неизвестные, перенесем их в правую часть и получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 10x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -6x_3 + 7x_4 - 4x_5 \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $e_1 = (8;\, -6;\, 1;\, 0;\, 0)$, $e_2 = (-10;\, 7;\, 0;\, 1;\, 0)$, $e_3 = (3;\, -4;\, 0;\, 0;\, 1)$ и ее общее решение

$X = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 = c_1(8;\ -6;\ 1;\ 0;\ 0) + c_2(-10;\ 7;\ 0;\ 1;\ 0) +$
$+ c_3(3;\ -4;\ 0;\ 0;\ 1)$.

Задание 16.1. Решите систему однородных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание 16.2. Решите систему однородных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 11x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Задание 16.3. Решите систему однородных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

Задание 16.4. Решите систему однородных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

Задание 16.5. Решите систему однородных уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 14x_4 = 0 \\ 12x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 26x_4 = 0 \\ 9x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 22x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание 16.6. Решите систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

§17. Метрические и евклидовы пространства.

Определение 17.1. *Метрическим пространством* называется множество $\mathbb{V}$ элементов произвольной природы (*точек* пространства), в котором для любых двух элементов x, $y \in \mathbb{V}$ определено число $\rho(x, y)$, (*расстояние* между точками или *метрика*), удовлетворяющее условиям:

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$;
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

Расстояние можно вводить различными способами, при этом будем получать различные метрические пространства. Например, можно ввести расстояние через скалярное произведение.

Пусть задано линейное n-мерное пространство $\mathbb{R}_n$. Введем в нем понятие скалярного произведения и длины вектора.

Определение 17.2. *Скалярным произведением векторов* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}_n$ назовем действительное число $(\overline{x}, \overline{y})$, причем выполняются условия:

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$ при $\overline{x} \neq 0$ и $(\overline{x}, \overline{x}) = 0$ при $\overline{x} = 0$.

Определение 17.3. Линейное пространство $\mathbb{R}_n$, в котором введено скалярное произведение называется *евклидовым* и обозначается $\mathbb{E}_n$.

Длиной (*нормой*) вектора $\overline{x}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ называется число $|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$.

Если скалярное произведение ввести (как в §9) по закону $(\overline{x}, \overline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, где $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то длину вектора $\overline{x}$

можно вычислить по формуле $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Для длины вектора справедливы свойства:

1. $|\overline{x}| = 0$, при $\overline{x} = 0$;
2. $|\alpha\overline{x}| = |\alpha| \cdot |\overline{x}|$;
3. $|\overline{x} + \overline{y}| \leqslant |\overline{x}| + |\overline{y}|$ (неравенство треугольника).
4. $|(\overline{x}, \overline{y})| \leqslant |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского);

Докажем неравенство Коши-Буняковского. Рассмотрим вектор $\lambda\overline{x} - \overline{y}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. По свойству 4 определения 17.1 $(\lambda\overline{x} - \overline{y}, \lambda\overline{x} - \overline{y}) \geqslant 0$. То есть $\lambda^2(\overline{x}, \overline{x}) - 2\lambda(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{y}, \overline{y}) \geqslant 0$. Квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения, значит его дискриминант $D \leqslant 0$. Имеем

$$D/4 = (\overline{x}, \overline{y})^2 - (\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y}) \leqslant 0$$

$$(\overline{x}, \overline{y})^2 \leqslant (\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y}) = |\overline{x}|^2 \cdot |\overline{y}|^2.$$

Извлекая квадратный корень, получим неравенство Коши-Буняковского. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что дробь

$$-1 \leqslant \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{(\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y})} \leqslant 1.$$

Поэтому данную дробь можно считать косинусом некоторого угла φ :

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{(\overline{x}, \overline{x})(\overline{y}, \overline{y})}$$

Угол φ назовем *углом* между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *нормированным.* Два вектора, скалярное произведение которых равно 0, называются *ортогональными.*

Теорема 17.1. *Всякая система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, векторы которой попарно ортогональны, линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию данных векторов $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{a}_m = 0 \quad (*)$. Найдем, при каких значениях коэффициентов α_i она обращается в 0. Умножим $(*)$ скалярно на $\overline{a}_i$. $\alpha_1(\overline{a}_1, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) + \ldots + \alpha_m(\overline{a}_m, \overline{a}_i) = 0$. Получим $\alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) = 0$, так как $(\overline{a}_i, \overline{a}_j) = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, для каждого $i = \overline{1, m}$ имеем $\alpha_i = 0$. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно независима. $\square$

Определение 17.4. Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют в пространстве $\mathbb{E}_n$ *ортонормированный базис*, если длина каждого равна 1 и векторы попарно ортогональны, то есть $(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\overline{e}_i| = 1$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приведем (без доказательства) основную теорему этого параграфа:

Теорема 17.2. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_n$ существует ортонормированный базис.*

Примером ортонормированного базиса является канонический базис: $\overline{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$.

§18. Формулы перехода от одного базиса к другому.

Пусть в пространстве R_n заданы два базиса
$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ – "старый" базис и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ – "новый" базис.

Так как векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют базис, то векторы $\overline{f}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}\overline{e}_i$ можно выразить через этот базис.

Из координат векторов $\{\overline{f}_j\}$ $(j = \overline{1, n}\,)$ составим матрицу C, записывая координаты векторов $\{\overline{f}_j\}$ в столбцы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

Матрицу C называют *матрицей перехода* от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$.

Матрица C – невырожденная. Векторы $\{f_j\}$ линейно независимы, значит, ранг матрицы C равен n или $|C| \neq 0$. В матричной форме формулы перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ можно записать

$$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)C \tag{18.2}$$

Аналогично, так как $\{\overline{f}_j\}$ – базис, выразим через него векторы $\overline{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\overline{f}_j$. Матрица A, элементы которой координаты векторов $\overline{e}_i$, записанные в столбцы, является матрицей перехода от базиса $\{\overline{f}_j\}$ к базису $\{\overline{e}_i\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы перехода от базиса $\{\overline{f}_j\}$ к базису $\{\overline{e}_i\}$ имеют вид

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n) = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n)A \tag{18.3}$$

Из (17.2) и (17.3) следует, что $A = C^{-1}$.

Выведем формулы, связывающие координаты вектора в "старом" и "новом" базисах. Пусть $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\overline{e}_i$ и $\overline{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j\overline{f}_j$. Тогда

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\overline{f}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \eta_j c_{ij})\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\overline{e}_i$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \ldots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \ldots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \eta_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \ldots \\ c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Вывели формулы вычисления координат вектора при изменении базиса

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{18.4}$$

Пример 18.1. В базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ заданы векторы $\overline{f}_1 = (1;3;1)$, $\overline{f}_2 = (1;2;-1)$, $\overline{f}_3 = (2;8;7)$. Докажите, что векторы $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\overline{x} = (1;7;10)$ в новом базисе.

