Глава III
Интегральное исчисление.

Введение.

Интегральное исчисление — вторая часть математического анализа. Понятие интеграла, наряду с понятие производной, является фундаментальным понятием математического анализа.

Это понятие возникло, с одной стороны, из потребности решать задачи на вычисление площади фигуры, объема тела, работы переменной силы, нахождение центра тяжести фигуры или тела и т.д. с другой — из необходимости восстанавливать функции по их производным.

В соответствии с этим возникли понятия определенного и неопределенного интегралов.

Задача дифференциального исчисления: по известной функции найти ее производную. Поставим обратную задачу: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Отыскание функции по ее производной является основной задачей интегрального исчисления.

§1. Понятие неопределенного интеграла.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, если для любого $x \in [a;\, b]$ справедливо условие $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Первообразная для функции определяется неоднозначно. Например, $(x^2)' = 2x$, $(x^2+4)' = 2x$. Следовательно, функции x^2 и x^2+4 являются первообразными для функции $2x$.

Теорема 1.1. *Если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то $F(x) + C$ также первообразная для $f(x)$ на $[a;\, b]$.*

Доказательство. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a;\, b)$. Но тогда и $(F(x) + C)' = f(x)$ на $[a;\, b]$. Значит, $F(x) + C$ также первообразная для $f(x)$ на $[a;\, b]$. □

Теорема 1.2. *Если $F(x)$ и $G(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то $G(x) - F(x) = C$.*

Доказательство. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = f(x)$ на $[a;\, b]$. Тогда $(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Значит, $G(x) - F(x) = C$ согласно условию постоянства функции. □

Следствие 1.3. *Любые две первообразные функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ связаны соотношением $G(x) = F(x) + C$.*

Определение 1.1. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом отрезке.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.1}$$

$\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подинтегральная функция, $f(x)dx$ – подинтегральное выражение.

Знак $\int$ (вытянутая буква S), введенный Лейбницем, происходит от латинского слова "Summa" (сумма), а термин интеграл, введеннй учеником Лейбница Якобом Бернулли, — от латинского слова "integralis" (целостный). По другому предположению, Якоб Бернулли произвел термин от латинского слова "integro" (восстанавливать).

Нахождение первообразной (неопределенного интеграла) называется *интегрированием.* Так как интегрирование — действие обратное дифференцированию, то проверку правильности вычисления интеграла осуществляют, вычисляя производную от найденной первообразной.

Возникает вопрос: для каких функций существует первообразная? Справедливо утверждение, что *если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, то для нее на этом промежутке первообразная существует.*

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $\qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C, \qquad \int dF(x) = F(x) + C;$

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$

Все свойства доказываются, исходя из определения неопределенного интеграла.

Запишем таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int 1\, dx = x + C;$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, если $\alpha \neq -1;$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + C;$

8. $\int a^x dx = a^x \dfrac{1}{\ln a} + C;$

9. $\int e^x dx = e^x + C;$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{array} \right. ;$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array} \right. ;$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{array} \right. ;$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin\dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C \end{array} \right. ;$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C;$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

Для проверки третьей формулы рассмотрите случаи, когда $x > 0$ и $x < 0$.

Рассмотрим механический смысл неопределенного интеграла.

Пусть задан закон зависимости скорости прямолинейного движения тела от времени $v = v(t)$. Требуется найти величину пути, пройденного телом за время t. Так как скорость тела $v(t) = s'(t)$, то задача нахождения пройденного пути сводится к задаче вычисления первообразной $s(t) = \int f(t)dt + C$. Если считать, что при $t = 0$ путь $s = 0$, то можно определить константу C.

Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла сводится к следующему. Соотношение $y' = f(x)$ показывает, что график первообразной функции (интегральная кривая) — это кривая, касательная к которой при любом значении x имеет направление, определяемое угловым коэффициентом $y' = f(x)$. Иными словами, по заданному в каждой точке кривой направлению касательной к кривой, найти саму кривую. Если одна интегральная кривая $y = F(x)$ уже построена, то любая другая кривая, полученная параллельным переносом на вектор $(0; C)$ также будет интегральной кривой. Следовательно, уравнение семейства интегральных кривых имеет вид $y = F(x) + C$.

Для того чтобы выделить одну интегральную кривую, достаточно задать на ней точку $(x_0; y_0)$. Тогда $y_0 = F(x_0)+C$ или $C = y_0-F(x_0)$. Окончательно уравнение искомой интегральной кривой имеет вид $y = F(x) + (y_0 - F(x_0))$.

Нахождение первообразных не всегда просто. Доказано, что существуют достаточно простые элементарные функции, интегралы от которых в элементарных функциях не выражаются. Например, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ — интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — интегральный косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм, $\int e^{-x^2}dx$ и другие. Доказательство этих утверждений достаточно сложно и выходит за рамки читаемого курса.

§2. Методы интегрирования.

I. **Непосредственное интегрирование** выполняется тогда, когда интеграл при помощи алгебраических преобразований сводится к сумме табличных интегралов.

II. **Внесение функции под знак фифференциала.** Пусть x — независимая переменная и $\int f(x)dx = F(x) + C$. Пусть в интеграле $\int g(x)dx$ подинтегральное выражение можно представить в виде $g(x)dx = f(u)du$, где $u = u(x)$ — некоторая дифференцируемая функция и $\int f(u)du$ является табличным. Тогда сложная функция $F(u(x))$ будет первообразной для подинтегральной функции. В самом деле, так как
$g(x)dx = f(u(x))u'(x)dx = f(u)du$, то
$(F(u(x)))'_x = F'_u(u(x)) \cdot u'(x) = f'(u(x))u'(x) = g(x)$.

Таким образом,

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = (F(u(x)) + C. \qquad (2.1)$$

Этот прием называется *подведением функции под знак дифференциала.*

Для овладения этим приемом нужно хорошее знание таблицы производных и умение применять ее в обе стороны, то есть в подинтегральном выражении находить функцию и ее производную.

Частный случай формулы подведения под знак дифференциала — линейная зависимость аргумента.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (2.2)$$

III. **Метод подстановки.** $\int f(x)dx$ можно упростить, если считать что $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая дифференцируемая функция. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ и в правой части стоит табличный интеграл.

Для доказательства этой формулы найдем производные по t от правой и левой частей равенства. Имеем
$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \cdot x'(t) = f(x) \cdot x'(t)$.
$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t) = f(x)x'(t)$.

Выражения $\int f(x)dx$ и $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ являются первообразными для одной и той же функции, а значит, по теореме 1.2 неопределенные интегралы от совпадают. Итак,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.3}$$

IV. **Интегрирование по частям.** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две дифференцируемые функции. Тогда $d(u\cdot x) = u\cdot dv + v\cdot du$ или $u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$. Следовательно,

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) называется формулой *интегрирования по частям.*

Пример 2.1. Вычислите интеграл $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1 + \sqrt{x}}{x}\,dx$.

Решение . Поделим почленно числитель на знаменатель и получим сумму табличных интегралов $\int \left(x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-1/2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + \ln x + 2\sqrt{x} + C$.

Пример 2.2. Вычислите интеграл $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

Решение . $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}2x + 1^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$.

Пример 2.3. Вычислите интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$.

Решение . $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+4}\,d(x^3+4) =$
$= \frac{1}{3}\int (x^3+4)^{1/2} d(x^3+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+4)^{3/2} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+4)^3} + C$.

Пример 2.4. Вычислите интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x}\,dx$.

Решение . $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x}\,dx = -\int \cos^{-6} x \cdot\, d(\cos x) = -\frac{1}{5}\sqrt{\cos^{-5} x} + C$.

Пример 2.5. Вычислите интеграл $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$.

Решение . $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Пример 2.6. Вычислите интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$.

Решение . $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

В примерах 2.5 и 2.6, вывели формулы табличных интегралов 12 и 13.

Пример 2.7. Вычислите интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение . Пусть $x=\sin t$, тогда $dx=\cos t dt$. Имеем $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \dfrac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \dfrac{1}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + C = \dfrac{\arcsin x}{2} + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$. (Из формулы замены переменной $x=\sin t$ следует, что $t=\arcsin x$. Кроме того $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$.)

Пример 2.8. Вычислите интеграл $\int x\ln x\,dx$.

Решение . Этот интеграл будем брать по частям.
Пусть $u=\ln x$, $dv=xdx$. Тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}$. Имеем
$\int x\ln x dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2x}\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x}{2}\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$

Пример 2.9. Вычислите интеграл $\int \sin 2x\,dx$ различными способами.

Решение . 1) По формуле (2.2) имеем
$\int \sin 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C.$
Вычислим интеграл, внося под знак дифференциала разные функции, сначала $\sin x$, а потом $\cos x$.
2) $\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin x\,d(\sin x) = \sin^2 x + C.$
3) $\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = -2\int \cos x\,d(\cos x) = -\cos^2 x + C.$
Приравняв правые части равенств 2 и 3, получим $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Найдите ошибку в рассуждениях. Докажите, что все первообразные отличаются друг от друга только на константу.

Пример 2.10. Вычислите интегралы $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Решение . Эти интегралы циклические. Взяв интеграл дважды по частям, придем к уравнению относительно этого интеграла.

Обозначим $\int e^{ax}\sin bx\,dx = I$. Интегрируем по частям.
Пусть $u=\sin bx$, $dv=e^{ax}dx$. Тогда $du=b\cos bx\,dx$, $v=\frac{1}{a}e^{ax}$. Имеем
$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Снова интегрируем по частям. Пусть $u_1=\cos bx$, $dv_1=e^{ax}dx$. Тогда $du_1=-b\sin bx\,dx$, $v_1=\frac{1}{a}e^{ax}$. Имеем
$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)$ или
$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I$.
Решая это уравнение относительно I, найдем интеграл.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}+C.$$

Аналогично выводится формула

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}+C.$$

Пример 2.11. Вычислите интеграл $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Решение . Обозначим $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=I$. Интегрируем по частям. Пусть $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $dv=dx$. Тогда $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v=x$. Имеем
$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-$
$-\int\dfrac{(x^2+a^2-a^2)\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\left(\sqrt{x^2+a^2}-\dfrac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx.$
Таким образом, $I=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.
Решая это уравнение относительно I, найдем интеграл.

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)+C.$$

Задание 2.1. Вычислите интегралы
а) $\int\dfrac{x^3-3xe^x+\sqrt{x}}{x}\,dx$; б) $\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2x\cos^2x}\,dx$; в) $\int\operatorname{ctg}^2x\,dx$.

Задание 2.2. Вычислите интегралы
а) $\int\sqrt{3x+2}\,dx$; б) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$; в) $\int(x^2-2x)\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}\,dx$.

Задание 2.3. Вычислите интегралы

а)$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\,dx$; б) $\int \frac{3x^5-6x^3+5x}{\sqrt{x^6-3x^4+5x^2-7}}\,dx$; в) $\int e^{4x}\,dx$.

Задание 2.4. Вычислите интегралы

а) $\int xe^{x^2+3}\,dx$; б) $\int (x^2-4x+1)e^{x^3-6x^2+3x-5}\,dx$; в) $\int \frac{\ln^3 x+5x^2}{x}\,dx$.