Решение . Составим матрицу C перехода от "старого" базиса к "новому": $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Если векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ линейно независимы, то столбцы матрицы C линейно независимы, то есть $r(C) = 3$ или $|C| \neq 0$.

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$

Матрица C невырожденная и является матрицей перехода от "старого" базиса к "новому". Найдем матрицу C^{-1}, обратную к C.

$C^{-1} = -\begin{pmatrix} 22 & -9 & 4 \\ -13 & 5 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Формулы перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ имеют вид

$$(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора $\overline{x}$ в "новом" базисе:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & -4 \\ 13 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, $\overline{x} = (1;-2;1)$.

Пусть базисы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ пространства $\mathbb{E}_n$ ортонормированы, то есть векторы базисов единичные и попарно ортогональны: $|\overline{e}_i| = 1,\ |\overline{f}_i| = 1,\ (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0,\ (\overline{f}_i, \overline{f}_j) = 0.$

Пусть заданы координаты векторов $\overline{f}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ni})$ в "старом" базисе $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $|\overline{f}_i|^2 = (q_{1i})^2 + (q_{2i})^2 + \ldots + (q_{ni})^2 = 1$ и $(\overline{f}_i, \overline{f}_j) = q_{1i}q_{1j} + q_{2i}q_{2j} + \ldots + q_{ni}q_{nj} = 0$ при $i \neq j$.

Матрица перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$ имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \tag{18.5}$$

Определение 18.1. Матрица, в которой сумма квадратов элементов каждого столбца равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов равна 0 называется *ортогональной.*

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 18.1. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.*

Теорема 18.2. *Матрица, обратная ортогональной матрице, совпадает с транспонированной, то есть $Q^{-1} = Q^T$.*

Доказательство. Вычислим произведение

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = E. \qquad \square$$

Следствие 18.3. *Определитель ортогональной матрицы равен ± 1 ($|Q| = \pm 1$).*

Доказательство. $|Q^{-1} \cdot Q| = |Q^T \cdot Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 = 1.$ $\square$

Задание 18.1. В каноническом базисе даны три вектора $\overline{a} = (3; -2)$, $\overline{b} = (-2; 1)$, $\overline{c} = (7; -4)$. Докажите, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно принять за новый базис. Найдите координаты вектора $\overline{c}$ в новом базисе.

Задание 18.2. В каноническом базисе даны четыре вектора $\overline{a} = (3; -2; 1)$, $\overline{b} = (-1; 1; -2)$, $\overline{c} = (2; 1; -3)$, $\overline{d} = (11; -6; 5)$. Докажите, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ можно принять за новый базис. Запишите матрицу перехода от старого базиса к новому. Найдите координаты вектора $\overline{d}$ в новом базисе.

Задание 18.3. В каноническом базисе даны четыре вектора $\overline{a} = (2; 1; 0)$, $\overline{b} = (1; -1; 2)$, $\overline{c} = (2; 2; -1)$, $\overline{d} = (3; 7; -7)$. Докажите, что любую тройку векторов можно принять за новый базис. Найдите каждого из векторов в базисе, состоящем из остальных трех векторов.

Задание 18.4. В каноническом базисе даны четыре вектора $\overline{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\overline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$, $\overline{c} = \left(\frac{7}{\sqrt{66}}; -\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}\right)$, $\overline{d} = (1; 2; 1)$. Докажите, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют ортонормированный базис. Найдите координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

§19. Линейный оператор.

Одно из фундаментальных понятий алгебры матриц – это понятие линейного оператора.

Рассмотрим два линейных пространства $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}_m$. Отображение, ставящее любому вектору $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$ единственный вектор $\overline{y} \in \mathbb{R}_m$ называется *оператором* из $\mathbb{R}_n$ в $\mathbb{R}_m$ ($A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$). Обозначается оператор $\overline{y} = A(\overline{x})$ или просто $\overline{y} = A\overline{x}$. Вектор $\overline{y}$ называется *образом* вектора $\overline{x}$.

Определение 19.1. Оператор $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}_n$ и любого действительного числа α выполняются условия:

1) $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$;
2) $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A\overline{x}$.

Условия 1) и 2) можно объединить:

Определение 19.2. Оператор A называется *линейным*, если для любых векторов $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}_n$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено условие $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y}$.

Если $\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_n$ то отображение $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ называется *преобразованием* пространства $\mathbb{R}_n$.

Примеры линейных операторов.

1.Тождественный оператор I: $I\overline{x} = \overline{x}$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

2. нулевой оператор: $A\overline{x} = 0$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

3. оператор проектирования: $P : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ и $P\overline{a} = \overline{b}$, если $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (a_1, a_2)$.

4. оператор подобия: $A\overline{x} = k\overline{x}$ для всех векторов $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$;

5. оператор дифференцирования: $f(x) \to f'(x)$;

6. оператор интегрирования: $f(x) \to F(x)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$.

Если из того, что $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ следует, что $A\overline{x}_1 \neq A\overline{x}_2$, и для любого вектора $\overline{y} \in \mathbb{R}_m$ существует вектор $\overline{x} \in \mathbb{R}_n$ такой, что $\overline{y} = A\overline{x}$, то говорят, что оператор A действует *взаимно-однозначно.*

Пусть заданы два линейных оператора $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ и $B : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$.

Суммой линейных операторов A и B называется оператор $A + B$, действующий по закону $(A + B)(\overline{x}) = A\overline{x} + B\overline{x}$.

Произведением линейного оператора A на число α называется оператор αA, действующий по закону $(\alpha A)\overline{x} = \alpha(A\overline{x})$.

Произведением линейных операторов A и B называется оператор AB, действующий по закону $(AB)\overline{x} = A(B\overline{x})$. В общем случае $AB \neq BA$.

Линейный оператор B называется *обратным* оператору A, если произведение $AB = I$ (тождественный оператор). Обозначается обратный оператор A^{-1}.

Теорема 19.1. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал обратный оператор необходимо и достаточно, чтобы оператор A действовал взаимно-однозначно.*

Определим как действует линейный оператор $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$.

Выберем в пространстве $\mathbb{R}_n$ базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$, а в пространстве $\mathbb{R}_m$ базис $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_m$.