Задание 2.5. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{\sin x}{\cos^7 x}\,dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^5 x}}\,dx$; в) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 2x}\,dx$; г) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x+1}{\cos^2 x}\,dx$.

Задание 2.6. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x+x^3}{x^4+4}\,dx$; б) $\int \frac{5x+\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}\,dx$; в) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}\,dx$.

Задание 2.7. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{2x-3}}\,dx$; б) $\int \frac{16\ln^2 x}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx$; в) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$; г) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$.

Задание 2.8. Вычислите интегралы

а) $\int \sin x\sqrt{\cos^3 x}\,dx$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$; в) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$.

Задание 2.9. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x+3}}\,dx$; в) $\int \frac{6x^3+5x}{x^4+1}\,dx$; г) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Задание 2.10. Вычислите интегралы

а) $\int x\sin 2x\,dx$; б) $\int x^2e^x\,dx$; в) $\int \ln(x^2+1)\,dx$; г) $\int x\cos 2x\,dx$.

Задание 2.11. Вычислите интегралы

а) $\int 8x\sqrt{2x+5}\,dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; в) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int x^2\ln(x+3)\,dx$.

Задание 2.12. Вычислите интегралы

а) $\int (x^2-4x)e^{2x}\,dx$; б) $\int e^{x+\ln x}\,dx$; в) $\int \frac{3x+4\arccos x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

§3. Интегрирование рациональных функций.

Самый важный класс функций, интегралы от которых выражаются в элементарных функциях, это дробно-рациональные функции
$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$.

Будем считать, что дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная. Дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя $(m < n)$. Если дробь неправильная, то разделив столбиком числитель на знаменатель, выделим целую часть и правильную дробь.

Интегрирование правильных дробей основано на следующей теореме.

Теорема 3.1. *Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена, причем единственным способом, в виде суммы конечного числа простых дробей следующих четырех типов:* I. $\dfrac{A}{x-a}$*;* II. $\dfrac{B}{(x-a)^k}$*;* III. $\dfrac{Mx+n}{x^2+px+q}$*;* IV. $\dfrac{Mx+n}{(x^2+px+q)^l}$ *, где* $x^2+px+q > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$ *(квадратный трехчлен не имеет действительных корней).*

Из алгебры известно, что любой многочлен степени $n \geqslant 2$ единственным образом разлагается в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с действительными коэффициентами, не имеющих действительных корней.

$Q(x) = b_0(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$,
где $k_1 + \ldots + k_s + \dfrac{l_1 \ldots + l_r}{2} = n$.

Если $x = a$ — простой корень многочлена $Q(x)$, то в разложении $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простые дроби ему соответствует одна простая дробь $\dfrac{A}{x-a}$.

Если $x = a$ — корень кратности k $(k \geqslant 2)$ многочлена $Q(x)$, то ему в разложении соответствует сумма k простых дробей
$\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$.

Для разложения на простые дроби правильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{G(x)}$, знаменатель которой раскладывается в произведение линейных множителей $G(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, где все $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны, можно применить формулу

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{G'(a_k)(x-a_k)}.$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа.*

Если множитель x^2+px+q в разложении $Q(x)$ на множители имеет первую степень, то ему соответствует одна дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Если множитель x^2+px+q имеет степень l $(l \geqslant 2)$, то ему соответствует сумма $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\dfrac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}$.

Рассмотрим интегрирование простых дробей.

I. $\int \dfrac{A}{x-a}\,dx=\int \dfrac{A}{x-a}\,d(x-a)=A\ln|x-a|+C.$

II. Если $k\neq 1$, то $\int \dfrac{Adx}{(x-a)^k}=A\int (x-a)^{-k}dx=\dfrac{A}{1-k}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$

III. Для вычисления интеграла $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ выделим в знаменателе полный квадрат $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$. Так как $\dfrac{4q-p^2}{4}=-\dfrac{D}{4}>0$ (D — дискриминант квадратного трехчлена) обозначим $\dfrac{4q-p^2}{4}=a^2$. Введем новую переменную $t=x+\dfrac{p}{2}$. Получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{M\left(t-\dfrac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt=\int \frac{Mt}{t^2+a^2}\,dt+\int \frac{N-\dfrac{Mp}{2}}{t^2+a^2}\,dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+$$

$$+\left(\frac{2N-Mp}{2a}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

IV. Интеграл четвертого типа находится с использованием реккурентных формул. Имеем $\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}\,dx=\dfrac{M}{2}\int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}\,dx+$

$+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)\int \dfrac{dx}{(x^2+px+q)^l}\,dx=\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{1-l}\cdot\dfrac{1}{(x^2+px+q)^{l-1}}+$

$+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)I_l$, где интеграл I_l вычисляется по реккурентной формуле

$$I_l=\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l}\,dx=\frac{x+\dfrac{p}{2}}{2(l-1)\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^l}+$$

$$+\frac{2l-3}{(2(l-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\cdot I_{l-1}.$$

Таким образом, интеграл от рациональной функции есть элементарная функция, выраженная через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

Интеграл от рациональной функции находится по следующему алгоритму:

1. Если дробь неправильная, то выделяем целую часть;
2. Правильную дробь представляем в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами. Для этого знаменатель раскладываем на линейные и квадратичные (не имеющие действительных корней) множители;
3. Приводим дроби к общему знаменателю. Из равенства дробей и равенства их знаменателей следует равенство их числителей. Приравниваем числители исходной и получившейся после приведения к общему знаменателю дроби;
4. Находим неопределенные коэффициенты, с которыми дроби входят в разложение, применяя для этого понятия равенства многочленов;
5. Вычисляем интеграл от суммы простых дробей.

Пример 3.1. Вычислите интеграл $\int \frac{2x^2-x+3}{x^3+2x^2-3x}\,dx$.

Решение . Так как дробь правильная, то разложим знаменатель на множители, представим дробь в виде суммы простых дробей и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3};$$

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+2x^2-3x}=\frac{A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+3)}.$$

Приравняем числители исходной и получившейся дробей:

$A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)=2x^2-x+3.$

Неопределенные коэффициенты найдем тремя способами.

а) Применим понятие равенства многочленов в функциональной фор-

ме: два многочлена равны, если их значения совпадают при одинаковых значениях x.
Пусть $x=0$, тогда $-3A=3$ и $A=-1$;
Пусть $x=1$, тогда $4B=4$ и $B=1$;
Пусть $x=-3$, тогда $12C=24$ и $C=2$.

b) Применим понятие равенства многочленов в алгебраической форме: два многочлена равны, если коэффиенты при одинаковых степенях x совпадают. Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.
$A(x^2-2x-3)+B(x^2+3x)+C(x^2-x)=2x^2-x+3$;
$(A+B+C)x^2+(-2A+3B-C)x-3A=2x^2-x+3$;

$$\begin{cases} A+B+C & = & 2 \\ -2A+3B-C & = & -1 \\ -2A & = & 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} A & = & -1 \\ B & = & 1 \\ C & = & 2 \end{cases}.$$

c) Применим формулу Лагранжа. В нашем случае $P(x)=2x^2-x+3$, $G(x)=x^3+2x^2-3x=x(x-1)(x+3)$, $G'(x)=3x^2+4x-3$. Тогда

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+2x^2-3x}=\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+3)}=\frac{P(0)}{G'(0)x}+\frac{P(1)}{G'(1)(x-1)}+\frac{P(-3)}{G'(-3)(x+3)}=$$
$$\frac{3}{-3x}+\frac{2-1+3}{(3+4-3)(x-1)}+\frac{18+3+3}{(27-12-3)(x+2)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}.$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу суммы простых дробей и вычислим интеграл, как сумму табличных интегралов

$$\int\frac{2x^2-x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}+$$
$$+2\int\frac{dx}{x+3}=-\ln|x|+\ln|x-1|+2\ln|x+3|+C.$$

Пример 3.2. Вычислите интеграл $\int\frac{x^3-2x^2-2x+9}{x^2+x-2}\,dx$.

Решение . Дробь $\frac{x^3-2x^2-2x+9}{x^2+x-2}$ — неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Выделим целую часть дроби, разделив столбиком числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 - 2x + 9 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 \ \ + x^2 - 2x} & x - 3 \\
\quad -3x^2 \qquad\quad + 9 & \\
\quad \underline{-3x^2 - 3x + 6} & \\
\qquad\qquad 3x + 3 &
\end{array}
$$

Получившуюся после деления правильную дробь разложим на простые
$\dfrac{3x+3}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$
и приведем дроби к общему знаменателю

$A(x+2) + B(x-1) = 3x + 3.$

Из этого равенства находим, что $A = 2$, $B = 1$.

Тогда $\int \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x + 9}{x^2 + x - 2}\,dx = \int \left(x - 3 + \dfrac{3x+3}{(x-1)(x+2)} \right) dx =$
$= \int \left(x - 3 + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} \right) dx = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$

Пример 3.3. Вычислите интеграл $\int \dfrac{x-6}{x^3 - 2x^2}\,dx.$

Решение . Правильную дробь разложим на простые
$\dfrac{x-6}{x^3-2x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2}.$
Приведем дроби к общему знаменателю и, приравняв числители, найдем неизвестные коэффициенты

$Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 = x - 6.$

Пусть $x = 0$, тогда $-2B = -6$ и $B = 3$;

Пусть $x = 2$, тогда $4C = -4$ и $C = -1$;

Пусть $x = 1$, тогда $-A - B + C = -5$ и $A = 1$.

Тогда $\int \dfrac{x-6}{x^3-2x^2}\,dx = \int \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x-2} \right) dx = -\dfrac{3}{x} + \ln|x| - \ln|x-2| + C.$

Пример 3.4. Вычислите интеграл $\int \dfrac{x^2 - 6x + 14}{(x-2)(x^2 - 2x + 2)}\,dx.$

Решение . Квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 2$ не имеет действительных корней, поэтому выделим в нем полный квадрат $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1.$

Разложим правильную дробь на простые.
$\dfrac{x^2 - 6x + 14}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{M(x-1)+N}{(x-1)^2+1}.$

Приведем дроби к общему знаменателю и, приравняв числители, найдем неизвестные коэффициенты

$A(x^2 - 2x + 2) + M(x-1)(x-2) + N(x-2) = x^2 - 6x + 14,$

$(A+M)x^2 + (-2A - 3M + N)x + (2A + 2M - 2N) = x^2 - 6x + 14$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{cases} A + M & = & 1 \\ -2A + 2M + N & = & -6 \\ 2A + 2M - 2N & = & 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} A & = & 3 \\ M & = & -2 \\ N & = & -6 \end{cases}.$$

Тогда $\int \frac{x^2 - 6x + 14}{(x-2)(x^2 - 2x + 2)}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}\,dx -$
$- \int \frac{6}{(x-1)^2 + 1}\,dx = 3\ln|x-2| + \ln(x^2 - 2x + 2) - 6\,\mathrm{arctg}(x-1) + C.$

Задание 3.1. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x+2}{x^2 - 2x - 8}\,dx$; б) $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{(x+2)(x^2 - 3x + 2)}\,dx$.

Задание 3.2. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 6}{x^2 - 5x + 4}\,dx$; б) $\int \frac{x-6}{x^2 - 4x + 13}\,dx$.

Задание 3.3. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x+10}{x^2 - 4x - 12}\,dx$; б) $\int \frac{x^2 - 18x + 5}{x^2(x^2 - 4x + 3)}\,dx$.

Задание 3.4. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{2x^2 + 6x - 32}{(x-4)(x^2 + 4x + 3)}\,dx$; б) $\int \frac{5x+1}{(x-3)(x+1)^2}\,dx$.

Задание 3.5. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x^2 + x + 2}{(x-2)^2(x+1)}\,dx$; б) $\int \frac{x^2 - 3x + 8}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.

Задание 3.6. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{2x^2 + 3x + 4}{(x+2)^2(x-1)}\,dx$; б) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 10x - 11}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$.

Задание 3.7. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{4x^2 - 2x - 3}{x^4 - 3x^3}\,dx$; б) $\int \frac{8}{x^4 - x^2}\,dx$.

Задание 3.8. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{10x - 8}{(x-4)(x^2 + 16)}\,dx$; б) $\int \frac{7 - 11x}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)}\,dx$.

Задание 3.9. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{x^2+15x+26}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$; б) $\int \frac{2x^2-2x-3}{x^4+x^2}\,dx$.

Задание 3.10. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{7x-5}{x^3-4x^2+5x}\,dx$; б) $\int \frac{11x+7}{(x-3)(x^2+2x+5)}\,dx$.

Задание 3.11. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{-x^2+25x-57}{(x+2)(x^2-8x+17)}\,dx$; б) $\int \frac{16}{(x^2+1)(x^2+x)}\,dx$.

Задание 3.12. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{x^3+2x^2-4x-13}{x^2-x-6}\,dx$; б) $\int \frac{4x^2-26x+10}{x^4-6x^3+10x^2}\,dx$.

§4. Интегрирование простейших иррациональных функций.

I. Пусть $R\left(x, \sqrt[n_1]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x}\right)$ — рациональная функция от переменных x, $\sqrt[n_1]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x}$. Подстановкой $x = t^N$, где $N =$ Н.О.К.$(n_1, \ldots, n_k)$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 4.1. Вычислите интеграл $\int \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt[3]{x}-1)\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение . Сделаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5dt$. Подставим в интеграл, получим

$$I = \int \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt[3]{x}-1)\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{(t^3+2)6t^5}{(t^2-1)t^4}\,dt = 6\int \frac{(t^3+2)t}{t^2-1}\,dt.$$

Это интеграл от рациональной дроби. Выделим целую часть этой дроби, получившуюся правильную дробь представим в виде суммы простых дробей и проинтегрируем

$$I = 6\int \left(t^2+1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)dt = 2t^3+6t+6\ln|t^2-1|+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C =$$

$$2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}++6\ln|\sqrt[3]{x}-1|+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

II. Пусть $R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(ad-bc \neq 0)$ — рациональная функция от переменных x, $\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где $N =$ Н.О.К.$(n_1, \ldots, n_k)$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 4.2. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

Решение . $\int \frac{dx}{(\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.
Сделаем замену $\frac{x-2}{x-1} = t^2$. Тогда $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$, $x-2 = \frac{t^2}{1-t^2}$, $x-1 = \frac{1}{1-t^2}$ и $dx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$. Подставим в интеграл, получим
$\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int t \cdot \frac{1-t^2}{t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1} \cdot \frac{2tdt}{(1-t^2)^2} = \int 2\,dt = 2t + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.$

III. Интегрирование дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

Пафнутий Львович Чебышов в 1853 году доказал, что такой интеграл берется в элементарных функциях только в трех случаях.

а) p — целое число. При $p \geqslant 0$ интеграл берется непосредственно, при $p < 0$ — с помощью подстановки $x = t^N$, где $N =$ Н.О.К.(n, m);

б) $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Интеграл берется при помощи подстановки $a + bx^n = t^N$, где N — знаменатель числа p;

в) $\frac{m+1}{n+p}$ — целое число. Интеграл берется при помощи подстановки $a + bx^{-n} = t^N$, где N — знаменатель числа p.

Пример 4.3. Вычислите интеграл $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение . Так как $m = \frac{1}{3}\,, n = \frac{2}{3}\,, p = \frac{1}{3}$, то $\frac{m+1}{n} = 2$ — целое число. Поэтому сделаем замену $1 + 3\sqrt[3]{x^2} = t^3$.
Тогда $x = \left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{3/2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t^2 \cdot \sqrt{t^3-1}\,dt$.
Подставим в интеграл, получим
$\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^3-1}}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t^2 \cdot \sqrt{t^3-1}\,dt = \frac{1}{2}\int t^3(t^3-1)dt = \frac{t^7}{14} - \frac{t^4}{8} + C = \frac{1}{14}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^7} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^4} + C\,.$

IV. Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

При вычислении $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ нужно, выделив полный квадрат, привести интеграл к табличному.

Пример 4.4. Вычислите интеграл $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Решение . $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{(x-2+4)dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} +$
$+ \int \frac{4dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \frac{1}{2}\int (9-(x-2)^2)^{-1/2}\, d(x-2)^2 - 4\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$
$-\sqrt{9-(x-2)^2} + 4\arcsin\frac{x-2}{3} + C.$

Пример 4.5. Вычислите интеграл $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$.

Решение . $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}} = \int \frac{(x-2+4)dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} +$
$+ \int \frac{4dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = \frac{1}{2}\int ((x-2)^2+4)^{-1/2}\, dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} =$
$= \sqrt{(x-2)^2+4} + 4\ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+8}) + C.$

Задание 4.1. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\, dx$; б) $\int \frac{x-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\, dx$.

Задание 4.2. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[4]{x}}\, dx$; б) $\int \sqrt{\frac{2+x}{x-2}} \cdot \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Задание 4.3. Вычислите интегралы
а) $\int \sqrt{\frac{2+x}{x-2}} \cdot \frac{dx}{(x-2)^3}$; б) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+7}}\, dx$.

Задание 4.4. Вычислите интегралы
а) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4x+13}}\, dx$; б) $\int \frac{x+8}{\sqrt{6x-x^2-10}}\, dx$.

§5. Интегрирование тригонометрических функций.

Рассмотрим вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

I. Этот интеграл можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Выпишем основные соотношения для этой подстановки:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Однако при применении универсальной тригонометрической подстановки часто получаются достаточно сложные интегралы. Рассмотрим несколько частных видов функции $R(\sin x, \cos x)$, интегрирование которых при соответствующей замене выполняется проще.

II. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная относительно $\sin x$ (то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$). В этом случае замена $y = \cos x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки:
$$\sin x = \sqrt{1-y^2},\ x = \arccos y,\ dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

III. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная относительно $\cos x$ (то есть $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$). В этом случае замена $z = \sin x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки:
$$\cos x = \sqrt{1-z^2},\ x = \arcsin z,\ dx = \frac{dy}{\sqrt{1-z^2}}.$$

IV. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — четная относительно $\sin x$ и $\cos x$ (то есть $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$). В этом случае замена $u = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки:
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ x = \operatorname{arctg} u,\ dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

V. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m, n – четные числа, берется с применением формул понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Пример 5.1. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

Решение . Вычислим этот интеграл несколькими способами.

1. $\frac{1}{\sin x \cos^3 x}$ — функция четная относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сделаем подстановку $u = \operatorname{tg} x$. Получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \cdot \frac{\sqrt{(1+u^2)^3}}{1} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{(1+u^2)du}{u} =$$
$$= \int \left(\frac{1}{u} + u\right) du = \ln|u| + \frac{u^2}{2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| + 0,5 \operatorname{tg}^2 x + C.$$
Этот интеграл можно преобразовать, применив следствие из основного-тригонометрического тождества $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$ $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+u^2)du}{u}$.

2. $\frac{1}{\sin x \cos^3 x}$ — функция нечетная относительно $\sin x$. Сделаем подстановку $y = \cos x$. Для вычисления интеграла разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на простые дроби. Получим $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} =$
$$= \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{dy}{y^3(1-y^2)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + \frac{0,5}{1-y} - \frac{0,5}{1+y}\right) dy =$$
$$= \ln|\cos x| - 0,5\ln(1-\cos x) - 0,5\ln(1+\cos x) - \frac{0,5}{\cos^2 x} + C.$$

3. $\frac{1}{\sin x \cos^3 x}$ — функция нечетная относительно $\cos x$. Сделаем подстановку $z = \sin x$. Для вычисления интеграла разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на простые дроби. Получим
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{dz}{z(1-z^2)^2} =$$
$$= \int \left(\frac{1}{z} + \frac{0,5}{1-z} - \frac{0,5}{1+z} + \frac{0,25}{(1-z)^2} - \frac{0,25}{(1+z)^2}\right) dy =$$
$$= \ln|\sin x| - 0,5\ln(1-\sin x) - 0,5\ln(1+\sin x) - \frac{0,25}{1-\sin x} + \frac{0,25}{1+\sin x} + C.$$

Хотя все ответы отличаются друг от друга, они все правильные. Это можно проверить, если применяя тригонометрические формулы, преобразовать полученные выражения.

Задание 5.1. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$; в) $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$; г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Задание 5.2. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$; в) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$; г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Задание 5.3. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$; б) $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$; в) $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$; г) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x} dx$.

Задание 5.4. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\sin x\cos x}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\sin x\cos x}\,dx$; в) $\int \sin^4 x\,dx$; г) $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$.

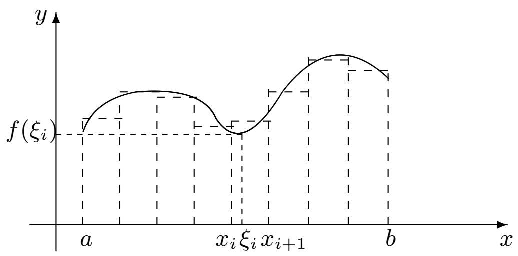
§6. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную снизу осью OX, с боков — прямыми $x=a$, $x=b$, сверху — кривой $y=f(x)$.

Поставим задачу найти площадь этой трапеции.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$. Для каждого $i=\overline{0,n-1}$ рассмотрим отрезок $[x_i;x_{i+1}]$. Длины этих отрезков $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. На каждом отрезке выберем точку $\xi_i\in[x_i;x_{i+1}]$, проведем через эту точку перпендикуляр к оси OX до пересечения с графиком функции $y=f(x)$. Длины перпендикуляров равны $f(\xi_1),f(\xi_2),\ldots,f(\xi_n)$.

На каждом участке построим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Получили ступенчатую фигуру.



Площади прямоугольников равны $S_i=f(\xi_i)\Delta x_i$. Поэтому площадь полученной ступенчатой фигуры равна $\sigma_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$.

Обозначим $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\}$. Будем увеличивать число точек деления отрезка ($n\to\infty$) так, чтобы $\lambda\to 0$.