Найдем образы базисных векторов

$$A\overline{e}_1 = a_{11}\overline{f}_1 + a_{21}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{f}_m = \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\overline{f}_j = (a_{11}; a_{21}; \ldots; a_{n1});$$
$$A\overline{e}_2 = a_{21}\overline{f}_1 + a_{22}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{f}_m = \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\overline{f}_j = (a_{12}; a_{22}; \ldots; a_{n2});$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots;$$
$$A\overline{e}_n = a_{1n}\overline{f}_1 + a_{2n}\overline{f}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{f}_m = \sum_{j=1}^{m} a_{jn}\overline{f}_j = (a_{1n}; a_{2n}; \ldots; a_{nn}).$$

Из чисел a_{ji} составим матрицу A, записывая координаты векторов $A\overline{e}_i$ в столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.1}$$

A – матрица размера $m \times n$. Матрица A называется *матрицей линейного оператора* A. Таким образом, каждому линейному оператору можно поставить в соответствие матрицу. Задание матрицы полностью определяет линейный оператор.

Выведем формулу для вычисления координат образа произвольного вектора $\overline{x}$. Пусть оператор $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$. Выберем базисы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ в пространстве $\mathbb{R}_n$, и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_m$ в пространстве $\mathbb{R}_m$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i$ – произвольный вектор в $\mathbb{R}_n$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j\overline{f}_j \in \mathbb{R}_m$ – образ вектора $\overline{x}$, $A = (a_{ij})$ – матрица линейного оператора A. Тогда

$$\overline{y} = A\overline{x} = A(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i A\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\overline{f}_j) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)\overline{f}_j.$$

Запишем эти выкладки подробней в координатах

$$\overline{y} = A\overline{x} = x_1(a_{11}\overline{f}_1 + a_{21}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{f}_m) + x_2(a_{12}\overline{f}_1 + a_{22}\overline{f}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{f}_m) +$$
$$\ldots + x_n(a_{1n}\overline{f}_1 + a_{2n}\overline{f}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{f}_m) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n})\overline{f}_1 +$$
$$+(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n})\overline{f}_2 + \ldots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn})\overline{f}_m.$$

В силу единственности разложения вектора $\overline{y}$ по базису имеем $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ia_{ji}$.

или в координатах $\begin{cases} y_1 & = & x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} \\ y_2 & = & x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} \\ \ldots & & \ldots \qquad \ldots \\ y_m & = & x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} \end{cases}$,

и матричной форме

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{19.2}$$

Мы показали, что для задания линейного оператора $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$ достаточно задать образы базисных векторов. Заданием этих образов оператор определяется однозначно.

Сформулируем несколько теорем о линейных операторах:

Теорема 19.2. *Пусть* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *– базис в пространстве* $\mathbb{R}_n$, $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ *– произвольные вектора в пространстве* $\mathbb{R}_m$. *Тогда существует единственный оператор* $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$ *такой что* $A\overline{e}_i = \overline{f}_i$.

Так как все операции над линейными операторами можно свести к операциям над матрицами операторов, то справедлива теорема

Теорема 19.3. *Матрица произведения операторов* AB *равна произведению матриц операторов* A *и* B.

В пространстве $\mathbb{R}_n$ базис можно выбрать различными способами, но тогда и матрицы оператора в разных базисах будут разными. Связь между матрицами оператора в разных базисах выражается теоремой

Теорема 19.4. *Матрицы* A *и* A^* *линейного оператора* A *в базисах* $\{\overline{e}_i\}$ *и* $\{\overline{f}_j\}$ *связаны соотношением* $A^* = C^{-1}AC$, *где* C *– матрица перехода от базиса* $\{\overline{e}_i\}$ *к базису* $\{\overline{f}_j\}$.

Теорема 19.5. *Определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к новому базису.*

Эту теорему докажите самостоятельно.

Пример 19.1. Докажите, что оператор A, действующий по закону $A\overline{x} = (2x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2,\ 2x_2-3x_3)$, линейный. Найдите матрицу оператора в каноническом базисе и образ вектора $\overline{a} = (3; 2; -1)$ двумя способами.

Решение . Докажем линейность оператора A.
1) $(2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3), (x_1+y_1)+(x_3+y_3), 2(x_2+y_2)-3(x_2+y_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2,\ 2x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 + y_3,\ y_1 + y_2,\ 2y_2 - 3y_3)$, то есть $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$;
2) $A(\alpha\overline{x}) = (\alpha(2x_1 + x_2 + x_3),\ \alpha(x_1 + x_2),\ \alpha(2x_2 - 3x_3)) =$
$= \alpha(2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2,\ 2x_2 - 3x_3) = \alpha A\overline{x}.$

По определению оператор A – линейный.

Найдем матрицу оператора. Для этого найдем образы базисных векторов $A\overline{e}_1 = (2,\ 1,\ 0)$, $A\overline{e}_2 = (1,\ 1,\ 2)$, $A\overline{e}_3 = (1,\ 0,\ -3)$ и составим матрицу оператора $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдем образ вектора $\overline{a}$, подставив его координаты в формулу, которой задается оператор: $A\overline{a} = (6+2-1;\ 3+2;\ 2+3) = (7;\ 5;\ 5)$ и используя матрицу оператора

$$A\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 19.1. Оператор A действует в пространстве $\mathbb{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (2x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 + 5x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$. Докажите, что оператор A линейный.

Задание 19.2. Оператор A действует в пространстве $\mathbb{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (2x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 + 5x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$. Найдите образы векторов $\overline{a} = (-1; 3; -5)$ и $\overline{b} = (-4; 1; -2)$ двумя способами.

Задание 19.3. Оператор A действует в пространстве $\mathbb{R}_3$ по закону $A\overline{x} = [\overline{a}, \overline{c}]$, где $\overline{c} = (-1; 4; 3)$. Докажите, что оператор A линейный. Найдите матрицу этого оператора.

Задание 19.4. Докажите, что оператор дифференцирования функций одной переменной является линейным.

Задание 19.5. Оператор A действует в пространстве $\mathbb{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (2x_1 - x_2 + 4; x_1 + x_2 - x_3; 7x_1 + 4x_2 + x_3)$. Проверьте, будет ли оператор A линейным.

§20. Элементы теории многочленов.

Многочленом от переменной x называется выражение вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{20.1}$$

где n — целое неотрицательное число, a_0, $a_1, \ldots$, a_{n-1}, a_n – любые числа; причем $a_0 \neq 0$. Число n называется *степенью многочлена* $f(x)$. Коэффициент a_0 – называют *старшим коэффициентом* многочлена $f(x)$, а сам одночлен a_0x^n – его *старшим членом.* Коэффициент a_n называется *свободным членом.* Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется *приведенным.* Многочлены, как и любые алгебраические выражения, можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных.

Вместо переменной x в многочлен $f(x)$ можно подставить любое число c. В результате получится некоторое число. Это число называется *значением многочлена* $f(x)$ *при* $x = c$ (или в точке c) и обозначается через $f(c)$. Число c называется *корнем многочлена* $f(x)$, если значение многочлена в точке c равно нулю.

Введем понятие равенства многочленов. Два многочлена называются равными, если они имеют одинаковую степень и их соответствующие коэффициенты равны. Такое равенство многочленов называется *равенством в алгебраическом смысле*, то есть если

$$f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ g(x) = b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

и многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны, то $m = n$ и $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Однако многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ можно рассматривать как функцию. Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются равными, если для любого $c \in \mathbb{R}$ $f(c) = g(c)$. Такое равенство многочленов называется *равенством в функциональном смысле.*

Нетрудно доказать, что эти определения эквивалентны.

Для многочленов можно ввести операцию деления многочлена на многочлен. Будем говорить, что *многочлен $f(x)$ делится на многочлен* $g(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) \tag{20.2}$$

Если $f(x)$ делится на $g(x)$, то это принято записывать так $f(x) \vdots g(x)$. Многочлен $q(x)$ в равенстве (19.2) называется *частным* от деления $f(x)$ на $g(x)$. Заметим, что многочлен $q(x)$ в равенстве (19.2) определяется однозначно.

Делимость многочленов своими свойствами похожа на делимость целых чисел. Укажем на одну важную аналогию.

Теорема 20.1. *(**о делении с остатком**). Для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, для которой выполняется равенство*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{20.3}$$

где многочлен $r(x)$ либо нулевой, либо имеет степень, меньшую чем степень $g(x)$.

На практике для нахождения частного и остатка обычно применяют метод вычисления, названный "деление углом".

Ясно, что $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r(x)$ от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю.

Рассмотрим деление многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - \alpha$.

Теорема 20.2. *(**Безу**) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена $f(x)$ в точке $x = \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $f(x)$ и разделим его с остатком на двучлен $x - \alpha$. Так как степень этого двучлена равна

1, то остаток либо равен нулю, либо имеет нулевую степень. И в том и в другом случае остаток r есть число. Значит, многочлен можно записать в виде $f(x) = (x-a)\cdot q(x)+r$. Положив в этом тождестве $x = \alpha$, получим, что $f(\alpha) = r$. $\square$

Рассмотрим несколько следствий из этой теоремы.

Следствие 20.3. *Многочлен $f(x)$ делится на $x-\alpha$ тогда и только тогда, когда число α является его корнем.*

$$f(x) = (x-\alpha)\cdot q(x) \tag{20.4}$$

Следствие 20.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$.*

$$f(x) = ((x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k))\cdot q(x) \tag{20.5}$$

Следствие 20.5. *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не больше чем его степень.*

Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x-\alpha$. При этом может оказаться, что число α является корнем частного, тогда $f(x)$ будет, понятно, делиться на $(x-\alpha)^2$ и так далее. В таких случаях число α называется *кратным корнем многочлена.*

Число α называется *корнем кратности* k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то есть $f(x) = (x-\alpha)^k \cdot q(x)$ и $q(\alpha) \neq 0$. Корни кратности 1 называют *простыми* корнями.

В случае многочленов с целыми коэффициентами всегда можно отыскать его рациональные, в частности, целые корни, если, конечно, они существуют. Способ отыскания рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема 20.6. *Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на q.*

Из этой теоремы вытекает важное

Следствие 20.7. *Все рациональные корни приведенного многочлена с целыми коэффициентами – целые и являются делителями свободного члена.*

§21. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора..

Пусть оператор $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ (отображает $\mathbb{R}_n$ в себя).

Определение 21.1. Вектор $\overline{x} \neq 0$ называется *собственным вектором*, а число λ – *собственным числом* линейного оператора A, если они связаны соотношением

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x} \tag{21.1}$$

(говорят, что в этом случае собственный вектор $\overline{x}$ отвечает собственному числу λ).

Из определения следует, что собственный вектор $\overline{x} \neq 0$ при действии оператора A переходит в коллинеарный вектор. В связи с этим понятие собственного вектора является полезным и удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Возникает вопрос: при каких условиях линейный оператор имеет собственные векторы. Так у оператора подобия все векторы собственные, а оператор поворота на угол $\varphi \neq \pi$ не имеет собственных векторов.

Найдем условия, при которых линейный оператор имеет собственные векторы.

Пусть $A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ и $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ – собственный вектор линейного оператора A, то есть $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ и A – матрица этого оператора. Перепишем равенство (21.1) в координатном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{cases}.$$

В матричном виде эта система имеет вид:

$$(A - \lambda E)\overline{x} = 0. \tag{21.2}$$

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен 0.

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{21.3}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21.4}$$

Определитель $|A-\lambda E|$ является многочленом степени n относительно λ и называется *характеристическим многочленом*, а равенство (21.3) называется *характеристическим уравнением* оператора A. Решим уравнение (найдем его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$). Подставляя найденные собственные значения λ_i в систему (21.2), найдем собственные векторы $\overline{x}_i$, отвечающие собственным числам λ_i.

Все вычисления корректны, так как справедлива теорема:

Теорема 21.1. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть A – матрица оператора A в базисе $\{\overline{e}_i\}$, A^* – матрица оператора A в базисе $\{\overline{f}_j\}$, C – матрица перехода от базиса $\{\overline{e}_i\}$ к базису $\{\overline{f}_j\}$. По теореме 19.4 $A^* = C^{-1}AC$. Рассмотрим и преобразуем характеристический многочлен $|A^* - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| = |A - \lambda E||C^{-1}C| = |A - \lambda E|$. $\square$

Пример 21.1. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $A\overline{x} = (2x_1 + 3x_2,\ 2x_1 + x_2,\ x_1 - 3x_2 + 2x_3)$.

Решение . Найдем образы векторов канонического базиса: $A\overline{e}_1 = (2,\ 2,\ 1)$; $A\overline{e}_2 = (2,\ 1,\ 0)$; $A\overline{e}_3 = (1,\ -3,\ 2)$ и запишем матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по третьему столбцу, получим уравнение $(2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-6) = 0$ или $(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения λ решим систему

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = -1$. Запишем систему уравнений $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ x + 1 - 3x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$. Ее общее решение $\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -x_1 \\ x_3 & = & -\frac{4}{3}x_1 \end{array} \right.$.

Получили собственный вектор $\overline{c}_1 = (3,\ -3,\ -4)$ (можно взять любой коллинеарный ему вектор).

Рассмотрим $\lambda_2 = 4$. Запишем систему уравнений $\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_{+}3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$. Ее общее решение $\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -1,5x_1 \\ x_3 & = & -0,5x_1 \end{array} \right.$.

Получили собственный вектор $\overline{c}_2 = (2,\ -3,\ -1)$.

Рассмотрим $\lambda_3 = 2$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 & = & 0 \end{cases}.$$ Ее общее решение $\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{cases}$.

Получили собственный вектор $\overline{c}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ (x_3 – свободное неизвестное).