За величину площади трапеции S принимают предел площади ступенчатой фигуры при $\lambda\to 0$.

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.1}$$

Рассмотрим площади еще двух ступенчатых фигур s_n (фигура, вписанная в трапецию) и S_n (фигура, описанная около трапеции). Имеем $s_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$, $S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(d_i)\Delta x_i$, где $f(c_i) = \min\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $f(d_i) = \max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. Тогда для данного разбиения $s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$. Кроме того при $\lambda \to 0$ $s_n \to \sigma_n$, $S_n \to \sigma_n$ и $S_n - s_n \to 0$.

Пусть функция $u = f(t)$ описывает изменение производительности труда с течением времени. Найдем объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0; T]$.

Заметим, что если $f(t) = \mathrm{const}$, то объем продукции Δu, произведенной за промежуток времени Δt вычисляется по формуле $\Delta u = f(t)\Delta t$, где $(t \in [t_0; t_0 + \Delta t])$.

В общем случае приближенное равенство $\Delta u = f(\xi)\Delta t$ $(\xi \in [t; t+\Delta t])$ тем точнее, чем меньше Δt.

Разобьем отрезок $[0; T]$ на промежутки времени точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = T$. Объем продукции, произведенной за промежуток времени $[t_i; t_{i+1}]$ равен приближенно $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\xi_i \in [t_i; t_{i+1}]$. Тогда

$$u \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta u_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i. \qquad (*)$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta t_i\}$. Если $\lambda \to 0$, то равенство (*) становится все более точным. Поэтому объем произведенной продукции

$$u = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (6.2)$$

Заметим, что выражения (6.1) и (6.2) имеют одинаковую структуру. И это не случайно.

§7. Определение определенного интеграла.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. Для каждого $i = \overline{0, n-1}$ рассмотрим отрезок $[x_i; x_{i+1}]$. Длины этих отрезков $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. На каждом отрезке выберем точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, вычислим значения функции в этих точках $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{7.1}$$

σ_n называется *интегральной суммой.*

Обозначим $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$. Будем увеличивать число точек деления отрезка ($n \to \infty$) так, чтобы $\lambda \to 0$.

Определение 7.1. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы σ_n, если он не зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек, при единственном условии $\lambda \to 0$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{7.2}$$

$f(x)$ называется *подинтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подинтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, a — *нижним пределом интегрирования*, b — *верхним пределом интегрирования.* Функция, для которой определенный интеграл существует, называется *интегрируемой.*

Рассмотрим еще две интегральные суммы s_n и S_n

$s_n = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$, $S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(d_i)\Delta x_i$,

где $f(c_i) = \min\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $f(d_i) = \max\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Суммы s_n и S_n называют *нижней суммой Дарбу* и *верхней суммой Дарбу* соответственно.

Очевидно, что для заданного разбиения $s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$. Доказано, что для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы при $\lambda \to 0$ разность $S_n - s_n \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\lambda \to 0} s_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$.

Заметим, что несмотря на сходство в названии, обозначении и терминологии неопределенный и определенный интегралы — это различные понятия. Определенный интеграл — это число, неопределенный интеграл — это семейство функций.

Не для всякой функции на заданном интервале существует определенный интеграл. Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, если выполняется одно из условий: a) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; b) $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на $[a;b]$ ($f(x)$ имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва первого рода); c) $f(x)$ определена и монотона на $[a;b]$. Из этих условий следует, что любая интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция ограничена на этом отрезке.

Из определения определенного интеграла получаем его геометрический смысл: определенный интеграл от положительной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченную снизу осью OX, с боков — прямыми $x = a$, $x = b$, сверху — кривой $y = f(x)$.

Экономический смысл определенного интеграла: если функция $u = f(t)$ описывает изменение производительности труда за промежуток времени $[0;T]$, то интеграл от функции $f(t)$ по заданному промежутку равен объему продукции, произведенной за промежуток времени $[0;T]$.

Из определения интеграла вытекает, что $\int\limits_a^b 1dx = b - a$.

§8. Свойства определенного интеграла.

1) Интеграл не зависит от буквы, которой обозначается переменная интегрирования;

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, то есть при перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак; (в самом деле, при перестановке пределов

интегрирования приращения аргумента меняет знак $\Delta x' = -\Delta x$);

4) если $c \in (a;b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;

6) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$;

7) если $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$;

8) если $a < b$ и $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$;

9) (**теорема об оценке интеграла**) если $a < b$, то
$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$;

10) если $a < b$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ (условие ограниченности функции $f(x)$ на $[a;b]$), то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$;

11) (**первая теорема о среднем**) если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то существует $\mu \in [m, M]$ такое, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$;

12) (**вторая теорема о среднем**) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что
$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$;

13) если функция $f(x)$ — нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$;

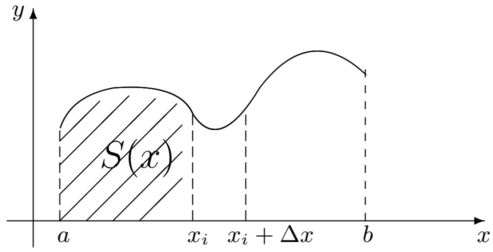
14) если функция $f(x)$ — четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

§9. Интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a;x] \subset [a;b]$. Очевидно, что различных значений x величина интеграла

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{9.1}$$

будет различной. Введенную таким образом функцию $\Phi(x)$ называют *интегралом с переменным верхним пределом.*



Геометрически, если $f(x) \geqslant 0$, функцию $\Phi(x)$ можно рассматривать как площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, построенной на отрезке $[a; x]$.

Если функция $f(t)$ непрерывна на $[a; b]$, то она непрерывна на любом отрезке $[a; x] \subset [a; b]$, поэтому $\Phi(x)$ существует для всех $x \in [a; b]$, причем $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$.

Рассмотрим свойства функции $\Phi(x)$.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функция $\Phi(x)$*

1. непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2. дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$, причем производная интеграла по верхнему пределу равна значению подинтегральной функции в точке дифференцирования, то есть

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x). \tag{9.2}$$

Доказательство. Пусть x и $x + \Delta x \in [a; b]$. Найдем приращение $\Delta\Phi(x)$: $\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Применив вторую теорему о среднем, получим $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, $c \in [x; x + \Delta x]$.

1. Докажем непрерывность функции. Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)\Delta x = 0$ (воспользовались ограниченностью непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$). По определению функция $\Phi(x)$ непрерывна.

2. Из формулы $\Delta\Phi(x) = f(c)\Delta x$ следует $f(c) = \dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$. Тогда $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$ (если $\Delta x\to 0$, то $c\to x$). $\square$

Следствие 9.2. *Любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция имеет на этом отрезке первообразную.*

§10. Формула Ньютона – Лейбница.

Вычисление определенных интегралов по определению достаточно сложно. Даже для простых функций эти вычисления приводят к длинным выкладкам и сложным доказательствам. Возникает задача — найти простой и удобный способ вычисления определенного интеграла. Поворотным моментом в развитии интегрального исчисления явилось открытие связи между неопределенными и определенными интегралами. Именно эта связь легла с основу метода вычисления определенных интегралов.

Теорема 10.1. Ньютона-Лейбница *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $F(x)$ — ее первообразная на этом отрезке, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{10.1}$$

Доказательство. Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ — первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$. По теореме 1.2 о связи первообразных функции $\Phi(x) = F(x) + C$. Так как $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C = 0$, то $C = -F(a)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) = F(b) - F(a)$. $\square$

Формулу (10.1) называют **формулой Ньютона-Лейбница**. Формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к вычислению первообразной (неопределенного интеграла). Для удобства вычислений договорились записывать явно вид первообразной, то есть писать $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

§11. Вычисление определенных интегралов.

I. **Замена переменной**.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a; b]$. Рассмотрим функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\varphi(t)$ определена и непрерывна на $[\alpha; \beta]$;
2. $\varphi(t)$ дифференцируема, $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, причем $\varphi'(t) \neq 0$;
3. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (значения функции $\varphi(t)$ заполняют отрезок $[a; b]$).

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (11.1)$$

Формулу (11.1) называют *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Доказательство. Функции $f(x)$ и $f(\varphi(t))$ непрерывны, поэтому интегралы в формуле (11.1) существуют. Докажем, что правая часть этого равенства равна его левой части.

Пусть $\int\limits_a^x f(x)dx = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Следовательно, $F'(x) = f(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Вычислим ее производную. $\Phi'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то есть $\Phi(t)$ — первообразная для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$. По формуле Ньютона-

Лейбница $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$ $\square$

Замечание 11.1. При замене переменной в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к исходной переменной.

Замечание 11.2. Обычно замену производят с помощью монотонной функции, при этом $\varphi'(t) \neq 0$.

II. **Интегрирование по частям**.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a; b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} udv = u \cdot v\,\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} vdu. \tag{11.2}$$

Для доказательства нужно применить формулу Ньютона-Лейбница к формуле интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Пример 11.1. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{24}} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Решение . Введем новую переменную $t = x^3 + 1$. Тогда $dt = 3x^2dx$. Вычислим новые пределы интегрирования: $a = 0$, значит, $\alpha = 0^3 + 1 = 1$, $b = \sqrt[3]{24}$, значит, $\beta = (\sqrt[3]{24})^3 + 1 = 25$.
Тогда $\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{24}} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{25}\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_{1}^{25} = \frac{2}{9}(\sqrt{25^3} - \sqrt{1^3}\,) = \frac{2(125-1)}{9} = \frac{248}{9}$.

Пример 11.2. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 3}{\cos^6 x}\,dx$.

Решение . Введем новую переменную $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Вычислим новые пределы интегрирования: $a = 0$, значит, $\alpha = \operatorname{tg} 0 = 0$, $b = \pi/3$, значит, $\beta = \operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3}$.

Тогда $\int\limits_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+3}{\cos^6 x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+3}{\cos^4 x}\cdot\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} (t^2+3)(t^2+1)^2\,dt =$
$= \int\limits_0^{\sqrt{3}} (t^6+5t^4+7t^2+3)\,dt = \left(\dfrac{t^7}{7}+\dfrac{5t^5}{5}+\dfrac{7t^3}{3}+3t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \dfrac{27\sqrt{3}}{7}+9\sqrt{3}+$
$7\sqrt{3}+3\sqrt{3} = \dfrac{160\sqrt{3}}{7}$.

Пример 11.3. Вычислите интеграл $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение . Этот интеграл берем по частям. Пусть $u=\ln x$, $dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=2\sqrt{x}$.

Имеем $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int\limits_1^{e^2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int\limits_1^{e^2}\dfrac{dx}{\sqrt{x}} =$
$2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^{e^2} - 4\sqrt{x}\Big|_0^{e^2} = 4e-0-4e+4=4.$

Задание 11.1. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_4^{16} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$; б) $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{\ln^3 x}{x}\,dx$; в) $\int\limits_e^{e^6} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x+3}}\,dx$; г) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^5 x}}\,dx$.