Собственные векторы оператора A: $\overline{c}_1 = (3,\ -3,\ -4)$ отвечает собственному числу $\lambda_1 = -1$, $\overline{c}_2 = (2,\ -3,\ -1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2 = 4$, $\overline{c}_3 = ((0,\ 0,\ 1))$ отвечает собственному числу $\lambda_3 = 2$.

Пример 21.2. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение . Для матрицы A составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первому строке, получим уравнение $(3-\lambda)((-1-\lambda)(5-\lambda)+8)+1(4(5-\lambda)-16)+1(-16-8(-1-\lambda)) = 0$ или $-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5 = 0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 5$.

Чтобы найти собственные векторы, для каждого значения λ решим систему

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 8 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим $\lambda = 1$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{cases}.$$ Ее общее решение $x_3 = x_2 - 2x_1$

Получили, что собственному числу $\lambda = 1$ отвечают две линейно независимых собственных вектора $\overline{c}_1 = (1,\ 0,\ -2)$ и $\overline{c}_2 = (0,\ 1,\ 1)$.

Рассмотрим $\lambda = 5$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 &= 0 \end{cases}. \text{ Ее общее решение } \begin{cases} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 4x_1 \end{cases}.$$

Получили собственный вектор $\overline{c}_3 = (1,\, 2,\, 4)$.

Собственные векторы оператора A: $\overline{c}_1 = (1,\, 0, -2)$ и $\overline{c}_2 = (0,\, 1,\, 1)$ отвечают собственному числу $\lambda = 1$, $\overline{c}_3 = (1,\, 2,\, 4)$ отвечает собственному числу $\lambda = 5$.

Рассмотрим свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора A.

Предложение 21.2. Если собственный вектор $\overline{x} \neq 0$ отвечает собственному числу λ, то для любого числа $\alpha \neq 0$ вектор $\alpha\overline{x}$ также будет собственным вектором.

Это верно, так как $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A\overline{x} = \alpha(\lambda\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x})$.

Теорема 21.3. Линейная комбинация собственных векторов оператора A, отвечающих одному собственному числу λ, также является собственным вектором этого оператора.

Доказательство. Если $\overline{x} \neq 0$ и $\overline{y} \neq 0$ – собственные векторы, отвечающие одному числу λ, то для любых чисел α и β вектор $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \neq 0$ также будет собственным вектором. Действительно, $A(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y} = \alpha\lambda\overline{x} + \beta\lambda\overline{y} = \lambda(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y})$. $\square$

Следствие 21.4. Множество собственных векторов, отвечающих одному собственному числу λ вместе с нулевым вектором образует линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}_n$.

Определитель $|A - \lambda E|$ является многочленом степени n относительно λ. По теореме Безу, если λ_0 – корень многочлена, то есть $P(\lambda_0) = 0$, то $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, где $Q(\lambda_0) \neq 0$. Если $k = 1$, то λ_0 – простой корень многочлена, если $k > 1$, то λ_0 – корень многочлена кратности k.

Имеет место теорема.

Теорема 21.5. Если λ_0 – корень характеристического многочлена кратности k, то ему соответствует не более k собственных векторов.

Теорема 21.6. Собственные векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ линейного оператора A, отвечающие различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ линейно независимы.

Наиболее простыми линейными операторами являются операторы, которые имеют n линейно независимых собственных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, относящихся к различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Приняв векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ за базис (это можно сделать, так как они линейно независимы), и вычислив их образы $A\overline{e}_i = \lambda_i \overline{e}_i$, найдем матрицу линейного оператора в этом базисе

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Справедлива теорема

Теорема 21.7. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из собственных векторов этого оператора, имеет диагональный вид.

Верно и обратное утверждение:

Теорема 21.8. Если матрица линейного оператора A в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса – собственные векторы линейного оператора.

Из теорем 21.7 и 21.8 следует важное условие, достаточное для того, что для оператора A существовал базис, состоящий из собственных векторов.

Теорема 21.9. Если оператор A имеет n различных действительных собственных значений, то в линейном пространстве $\mathbb{R}_n$ существует базис из собственных векторов линейного оператора и матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид.

Теорема 21.10. Собственные числа линейного оператора обладают следующими свойствами:

1. Сумма собственных чисел матрицы A равна следу этой матрицы, то есть сумме ее диагональных элементов.

2. Произведение собственных чисел матрицы A равно определителю этой матрицы.

Теорема 21.11. Число, отличных от нуля собственных чисел матрицы A, равно ее рангу. В частности, все собственные числа матрицы A отличны от нуля только тогда, когда матрица A невырожденная.

Теорема 21.12. 1. Если λ_0 – собственное число невырожденной матрицы A, то $1/\lambda_0$ – собственное число матрицы A^{-1}.

2. Если λ_0 – собственное число матрицы A, то λ_0^k – собственное число матрицы A^k для любого целого $k > 1$.

Теорема 21.13. Пусть матрица линейного оператора A – симметрическая. Тогда

1. Все собственные числа симметричной матрицы действительны.

2. Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Для примера рассмотрим матрицу второго порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица порядка 2. Характеристическое уравнение для этой матрицы имеет вид $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$. Дискриминант полученного квадратного уравнения $D = (a-c)^2 + 4b^2$ неотрицателен. Значит, уравнение имеет два действительных корня.

Пример 21.3. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение . Матрица A – симметрическая. Покажем, что собственные числа этой матрицы действительные, а собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первому столбцу, получим уравнение

$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10=0$. Решив его, найдем собственные числа оператора: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$. Найдем собственные векторы.

Собственные векторы оператора A: $\bar{c}_1=(2,1,-1)$ отвечает собственному числу $\lambda_1=-1$, $\bar{c}_2=(1,-1,1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2=2$, $\bar{c}_3=(0,1,1)$ отвечает собственному числу $\lambda_3=5$.

Проверим, что собственные векторы ортогональны. Так
$(\bar{c}_1,\bar{c}_2)=2\cdot 1+1\cdot(-1)-1\cdot 1=0$, $(\bar{c}_1,\bar{c}_3)=2\cdot 0+1\cdot 1-1\cdot 1=0$, $(\bar{c}_2,\bar{c}_3)=1\cdot 0-1\cdot 1+1\cdot 1=0$.
Из равенства нулю скалярных произведений следует попарная ортогональность векторов.

Пример 21.4. В некоторой фирме контролирующие приборы эксплуатируются не более трех лет, причем ежегодно (в начале года) заменяется 30% приборов, проработавших к этому времени 2 года, и все приборы, проработавшие 3 года. Приборы, проработавшие год замене не подлежат. Найдите устойчивое распределение приборов по срокам эксплуатации, то есть распределение не меняющееся из года в год.

Решение . Введем обозначения: пусть $u_{i,t}$ – число приборов, которые к началу t-го года проработали i лет. Выразим $u_{i,t}$ через $u_{i,t-1}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. К началу текущего года 1 год проработают те приборы (их число обозначим через $u_{1,t}$), которые были заменены в начале предыдущего, то есть 30% приборов, проработавших к началу предыдущего года 2 года и 100% приборов, проработавших к началу предыдущего года 3 года:

$$u_{1,t}=0\cdot u_{1,t-1}+0,3\cdot u_{2,t-1}+1\cdot u_{3,t-1},$$

К началу текущего года 2 года проработают те приборы (их число обозначим через $u_{2,t}$), которые к началу предыдущего года проработали 1 год (они не подлежат замене):

$$u_{2,t}=1\cdot u_{1,t-1}+0\cdot u_{2,t-1}+0\cdot u_{3,t-1},$$

К началу текущего года 3 года проработают те приборы (их число обозначим через $u_{3,t}$), которые к началу предыдущего года проработали 2 год и не были заменены, то есть 70% от числа приборов, проработавших 2 года:

$$u_{3,t} = 0 \cdot u_{1,t-1} + 0,7 \cdot u_{2,t-1} + 0 \cdot u_{3,t-1},$$

Обозначив через

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ u_{3,t} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}$$

получим уравнение

$$A\overline{u}_{t-1} = \overline{u}_t.$$

Распределение приборов будет устойчивым, если не будет изменяться вектор $\overline{u}$, то есть $\overline{u}_{t-1} = \overline{u}_t$ и при неизменном процентном составе по годам службы вектор $\overline{u}$ будет удовлетворять уравнению

$$A\overline{u} = \overline{u}.$$

Значит, чтобы существовало устойчивое распределение матрица A должна иметь 1 собственным числом. Найдем собственные числа матрицы A. Для этого составим характеристическое уравнение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0,3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,7 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^3 + 0,3\lambda + 0,7 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный действительный корень $\lambda = 1$. Найдем теперь собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda = 1$.

$$(A - 1 \cdot E)\overline{x} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0,3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ 0,7x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -0,7x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ 0,7x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 0,7x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & \in & \mathbf{R} \\ x_3 & = & 0,7x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \overline{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0,7a \end{pmatrix}, \ a \neq 0.$$

Задание 21.1. Проверьте, что вектор $\overline{a} = (1;\ -1;\ -1;\ -1)$ является собственным вектором линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 21.2. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (3x_1 + 4x_2;\ 5x_1 + 2x_2)$.

Задание 21.3. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (4x_1 - x_2 - x_3;\ 6x_2;\ 2x_1 + 5x_2 + x_3)$.

Задание 21.4. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (x_1 + 2 - x_2 - x_3;\ 2x_1 - x_2 + 4x_3;\ x_1 - 8x_2 + 11x_3)$.

Задание 21.5. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (5x_1 + 2x_2 - 3x_3;\ -x_1 + x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3)$.

Задание 21.6. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (3x_1 + x_2;\ -4x_1 - x_2;\ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3)$.

§22. Квадратичные формы.

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

Определение 22.1. *Квадратичной формой* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (22.1)$$

Будем считать, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} – действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы.* Матрица A является симметричной.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$L = XAX^T,$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – матрица-строка переменных.

Пример 22.1. Запишите в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 14x_2x_3 + 3x_2^2 - 9x_3^2$.

Решение . Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, то есть 4, 1, -3, а другие – половине соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ и квадратичную форму можно записать

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы-столбцы переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ связаны соотношением $X = CY$, где $C = (c_{ij})$ – невырожденная матрица порядка n.

Теорема 22.1. *При невырожденном линейном преобразовании переменных $X = CY$ матрица квадратичной формы принимает вид $A^* = C^T AC$.*

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ называется *канонической* (имеет *канонический вид*), если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2. \tag{22.2}$$

Матрица квадратичной формы, заданной в каноническом виде, является диагональной.

Справедлива теорема.

Теорема 22.2. *Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

Пример 22.2. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L(x,y) = 3x^2 - 12xy + 2y^2$.

Решение . Сначала выделим полный квадрат при переменной x:
$L(x,y) = 3(x^2 - 4xy + 4y^2) - 12y^2 + 2y^2 = 3(x-2y)^2 - 10y^2$.

Получили, что невырожденное линейное преобразование $x_1 = x - 2y$, $y_1 = y$ приводит данную квадратичную форму к виду: $L_1(x_1, y_1) = 3x_1^2 - 10y_1^2$.

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом.
$L(x,y) = 2(y^2 - 6xy + 9x^2) - 18x^2 + 2x^2 = 2(3x-y)^2 - 15x^2$. Итак, выполнив преобразование $x_2 = x,\ y_2 = 3x - y$, получим другой канонический вид квадратичной формы
$L(x_2, y_2) = -15x_2^2 + 2y_2^2$.

Пример 22.3. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

Решение . Сначала выделим полный квадрат при переменной x_1, а затем при переменной x_2:
$L = \left[x_1^2 - 2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right) + \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2^2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2$.

Получили, что невырожденное линейное преобразование
$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3,\ y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3,\ y_3 = x_3$
приводит данную квадратичную форму к виду:
$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$.

Можно преобразовать квадратичную форму и другим способом. Так, выполнив преобразование $z_1 = x_1,\ z_2 = 2x_1 + x_2 + x_3,\ z_3 = \frac{7}{2}x_1 + x_2$,

получим другой канонический вид квадратичной формы
$L_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{37}{4}z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

Мы видим, что канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным. Одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду разными способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств.

Теорема 22.3. *(***Закон инерции квадратичных форм***) Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами канонического вида квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.*

Следует отметить. что *ранг матрицы квадратичной формы*, называемый также *рангом квадратичной формы*, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонического вида квадратичной формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями квадратичной формы*. Главные оси квадратичной формы совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов, канонические коэффициенты – с собственными числами матрицы квадратичной формы.

В примере 21.3 матрица является симметричной, поэтому ее можно рассматривать как матрицу квадратичной формы $L(x, y, z) = 3y^2+3z^2-2xy + 2xz + 4yz$. Собственные числа и собственные векторы этой квадратичной формы: $\bar{c}_1 = (2, 1, -1)$ отвечает собственному числу $\lambda_1 = -1$, $\bar{c}_2 = (1, -1, 1)$ отвечает собственному числу $\lambda_2 = 2$, $\bar{c}_3 = (0, 1, 1)$ отвечает собственному числу $\lambda_3 = 5$. По теореме 21.6 векторы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ и $\bar{c}_3$ линейно независимы. Ранее мы показали, что эти векторы попарно ортогональны. Нормируем вектора:
$|\bar{c}_1| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$, тогда $\bar{c}_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;
$|\bar{c}_2| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$, тогда $\bar{c}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

$|\overline{c}_3| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$, тогда $\overline{c}_3' = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Векторы $\overline{c}_1'$, $\overline{c}_2'$, $\overline{c}_3'$ образуют ортонормированный базис.