Задание 11.2. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_{-12}^{1} x\sqrt[3]{3-2x}\,dx$; б) $\int\limits_1^{9} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\sqrt[3]{5}} \dfrac{x^11}{\sqrt[3]{(x^6+2)^2}}\,dx$.

Задание 11.3. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_{1/4}^{1/2} \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$; б) $\int\limits_1^{\ln 6} \dfrac{e^x\sqrt{e^x+3}}{e^x+1}\,dx$; в) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

§12. Применение определенного интеграла для вычисления площадей фигур.

Дана фигура Ф, лежащая в плоскости XOY и ограниченная замкнутой кривой L. Рассмотрим многоугольники A, вписанные в фигуру Ф, и многоугольники B, описанные около фигуры Ф. Очевидно, что $A\subset\Phi\subset B$ и $S_A\leqslant S_\Phi\leqslant S_B$. Множество площадей многоугольников A, вписанных в Ф, ограничено сверху ($S_A<S_B\ \forall B$). Следовательно, оно имеет точную

верхнюю границу $s_* = \sup\{S_A\}$. Множество площадей многоугольников B, описанных около Φ ограничено снизу ($S_B > S_A\ \forall A$). Следовательно, оно имеет точную нижнюю границу $S_* = \inf\{S_B\}$. Очевидно, что $s_* \leqslant S_*$.

Если $s_* = S_* = S$, то их общее значение называется *площадью* фигуры Φ, а фигура Φ называется *квадрируемой*.

Свойства площади:

1) Если $\Phi_1 = \Phi_2$, то $S_{\Phi_1} = S_{\Phi_2}$ (площади равных фигур равны);

2) Если $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то $S_{\Phi_1} < S_{\Phi_2}$ (площадь части фигуры меньше площади всей фигуры);

3) Если $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, то $S_\Phi = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}$ (площадь фигуры равна сумме площадей частей).

I. Вычисление площади криволинейной трапеции.

1) Трапеция ограничена сверху кривой $y = f(x) \geqslant 0$, непрерывной на $[a; b]$, снизу — осью OX, с боков — прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{12.1}$$

2) Трапеция ограничена сверху кривой $y = f(x)$, снизу — кривой $y = g(x)$, непрерывными на $[a; b]$, с боков — прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 2). Не нарушая общности можно считать, что обе функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Этого всегда можно добиться параллельным переносом кривых по оси OY. Тогда фигуру можно представить как разность двух трапеций и ее площадь вычисляется по формуле

$$S = S_1 - S_2 = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{12.2}$$

3) Трапеция ограничена снизу кривой $y = f(x) \leqslant 0$, непрерывной на $[a; b]$, сверху — осью OX, с боков — прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.

3). Эту трапецию можно получить симметричным отображением относительно оси OX трапеции, ограниченной сверху положительной кривой $y = -f(x)$. Ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|dx = -\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{12.3}$$

4) Трапеция ограничена кривой $y = f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, осью OX, и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 4). Точками, в которых кривая пересекает ось OX, данная фигура разбивается на части Тогда площадь фигуры равна сумме площадей частей вычисляется и по формуле

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{12.4}$$

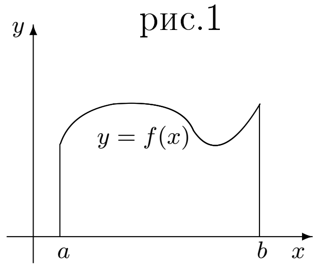


рис.1

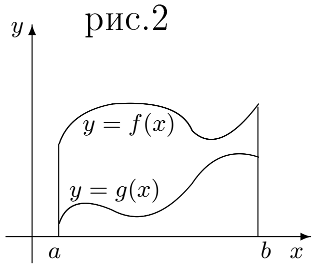


рис.2

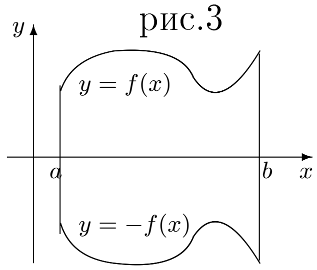


рис.3

5) Трапеция ограничена кривой $x = f(y)$, непрерывной на $[c;d]$, осью OY, и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 5). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_c^d f(y)dy. \tag{12.5}$$

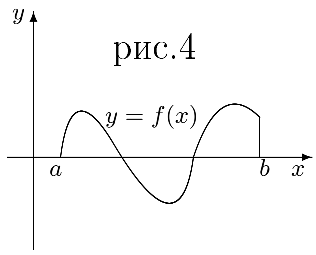


рис.4

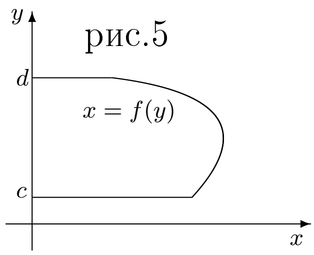


рис.5

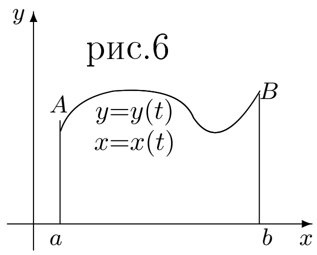


рис.6

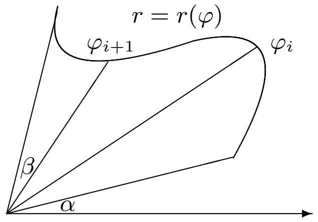
II. Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пусть кривая AB задана параметрически $\begin{cases} y &= y(t) \\ x &= x(t) \end{cases}$, причем функции $y(t)$ и $x(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$ (рис.6). По теореме об обратной функции существует функция $t = t(x)$ такая, что $y = y(t) = y(t(x)) = f(x)$ и если $t \in [\alpha;\beta]$, то $x \in [a;b]$. Произведя в интеграле (12.1) замену $x = x(t)$, получим формулу для вычисления площади фигуры, огранеиенной кривой, заданной параметрически

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \qquad (12.6)$$

Формулу (12.6) можно использовать при вычислении площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой (обход кривой в положительном направлении — при движении по кривой против часовой стрелки область остается слева).

III. Вычисление площади криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат.



Вычислим площадь фигуры, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$.

Разобьем фигуру луами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_i < \varphi_{i+1} < \ldots < \varphi_n = \beta$ на сектора. Каждый криволинейный сектор заменим круговым сектором радиуса $r_i = r(\xi_i)$, где $\varphi_i \leqslant \xi_i \leqslant \varphi_{i+1}$. Величину i-го угла обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Пусть $\lambda = \max\{\Delta\varphi_i\}$. Площадь фигуры, составленной из круговых секторов равна $\sigma = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i^2 \Delta\varphi_i$. Будем увеличивать число секторов так, чтобы $\lambda \to 0$. Тогда площадь полученной фигуры будет все меньше отличаться от площади исходной фигуры. Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \tag{12.7}$$

Пример 12.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение . Вычислим абсциссы точек пересечения заданных кривых, для чего составим систему уравнений $\begin{cases} y &= & x^3 \\ y &= & \sqrt[3]{x} \end{cases}$. Решив ее получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Строим искомую фигуру (рис. 1). Ее площадь вычисляется по формуле (12.2)
$S = \int\limits_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3) dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Пример 12.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{4}$ и прямыми $y = 8 - x$ и $y = 0$.

Решение . Заданная фигура состоит из двух частей (рис. 2). Вычислим абсциссы точек пересечения заданных кривых, для чего составим системы уравнений $\begin{cases} y &= & \frac{x^2}{4} \\ y &= & 8 - x \end{cases}$, $\begin{cases} y &= & \frac{x^2}{4} \\ y &= & 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y &= & 8 - x \\ y &= & 0 \end{cases}$. Решив их получим $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ и $x_3 = 8$. Площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \int\limits_0^4 \frac{x^2}{4} dx + \int\limits_4^8 (8 - x) dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 + (8x - \frac{x^2}{2}) \Big|_4^8 = \frac{16}{3} + 64 - 32 - 32 + 8 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Пример 12.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{(x+6)^2}{3}$ и прямой $2x - y = 12$.

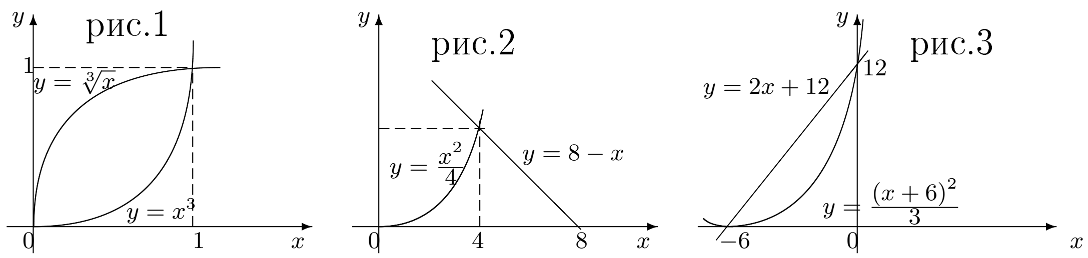
Решение . Вычислим абсциссы точек пересечения заданных кривых, для чего составим систему уравнений $\begin{cases} y &= & \frac{(x+6)^2}{3} \\ y &= & 2x + 12 \end{cases}$. Решив ее получим $x_1 = 0$ и $x_2 = -6$. Строим искомую фигуру (рис. 3). Ее площадь вычисляется по формуле (12.2)

$S = \int\limits_{-6}^{0} \left(2x + 12 - \frac{(x+6)^2}{3}\right) dx = \left(x^2 + 12x - \frac{(x+6)^3}{9}\right)\Big|_{-6}^{0} = -36 + 72 + \frac{216}{9} = 36 - 24 = 12.$

Пример 12.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой
$\begin{cases} y = 3\sin 2t \\ x = 4\sin t \end{cases}.$

Решение . Фигура симметрична относительно осей координат и начала координат (рис. 4), поэтому найдем площадь части фигуры, расположенной в 1-ой четверти и умножим на 4.

$S = 4\int\limits_{0}^{\pi/2} 3\sin 2t \cdot 4\cos t dt = 96\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin t\cos^2 t dt = -96\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 t d(\cos t) = -96\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_{0}^{\pi/2} = 0 - \frac{-96}{3} = 32.$



Пример 12.5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой
$\begin{cases} y = 9t - t^3 \\ x = t^2 - 1 \end{cases}.$

Решение . Заметим, что $x \geqslant -1$ и при замене t на $-t$ x не изменяется, а y меняет знак. Из этого следует, что фигура симметрична относительно оси OX и кривая имеет точку самопересечения, которая расположена на оси OX. Найдем эту точку. Имеем $y = 0$ при $t = 0$, $t = \pm 3$. Точка самопересечения $A(8;0)$ (рис. 5). Найдем площадь части фигуры, расположенной в верхней полуплоскости и умножим ее на 2. Площадь вычислим по формуле (12.6).