Теорема 22.4. *Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях.*

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, справедливо неравенство

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad (L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0).$$

Теорема 22.5. *Для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа λ_i матрицы A квадратичной формы были положительны (отрицательны).*

В ряде случаев при установлении знакопостоянства квадратичной формы удобно бывает применить следующий критерий.

Теорема 22.6. (**критерий Сильвестра**) *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, то есть $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. Квадратичная форма будет отрицательно определенной, если знаки главных миноров чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.*

Пример 22.4. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$. Докажем, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

Решение . Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1 способ. Найдем собственные числа этой матрицы. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, то есть $\begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0$. Получили, что $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 4$. Так как корни

характеристического уравнения положительны, то квадратичная форма положительно определена.

2 способ. Согласно критерию Сильвестра $\Delta_1 = 13 > 0$, $\Delta_2 = 56 > 0$. Значит, квадратичная форма положительно определена.

Пример 22.5. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2$. Докажем, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

Решение . Найдем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 7 > 0$, $\Delta_3 = 5 > 0$. Квадратичная форма положительно определена.

§23. Модель Леонтьева многоотраслевого баланса.

Эффективное ведение многоотраслевого хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. При этом каждая отрасль выступает двояко: с одной стороны – это производитель продукции, а с другой – потребитель своей продукции и продукции, произведенной другими отраслями. Наглядное выражение этих взаимосвязей между отраслями отражается в таблицах, называемых *таблицами межотраслевого баланса*. Идея обработки таких таблиц была сформулирована в трудах советских экономистов, но математическая модель межотраслевого баланса была разработана американским экономистом Василием Васильевичем Леонтьевым (в 1925 г. Леонтьев эмигрировал из СССР). В 1936 году в статье "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" он впервые описал применение данной модели в экономике США. В 1963 году за работы в области экономики Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия.

Различают замкнутую и открытую модели Леонтьева.

Мы рассмотрим упрощенный вариант открытой модели Леонтьева.

Предположим, что рассматриваются n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Если вся продукции идет на внутрипроизводственное потребление этой отраслью и другими отраслями, то описывающая такую систему модель Леонтьева называется *замкнутой*, если же часть продукции предназначена для внепроизводственного потребления (личного и общественного), то такую модель Леонтьева называют *открытой*.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, за год).

Введем следующие обозначения: x_i – общий (валовый) объем продукции i-той отрасли ($i = 1, 2, \ldots, n$); x_{ij} – объем продукции i-той отрасли, потребляемый j-той отраслью в процессе производства ($i, j = 1, 2, \ldots, n$); y_i – объем конечного продукта i-той отрасли для непроизводственного потребления или $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор валового выпуска продукции, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор конечного продукта.

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовый выпуск
$x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad \ldots \quad x_{1n}$	y_1	x_1
$x_{21} \quad x_{22} \quad x_{13} \quad \ldots \quad x_{2n}$	y_2	x_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{n1} \quad x_{n2} \quad x_{n3} \quad \ldots \quad x_{nn}$	y_n	x_n

Приведенную выше таблицу называют *таблицей межотраслевого баланса.*

Так как объем продукции любой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой всеми n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{23.1}$$

Уравнения (23.1) называют *соотношениями баланса.*

Введем *коэффициенты прямых затрат* или *технологические коэффициенты*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}\ , \tag{23.2}$$

показывающие затраты продукции i-той отрасли на производство единицы продукции j-той отрасли.

Запишем их в виде матрицы A, которая называется *матрицей прямых затрат*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{23.3}$$

Коэффициенты прямых затрат неотрицательны и на производство любой продукции непосредственно затрачивается продукция хотя бы одного вида.

Матрицу, все элементы которой неотрицательны, и в каждой строке или столбце которой хотя бы один элемент отличен от нуля, в экономике называют *неотрицательной* и записывают $A \geqslant 0$. Это означает, что матрица прямых затрат A неотрицательна. Аналогично, вектор валового выпуска продукции и вектор конечного продукта также неотрицательны $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$.

Изучая развите американской экономики в предвоенный период (30-е годы XX века), Леонтьев обратил внимание на то, что в течение ряда лет коэффициенты прямых затрат a_{ij} остаются постоянными и не зависят от объема выпущенной продукции, что обусловлено примерным постоянством используемых технологий. Это обеспечивает *линейную зависимость* материальных затрат от валового выпуска продукции:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \tag{23.4}$$

Соотношения баланса примут вид

$$\begin{cases} x_1 & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + y_1 \\ x_2 & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + y_2 \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + y_n \end{cases} \tag{23.5}$$

или в матричном виде
$$X = AX + Y \tag{23.6}$$
Система уравнений (23.5) называется *линейной балансовой моделью*, а входящие в систему уравнения – *балансовыми*.

Основная задача межотраслевого баланса *состоит в отыскании такого вектора валового выпуска продукции X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивет заданный вектор конечного продукта Y.*

Перепишем уравнение (23.6) в виде
$$(E - A)X = Y. \tag{23.7}$$
Если матрица $E - A$ невырожденная, то есть $|E - A| \neq 0$, то решение системы можно найти по формуле
$$X = (E - A)^{-1}Y \tag{23.8}$$
Выясним экономический смысл элементов матрицы $(E-A)^{-1} = (s_{ij})$. Зададим единичные векторы конечного продукта $Y_1 = (1;\, 0;\, ...;\, 0)^T$, $Y_2 = (0;\, 1;\, ...;\, 0)^T$, ..., $Y_n = (0;\, 0;\, ...;\, 1)^T$. Тогда соответствующие векторы валового выпуска продукции находится по формуле (23.8) и будут равны $X_1 = (s_{11};\, s_{21};\, ...;\, s_{n1})^T$, $X_2 = (s_{12};\, s_{22};\, ...;\, s_{n2})^T$, ..., $X_n = (s_{1n};\, s_{2n};\, ...;\, s_{nn})^T$. Получили, что каждый элемент s_{ij} матрицы $(E-A)^{-1}$ – это количество валового выпуска продукции i-той отрасли, необходимое для выпуска единицы продукции j-той отрасли.

Неотрицательная матрица $A \geqslant 0$ называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $Y \geqslant 0$ существует неотрицательный вектор $X \geqslant 0$, являющийся решением уравнения $X = AX + Y$. Другими словами, неотрицательная матрица $A \geqslant 0$ является *продуктивной*, если существует неотрицательный вектор $X \geqslant 0$ такой, что $AX \geqslant X$.