$S = 2\int\limits_{0}^{3}(9t - t^3)2t dt = 4\int\limits_{0}^{3}(9t^2 - t^4)dt = 4\left(\frac{9t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_{0}^{3} = 81 - 48,6 = 32,4.$

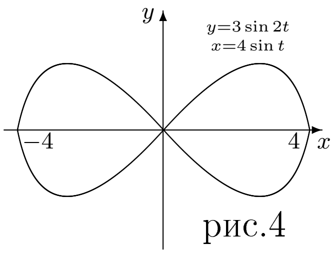


рис.4

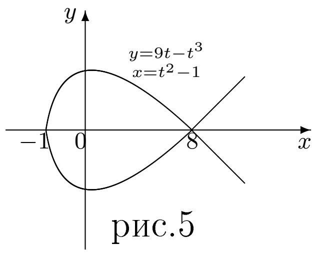


рис.5

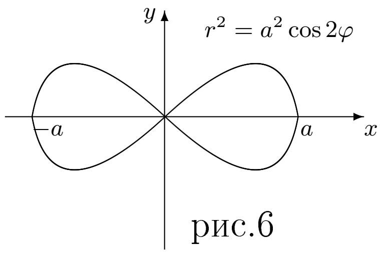


рис.6

Пример 12.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Решение . Фигура симметрична относительно осей координат и начала координат (рис. 6), поэтому найдем площадь части фигуры, расположенной в 1-ой четверти и умножим на 4. Так как $r^2 \geqslant 0$ и $a^2 \geqslant 0$, то $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Тогда $-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant 2\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$. Следовательно $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}$. Площадь вычислим по формуле (12.7).

$S = 4\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{2}a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$

Задание 12.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 2$ и прямой $y = x + 2$.

Задание 12.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x + 5$ и прямой $y = 1 - x$.

Задание 12.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 6x - 3$ и прямой $y = 7 - x$.

Задание 12.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 2x - 1$, $y = 0,5(x + 7)$.

Задание 12.5. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 4x - 2$ $y = -x^2 + 6x + 6$.

Задание 12.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x - 3)^2$, прямой $y = x + 3$ и осью OX.

Задание 12.7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 10 - 0,5x$ и осью OX.

Задание 12.8. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 8x + 15$ и осями координат.

Задание 12.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \dfrac{6}{x}$ и прямой $y = 7 - x$.

Задание 12.10. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{x^2}{2}$ и $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Задание 12.11. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \dfrac{8}{x}$ и прямыми $y = 2x$, $y = 0,5x$.

Задание 12.12. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$ и прямой $y = 1$.

Задание 12.13. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^2(4 - x)$.

Задание 12.14. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 3\cos^2 t$, $x = 4\sin^3 t$ и осью OX $(t \in [0;\, \pi])$.

Задание 12.15. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 4t + 3$, $x = t^2 + 3$ и осью OX $(t \in [1;\, 3])$.

Задание 12.16. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 5$, $x = \ln t + 1$ и осью OX $(t \in [1;\, 3])$.

Задание 12.17. Найдите площадь фигуры, ограниченной циклоидой $y = 3(t + \sin t)$, $x = 3(1 + \cos t)$.

Задание 12.18. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 + \cos\varphi)$.

Задание 12.19. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4(\cos^3\varphi\sqrt{\sin 2\varphi})$.

Задание 12.20. Найдите площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 16\cos 4\varphi$.

§13. Применение определенного интеграла для вычисления длины дуги кривой.

Пусть дана кривая AB. Разделим ее на n частей точками $A = A_0, A_1, \ldots,$ $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n = B$. Построим ломаную $A_0A_1 \ldots A_iA_{i+1} \ldots A_n$. Обозначим через λ длину самого большого звена ломаной:
$\lambda = \max\{|A_0A_1|, \ldots, |A_iA_{i+1}|, \ldots, |A_{n-1}A_n|\}$.

Конечный предел, к которому стремится длина ломаной при $\lambda \to 0$ называется длиной кривой AB. Если предел существует, то кривая называется *спрямляемой*.

Найдем длину звена A_iA_{i+1}. Если известны координаты точек, которые являются началом и концом звена $A_i(x_i; y_i)$ и $A_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$, то по теореме Пифагора $l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Тогда длина ломаной $\tilde{l} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

а) Кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Если $t \in [\alpha; \beta]$, то пара $(x(t); y(t))$ задает все точки кривой. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ — дифференцируемы. Тогда по теореме Лагранжа $\Delta x_i = x'(\tau_i)\Delta t_i,\ \Delta y_i = y'(\tau_i')\Delta t_i$, где $\tau_i, \tau_i' \in [t_i; t_{i+1}]$.

Длина ломаной $\tilde{l} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i'))^2}\ \Delta t_i$. При $\lambda \to 0$ длина ломаной приближается к длине кривой. Получаем формулу для вычисления длины дуги кривой

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt \qquad (13.1)$$

б) Кривая задана явно $y = y(x)$, и $x \in [a; b]$.

Представим, что кривая задана параметрически, положив $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$.

Применив формулу (13.1), получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\ dx \tag{13.2}$$

в) Кривая задана в полярной системе координат $r = r(\varphi)$ и $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Снова перейдем к параметрическому заданию кривой $\begin{cases} y &= r(\varphi)\cos\varphi \\ x &= r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$.

Найдем производные $y' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $x' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$ и подставим их в формулу (13.1). Применив основное тригонометрическое тождество, получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\ d\varphi \tag{13.3}$$

г) Пространственная кривая AB задана параметрически $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$,

где $t \in [\alpha; \beta]$ и функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — дифференцируемы. Проведя все рассуждения аналогично случаю а), получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 (z'(t))^2}\ dt \tag{13.4}$$

Пример 13.1. Вычислите длину дуги *астроиды* $\begin{cases} x &= 4\cos^3 t \\ y &= 4\sin^3 t \end{cases}$.

Решение . Кривая симметрична относительно осей координат и начала координат, поэтому найдем длину части кривой, расположенной в 1-ой четверти и умножим на 4. Параметр t — это угол, образуемый радиус-вектором точки с положительным направлением оси OX, следовательно, $t \in [0; \pi/2]$. Вычислим производные и найдем подинтегральную функцию $x' = -12\cos^2 t \sin t$, $y' = 12\sin^2 t \cos t$.
$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{144\cos^4 t \sin^2 t + 144\sin^4 t \cos^2 t} =$

$= 12\sin t\cos t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t} = 12\sin t\cos t.$

вычислим длину дуги кривой, лежащей в 1-ой четверти

$l_1 = \int\limits_0^{\pi/2} 12\sin t\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} 12\sin t d(\sin t) = 6\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6.$

Тогда длина всей кривой $l = 4l_1 = 24.$

Пример 13.2. Вычислите длину дуги полукубической параболы $9y^2 = x^3$ при $x \in [0; 21]$.

Решение . Кривая симметрична относительно оси OX, поэтому найдем длину части кривой, расположенной в 1-ой четверти и умножим на 2. В 1-ой четверти $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$. Тогда $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$. Длина дуги

$l_1 = \int\limits_0^{21}\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}\,dx = \int\limits_0^{21}\dfrac{\sqrt{4+x}}{2}\,dx = \dfrac{\sqrt{(4+x)^3}}{3}\Bigg|_0^{21} = \dfrac{125-8}{3} = 39.$

Длина всей кривой $l = 2l_1 = 78.$

Пример 13.3. Вычислите длину дуги кривой $r = 3\cos^6\dfrac{\varphi}{6}$.

Решение . Чтобы найти при каких значениях аргумента получается один виток кривой $r = 3\cos^6\dfrac{\varphi}{6}$, приравняем радиус 0. Имеем $\cos\dfrac{\varphi}{6} = 0$, если $\dfrac{\varphi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Таким образом, получаем $\varphi \in [-3\pi; 3\pi]$. Вычислим производную $r' = -3\cos^5\dfrac{\varphi}{6}\sin\dfrac{\varphi}{6}$ и подинтегральную функцию $\sqrt{r^2+(r')^2} = \sqrt{9\cos^{12}\dfrac{\varphi}{6}+9\cos^{10}\dfrac{\varphi}{6}\sin^2\dfrac{\varphi}{6}} = 3\cos^5\dfrac{\varphi}{6}$. Длина дуги кривой $l = \int\limits_{-3\pi}^{3\pi} 3\cos^5\dfrac{\varphi}{6}d\varphi = 18\int\limits_{-3\pi}^{3\pi}(1-\sin^2\dfrac{\varphi}{6})^2 d(\sin\dfrac{\varphi}{6}) = 18\left(\sin\dfrac{\varphi}{6} - \dfrac{2}{3}\sin^3\dfrac{\varphi}{6} + \right.$
$\left. + \dfrac{1}{5}\sin^5\dfrac{\varphi}{6}\right)\Bigg|_{-3\pi}^{3\pi} = 18\left(1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}+1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{16}{15}.$

Задание 13.1. Вычислите длину дуги кривой $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

Задание 13.2. Вычислите длину дуги кривой $y^2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x+2)^3$, если $x \in [-2;\ 5]$.

Задание 13.3. Вычислите длину дуги кривой
$y = t^3 - 4t + 4$, $x = 4\sqrt{3}t^2 + 2$, если $t \in [1;\ 3]$.

Задание 13.4. Вычислите длину дуги кривой
$y = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $x = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$, если $t \in [0;\ \pi]$.

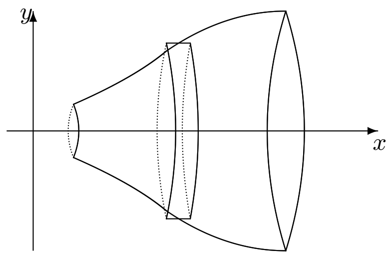
Задание 13.5. Вычислите длину дуги кривой
$y = 6\sin 2t + 2\cos 6t$, $x = 6\cos 2t - 2\sin 6t$, если $t \in [0;\ \pi]$.

Задание 13.6. Вычислите длину дуги кривой $r = 5\cos^4 \dfrac{\varphi}{4}$.

Задание 13.7. Вычислите длину дуги кривой $r = 2(1 + \sin\varphi)$.

§14. Применение определенного интеграла для вычисления объемов тел вращения.

Пусть на $[a; b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Поставим задачу найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$. Для вычисления объема этого тела найдем объем тела, составленного из круговых цилиндров.



Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. Для каждого $i = \overline{0, n-1}$ рассмотрим отрезок $[x_i; x_{i+1}]$. Длины этих отрезков $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. На каждом отрезке выберем точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, вычислим значения функции в этих точках $f(\xi_i)$. Найдем объемы цилиндров, радиусы оснований которых равен $f(\xi_i)$, а высота — Δx_i. Тогда объем ступенчатого тела равен $\tilde{V} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Обозначим $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$, Тогда объем тела вращения равен $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. По определению определенного интеграла

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx. \tag{14.1}$$

Пример 14.1. Вычислите объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг оси OX, если $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение . Согласно формуле (14.1)
$V = \pi \int\limits_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int\limits_0^2 x^4 dx = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$

Пример 14.2. Вычислите объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг оси OY, если $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение . Так как вращение происходит вокруг оси OY, то y — независимая переменная, а $x = f(y)$. Имеем $x = \sqrt{y}$ и $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$. Формула (14.1) примет вид $V = \pi \int\limits_c^d f^2(y)\, dy$. Получаем
$V = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} y dy = \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

§15. Несобственные интегралы первого рода.

В определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ ограниченная функция $f(x)$ определена на конечном отрезке $[a; b]$. Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то интеграл не является определенным. Обобщим понятие определнного интеграла на случай, когда промежуток интегрирования бесконечен.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; \infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a; A]$, то есть для любого $A > a$ существует интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на $[a; \infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\, dx. \qquad (15.1)$$

Если конечный предел определенного интеграла существует, то говорят, что несобственный интеграл (15.1) *сходится*, а если предел не существует, то говорят, что интеграл (15.1) *расходится.*

Аналогично определяем несобственные интегралы по промежуткам $(-\infty; b]$ и $(-\infty; \infty)$ соответственно

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{b} f(x)\,dx. \tag{15.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to-\infty}}\int\limits_{B}^{A} f(x)\,dx. \tag{15.3}$$

Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения*, если существует предел

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx. \tag{15.4}$$

Существуют примеры, когда интеграл сходится в смысле главного значения и расходится в обычном смысле.

Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Теорема 15.1. *Если интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *также сходится.*

Заметим, что из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ не следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Так как несобственный интеграл первого рода определяется как предел определенного интеграла, то он обладает многими свойствами определенного интеграла.

По свойствам определенного интеграла имеем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx +$ $+ \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$, поэтому интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Заметим, что само вычисление несобственного интеграла основано на его определении. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a;\infty)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_a^A = F(+\infty) - F(a), \quad (15.5)$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$. Получили обобщение *формулы Ньютона-Лейбница* на бесконечный промежуток.

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} F(x)\Big|_B^b = F(b) - F(-\infty), \quad (15.6)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} F(x)\Big|_B^A = F(+\infty) - F(-\infty), \quad (15.7)$$

Пример 15.1. Вычислите интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ $(a > 0)$.

Решение . $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln x\Big|_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln A - \ln a = +\infty.$

Пример 15.2. Вычислите интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0,\ \alpha \neq 1)$.

Решение . Имеем $I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A x^{-\alpha} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^A =$ $= \dfrac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$

Если $1 - \alpha > 0$, то $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = \infty$, то есть при $\alpha < 1$ имеем $I \to \infty$ и интеграл расходится.

Если $1-\alpha<0$, то $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha}=0$, то есть при $\alpha>1$ имеем $I=\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ и интеграл сходится.

Пример 15.3. Вычислите интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}$.

Решение . $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^A=$
$=\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}A-\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.

Пример 15.4. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}$.

Решение . $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int\limits_B^A\dfrac{xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_B^A=$
$=\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\dfrac{\ln(A^2+1)-\ln(B^2+1)}{2}=\ln\sqrt{\dfrac{A^2+1}{B^2+1}}$.
Получили неопределенность. В самом деле, если $A=2B$, то $\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\ln\sqrt{\dfrac{A^2+1}{B^2+1}}=\ln 4$; если $B=2A$, то $\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\ln\sqrt{\dfrac{A^2+1}{B^2+1}}=-\ln 4$. Следовательно, интеграл расходится.

Пример 15.5. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}$ в смысле главного значения.

Решение . $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^A\dfrac{xdx}{x^2+1}=\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-A}^A=$
$=\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\ln(A^2+1)-\ln((-A)^2+1)}{2}=0.$ Интеграл сходится.

Не всегда сходимость интеграла (15.1) можно доказать по определению или вычислить интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Для исследования сходимости интеграла применяют специальные признаки.

Теорема 15.2. 1-ый признак сравнения. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны и положительны на $[a;\infty)$ и при $x\geqslant b$ справедливо неравенство $f(x)\leqslant g(x)$.*
Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *расходится, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Теорема 15.3. 2-ый признак сравнения. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены, непрерывны и положительны на* $[a;\infty)$.
Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ $(0 < K < \infty)$*, то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

При применении признаков сравнения часто в качестве эталонной функции используют функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, сходимость которой мы уже рассмотрели

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha > 1 & \text{интеграл сходится,}\\ \alpha \leqslant 1 & \text{интеграл расходится.}\end{cases} \tag{15.8}$$

Пример 15.6. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^8+3}}\,dx$.

Решение . Применим второй признак сравнения

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^8+3}}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\cdot x\cdot\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^8+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha+1}\cdot\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^8+3}} = \frac{\pi}{2}$$

при $\alpha + 1 = \dfrac{8}{3}$. Так как $\alpha = \dfrac{5}{3} > 1$, то $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится и по второму признаку сравнения искомый интеграл также сходится.

Пример 15.7. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{\ln x}$.

Решение . Применим второй признак сравнения. Имеем $\dfrac{1}{\ln x} > \dfrac{1}{x}$. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ от меньшей функции расходится ($\alpha = 1$), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{\ln x}$ от большей функции также расходится.

Пример 15.8. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{\ln x}$.

Решение . Применим второй признак сравнения. Имеем $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ от меньшей функции расходится ($\alpha = 1$), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ от большей функции также расходится.

Задание 15.1. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$.

Задание 15.2. Исследуйте сходимость интегралов

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^3-4x^2+9}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{x^5+3x^2+5x+1}}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{13}dx}{(x^4-3x+17)^5}$.

§16. Несобственные интегралы второго рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$ и не ограничена на нем. Если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, то точку c называют *особой точкой.*

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b)$ и не ограничена в окрестности точки b, то есть $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. На любом отрезке $[a; b-\delta]$ ($\delta > 0$) функция $f(x)$ интегрируема, то есть существует $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ на $[a;b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx \qquad (16.1)$$

Если в формуле (16.1) конечный предел существует, то говорят, что интеграл *сходится*, если предел бесконечне или не существует, то говорят, что интеграл *расходится.*

Аналогично вводится несобственный интеграл от непрерывной на $(a;b]$ и неограниченной в точке a функции $f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx \qquad (16.2)$$

Если $c \in (a;b)$ — внутренняя точка промежутка и функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки c, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1\to 0}\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2\to 0}\int\limits_{c+\delta_2}^b f(x)dx \qquad (16.3)$$

Для вычисления несобственного интеграла 2-го рода также применима формула Ньютона-Лейбница. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, b — особая точка функции, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\delta} = \lim_{\delta\to 0} F(b-\delta) - F(a) = F(b) - F(a) \qquad (16.4)$$

Пример 16.1. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение . Имеем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\delta} = \lim\limits_{\delta\to 0} \arcsin(1-\delta) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 16.2. Вычислите $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

Решение . Пусть $\alpha = 1$. Имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a}dx = \lim\limits_{\delta\to 0} \ln(x-a)\Big|_{a+\delta}^b = = \ln b - \lim\limits_{\delta\to 0} \ln\delta = \infty$. Интеграл расходится.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim\limits_{\delta\to 0} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{a+\delta}^b = = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Интеграл сходится.

Пусть $\alpha > 1$. Имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}dx = \lim\limits_{\delta\to 0} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{a+\delta}^b = = \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}(1-\alpha)} - \lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{\alpha-1}(1-\alpha)} = \infty$. Интеграл расходится.

Итак получили, что

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{при} \quad \alpha \geqslant 1 \quad \text{расходится,} \\ \text{при} \quad \alpha < 1 \quad \text{сходится.} \end{cases} \tag{16.5}$$

Для исследования сходимости несобственных интегралов 2-го рода также применяют признаки сравнения.

Теорема 16.1. 1-ый признак сравнения. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны и положительны на $[a;b)$, неограничены в окрестности точки b и на $[a;b)$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant g(x)$. Если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.*

Теорема 16.2. 2-ый признак сравнения. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны и положительны на $[a;b)$ и неограничены в окрестности точки b.*
Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ $(0 < K < \infty)$, то интегралы $\int\limits_a^b g(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

В качестве функций-эталонов берут следующие функции. Если a — особая точка, то $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$. Если b — особая точка, то $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$. Сходимость интегралов от этих функций мы уже рассмотрели.

Пример 16.3. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}-\sin x}$.

Решение . Применим 2-ой признак сравнения. В качестве эталона рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sin x}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{\sqrt{x}-\sin x} =$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)} = 1$ при $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Интеграл сходится.

Пример 16.4. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

Решение . Интеграл является несобственным интегралом как 1-го, так и 2-го рода. Представим его в виде суммы двух интегралов
$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} + \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

Для несобственного интеграла 2-го рода $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ особой точкой является $x = 1$. Возьмем функцию-эталон $g(x) = \frac{1}{(x-1)^{\alpha}}$. Имеем

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}}{\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\sqrt{(x-1)(x^2-x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$. Интеграл сходится.

Для несобственного интеграла 1-го рода $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ возьмем функцию-эталон $g(x) = \frac{1}{x^{\beta}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}}{\frac{1}{x^{\beta}}} = 1$ при $\beta = \frac{3}{2}$. Интеграл сходится.

Следовательно, заданный интеграл, как сумма двух сходящихся интегралов, сходится.

Задание 16.1. Вычислите интегралы
а) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; в) $\int\limits_2^{\sqrt{13}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

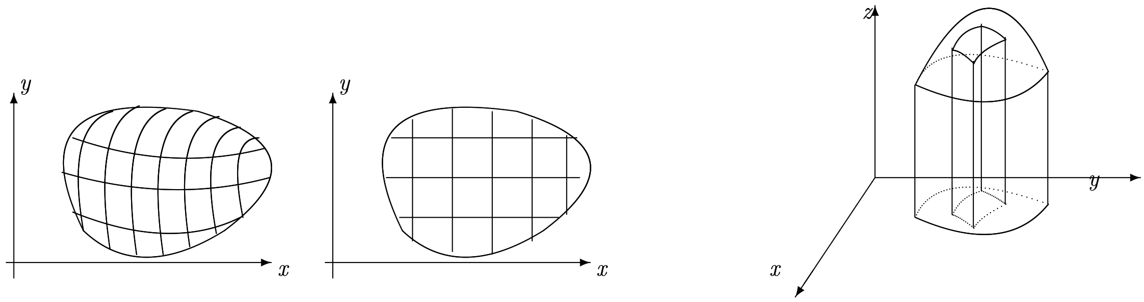
Задание 16.2. Исследуйте сходимость интегралов
а) $\int\limits_2^{5} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-16}}$; б) $\int\limits_1^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6-1}}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)^2}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x\,dx}{\sqrt{x(x+3)^5}}$.

В следующих параграфах рассмотрим некоторые вопросы, связанные с интегрированием функций нескольких переменных.

§17. Определение двойного интеграла и его свойства.

Пусть на плоскости XOY задана ограниченная область (D). Обозначим через Γ ее границу. *Диаметром* области (D) называется наибольшее расстояние между точками границы области или длина наибольшей хорды, то есть $d = \sup\limits_{A,B \in \Gamma} |AB|$.