Модель Леонтьева является *продуктивной*, если матрица прямых затрат этой модели продуктивна.

Анализ модели Леонтьева опирается на свойства неотрицательных матриц. Теорию таких матриц разработали математики Перрон и Фробениус. Приведем несколько свойств неотрицательных матриц (определение неразложимой матрицы приведено в §1 [1]).

1. Если квадратная матрица A неотрицательна и неразложима, то существует, и притом единственное, положительное действительное собственное число λ^* этой матрицы, которое не меньше модуля каждого собственного числа λ этой матрицы, то есть для всех λ имеем $\lambda^* \geqslant |\lambda|$. Это собственное число λ^* называется *числом Перрона–Фробениуса* матрицы A.

2. Если квадратная матрица A неотрицательна и неразложима, то существует положительный собственный вектор X матрицы A, отвечающий числу Перрона–Фробениуса этой матрицы. Собственный вектор единственный (с точностью до постоянного множителя).

3. Число Перрона–Фробениуса неотрицательной неразложимой квадратной матрицы принадлежит промежутку между наименьшей и наибольшей суммами элементов столбцов (строк) матрицы.

Используя свойства неотрицательной матрицы, можно доказать критерии продуктивности этой матрицы.

Теорема 23.1.(Первый критерий продуктивности.) Если матрица $A \geqslant 0$ и для некоторого положительного вектора Y^* уравнение (23.6) имеет решение $X^* \geqslant 0$, то матрица A продуктивна.

Теорема 23.2.(Второй критерий продуктивности.) Матрица $A \geqslant 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Пример 23.1. Покажем, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$ является продуктивной. Матрица $E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,7 \\ -0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$ имеет обратную. Найдем ее: $(E-A)^{-1} = \dfrac{1}{0,28}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,5 \\ \frac{25}{14} & \frac{45}{14} \end{pmatrix}$. Эта матрица является неотрицательной, следовательно по теореме 23.2 матрица

[1] Квадратная матрица A называется *разложимой*, если согласованными перестановками строк и столбцов ее можно привести к виду $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1 и A_2 – квадратные матрицы не обязательно одного и того же порядка; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица. В противном случае матрица называется *неразложимой*.

A продуктивна.

Теорема 23.3.(Третий критерий продуктивности.) Матрица $A \geqslant 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда сходится ряд $E + A + A^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ и его сумма равна $(E - A)^{-1}$. [2]

Из третьего критерия продуктивности следует, что если сумма элементов любого столбца (любой строки) неотрицательной матрицы A меньше 1, то матрица A продуктивна. В стоимостной модели баланса это означает, что если суммарный вклад всех отраслей в выпуск 1 рубля продукции отрасли j меньше 1, то отрасль j рентабельна (при любом $j = 1, 2, \ldots, n$).

Пример 23.2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$ сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Поэтому матрица A продуктивна.

Теорема 23.4. Если квадратная матрица A неотрицательна и неразложима, то для открытой модели Леонтьева число Перрона–Фробениуса этой матрицы меньше 1, для замкнутой модели оно равно 1.

§24. Линейные модели обмена.

В этом праграфе мы рассмотрим экономическую модель, в которой применяется понятие собственного числа и собственного вектора матрицы. Это *линейная модель обмена* или *модель международной торговли.* Модель международной торговли используют для установления соотношений между бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля для этих стран была взаимовыгодной, то есть для каждой из стран не должно быть значительного дефицита торгового баланса.

Пусть имеется n стран, которые обозначим $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Национальный доход каждой из них обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Введем коэффициенты a_{ij}, показывающие какую часть национального дохода страна S_j тратит на покупку товаров страны S_i. Будем считать,

[2] Ряд $E + A + A^2 + \ldots$ представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом E и знаменателем A. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = b_1 \cdot (1 - q)^{-1}$.

что весь национальный доход тратится на покупку товаров внутри страны или импорт товаров из других стран, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{24.1}$$

Из коэффициентов a_{ij} составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{24.2}$$

которая называется *структурной матрицей торговли.*

В матрице A сумма элементов в любом столбце равна 1 (согласно формуле 24.1).

Для страны S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выручку от внутренней и внешней торговли обозначим через p_i.

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n. \tag{24.4}$$

Для того, чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны S_i, то есть выручка должна быть не меньше национального дохода

$$p_i \geqslant x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Докажем, что условием бездефицитной торговли являются равенства $p_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняются неравенства $p_i > x_i$. Тогда, заменяя p_i их выражениями из формул (24.4), получим систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & > & x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & > & x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & > & x_n \end{array} \right. \tag{24.5}$$

В системе (24.5) сложим неравенства и приведем подобные

$x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2 1(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots + x_n(a_{1n} + a_{2n} +$

$\ldots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
Так как суммы, стоящие в скобках, равны 1, то получаем противоречивое неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Таким образом, предположение $p_i > x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ неверно, и значит, условие $p_i \geqslant x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ примет вид $p_i = x_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (С экономической точки зрения очевидно, что все страны не могут одновременно получать прибыль).

Мы доказали

Утверждение 24.1. Условием бездефицитной торговли являются равенства $p_i = x_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $X = (x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_n)^T$ – вектор национальных доходов стран. Тогда в матричном виде условие бездефицитности торговли примет вид

$$AX = X \tag{24.6}$$

Таким образом, задача о соотношении балансов стран – торговых партнеров свелась к нахождению собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному числу $\lambda = 1$. Существование такого собственного вектора следует из теоремы

Теорема 24.1. Если в матрице A сумма элементов в каждом столбце равна 1, то существует собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$.

Пример 24.2. Пусть задана структурная матрица торговли трех стран $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$. Найдем национальные доходы этих стран.

Решение. Так как сумма элементов матрицы в каждом столбце равна 1, то существует собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$. Обозначим $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – искомый вектор национальных доходов данных стран и найдем этот вектор, решив уравнение $(A - E)X = 0$.

Имеем $(A-E)X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & -2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & -5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

Перепишем матричное уравнение в виде системы $\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{6}x_3 & = & 0 \end{cases}$.

Третья строка является линейной комбинацией первых двух строк, поэтому, систему легко привести к виду

$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{cases}$.

Найдем общее решение системы $x_1 = \frac{16}{9}x_3$, $x_2 = \frac{7}{6}x_3$. Собственный вектор матрицы имеет вид $X = \left(\frac{16}{9}c,\ \frac{7}{6}c,\ c\right)$.

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли между выбранными странами достигается при векторе национального дохода $\left(\frac{16}{9}c,\ \frac{7}{6}c,\ c\right)$, то есть при соотношении национальных доходов $\frac{16}{9} : \frac{7}{6} : 1$ или $32 : 21 : 18$.