Введем для функции двух переменных понятие интегральной суммы. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в ограниченной области $(D) \subset \mathbb{R}_2$.



Разделим область (D) сетью кривых на n частей $(D_1), (D_2), \ldots, (D_n)$. Обозначим площадь i-той части через D_i. В каждой части выберем точку $M_i(x_i; y_i)$ и подсчитаем значения функции в $f(M_i) = f(x_i, y_i)$ в этих точках. Пусть λ — наибольший диаметр областей $(D_1), (D_2), \ldots, (D_n)$. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i \tag{17.1}$$

Определение 17.1. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы σ_n, если он не зависит от способа разбиения области на части и выбора точек, при единственном условии $\lambda \to 0$.

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) dS = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i.$$

Так как предел не зависит от способа разбиения области, то мы можем разбить область на части прямыми, параллельными осям координат. Площади получившихся после разбиения прямоугольников равны $D_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Поэтому можно записать в интеграле $dS = dx \cdot dy$.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{17.2}$$

Двойной интеграл существует, если функция $z = f(x,y)$ непрерывна и ограничена.

Если $f(x,y) = 1$, то $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$. Следовательно, $\iint\limits_{(D)} 1dxdy = D$ — площадь области (D).

Так как i- слагаемое $f(x_i, y_i)D_i$ в интегральной сумме σ_n дает объем параллелепипеда, с основанием (D_i) и высотой $f(x_i, y_i)$, то геометрический смысл двойного интеграла — объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу — плоскостью XOY и с боков — цилиндрической поверхностью с направляющей кривой Γ.

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{17.3}$$

Свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_{(D)} dxdy = D$;
2. $\iint\limits_{(D)} (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$;
3. $\iint\limits_{(D)} kf(x,y)dxdy = k \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$;
4. если $D = D_1 \cup D_2$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy$;
5. если $f(x,y) \geqslant 0$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \geqslant 0$.

§18. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

В приложениях определенного интеграла рассматривалась задача вычисления объема тела вращения по его поперечным сечениям. Пусть тело (V) заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и при пересечении тела плоскостью $x = x_0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, проведенной через точку x перпендикулярно оси OX, получается фигура, имеющая площадь $S(x)$, причем функция $S(x)$ – непрерывна на $[a; b]$ (рис. 1). Тогда объем тела

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{18.1}$$

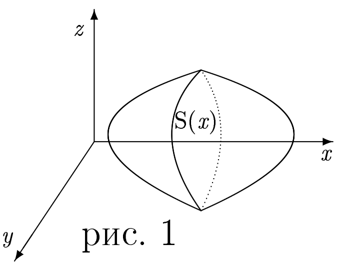


рис. 1

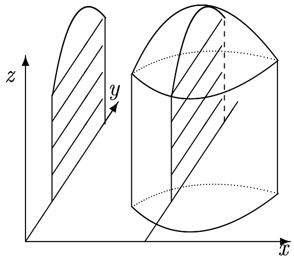


рис. 2

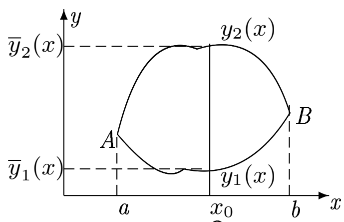


рис. 3

Применим способ сечений к вычислению объема цилиндрического бруса. Пусть дано тело (V), ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y) \geqslant$, снизу фигурой (D), лежащей в плоскости XOY и ограниченной замкнутой кривой Γ, сбоку цилиндрической поверхностью с направляющей Γ. Для простоты рассуждений будем считать, что любая прямая в плоскости XOY параллельнная осям координат пересекает кривую Γ не более чем в двух точках.

Проведем сечение тела плоскостью перпендикулярной оси OX. Абсциссы крайних точек сечения $x = a$ и $x = b$. В плоскости XOY прямые $x = a$ и $x = b$ делят контур Γ на две части (рис. 3). Пусть $y = y_1(x)$ – уравнение нижней части кривой, $y = y_2(x)$ – уравнение верхней части кривой Γ.

В сечении тела плоскостью $x = x_0$ (x_0 – произвольная точка интервала $[a; b]$) получается криволинейная трапеция (рис. 2), ее площадь обозначим $S(x_0)$. Эта трапеция ограничена сверху кривой $z = f(x_0, y)$ и $\overline{y}_1 \leqslant x \leqslant \overline{y}_2$, где $\overline{y}_1 = y_1(x_0)$, $\overline{y}_2 = y_2(x_0)$.

Так как $S(x_0) = \int\limits_{\overline{y}_1}^{\overline{y}_2} f(x_0, y)dy$, и x_0 – произвольная точка $[a; b]$, то будем иметь

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (18.2)$$

Пределы интегрирования переменные величины, зависящие от x. Подставляя выражение (18.2) в формулу (18.1), получим

$$V = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (18.3)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (18.3) называется *повторным интегралом.* Сопоставляя формулы (17.3) и (18.3), получим

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy, \qquad (18.4)$$

сводящую вычисление двойного интеграла к вычислению повторного.

Аналогично, рассматривая сечения тела (V) плоскостью $y = c$, перпендикулярной оси OY, можно доказать формулу

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \qquad (18.5)$$

Сопоставляя формулы (18.4) и (18.5), получим

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \qquad (18.6)$$

Это равенство показывает, что изменении порядка интегрирования пределы внутреннего и внешнего интегралов изменяются.

Замечание 18.1. Если область (D) – прямоугольник $[a; b] \times [c; d]$, то

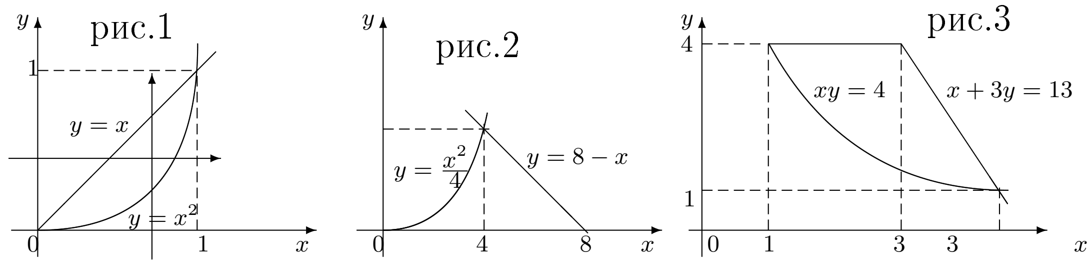
$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \qquad (18.7)$$

Замечание 18.2. Формулы (18.4) и (18.5) были выведены в предположении, что прямые $x = x_0$ и $y = y_0$ пересекают кривую Γ не более чем в двух точках. Если контур Γ более сложный, то область (D) нужно разбить на части, удовлетворяющие условию, высказанному в предположении.

Пример 18.1. Расставьте пределы в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, где область (D) ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$.

Решение . Область (D) изображена на рис. 1. Чтобы найти пределы интегрирования, определим точки пересечения кривых. Для этого составим систему уравнений $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$. Ее решением являются точки $(0;0)$ и $(1;1)$ (это легко увидеть на чертеже). Расставим пределы интегрирования.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$



Пример 18.2. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(D)} 8xydxdy$, где область (D) ограничена параболой $y = \dfrac{x^2}{4}$, прямой $y = 8 - x$ и осью OX.

Решение . Область (D), ограниченная параболой $y = \dfrac{x^2}{4}$, прямой $y = 8 - x$ и осью OX, изображена на рисунке 2. Прямая $x = 4$ делит ее на две части, и интеграл представляет собой сумму двух слагаемых. Расставим пределы интегрирования $\iint\limits_{(D)} 8xydxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{x^2/4} 8xydy + \int\limits_4^8 dx \int\limits_0^{8-x} 8xydy.$ Если внешний интеграл берется по переменной y, то интеграл будет выглядеть проще $\iint\limits_{(D)} 8xydxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{2\sqrt{y}}^{8-y} 8xydy.$

Вычисление начинаем с внутреннего интеграла

$$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{2\sqrt{y}}^{8-y} 8xydy = \int\limits_0^4 8ydy\, \frac{x^2}{2}\Bigg|_{2\sqrt{y}}^{8-y} = \int\limits_0^4 4y(64-16y+y^2-4y)dy =$$

$$\int\limits_0^4 4(y^3-20y^2+64y)dy = \left(y^4 - \frac{80y^3}{3} + 128y^2\right)\Bigg|_0^4 = 4^4 - \frac{80}{3}\cdot 4^3 - 128\cdot 4^2 =$$

$$2^8 - 2^{10}\cdot\frac{5}{3} + 2^{11} = 2^8\cdot\frac{7}{3}.$$

Пример 18.3. Переставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{4/x}^{4} f(x,y)dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_{4/y}^{13-3x} f(x,y)dy$. Вычислите площадь фигуры, заданной в этой задаче.

Решение . Границы области задаются уравнениями $xy = 4$, $y = 4$, $x+3y = 13$ (рис. 3). После перестановки пределов интеграл примет вид

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_{4/x}^{4} f(x,y)dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_{4/x}^{13-3x} f(x,y)dy = \int\limits_1^4 dy \int\limits_{4/y}^{(13-y)/3} f(x,y)dx.$$

Для вычисления площади фигуры с помощью двойного интеграла подинтегральная функция должна быть равна 1 ($f(x,y) = 1$). Имеем

$$S = \int\limits_1^4 dy \int\limits_{4/y}^{(13-y)/3} dx = \int\limits_1^4 dy\, x\Big|_{4/y}^{(13-y)/3} = \int\limits_1^4 \left(\frac{13-x}{3} - \frac{4}{y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{13x}{3} - \frac{x^2}{6} - 4\ln y\right)\Bigg|_1^4 = \frac{13(4-1)}{3} - \frac{16-1}{6} - 4(\ln 4 - \ln 1) =$$

$$= 13 - 2,5 - 8\ln 2.$$

Пример 18.4. Расставьте пределы в интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, где область (D) ограничена параболой $x = y^2$ и прямыми $y = 2x$, $x + y = 12$.

Пример 18.5. Расставьте пределы в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, где область (D) ограничена параболами $y = 0,5(x+2)^2$ и $y = -x^2-x+14$.

Пример 18.6. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(D)} x^2ydxdy$, где область (D) ограничена прямыми $y = x$, $y = 2-x$ и осью OX.

Пример 18.7. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(D)} (x^2+y)dxdy$, где область (D) ограничена параболами $y = x^2$ и $x = y^2$.

Задание 18.1. Переставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{1/x}^{2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2} f(x,y)dy.$

Задание 18.2. Переставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy.$

Задание 18.3. Переставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задание 18.4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 4$ и прямой $x + y = 2$.

Задание 18.5. Вычислите объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, плоскостью $x + y = 2$ и координатными плоскостями.

§19. Замена переменных в двойном интеграле.

§20. Определение тройного интеграла, его свойства и вычисление.

§21. Определение криволинейного интеграла первого рода, его свойства и вычисление.

§22. Определение криволинейного интеграла второго рода, его свойства и вычисление.

§23. Формула Грина.

§24. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.