Введение.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называют уравнения, связывающие в одно выражение переменную x, неизвестную функцию этой переменной $y(x)$ и ее производные: $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ и так далее. *Решением* обыкновенного дифференциального уравнения является такая функция, которая, будучи подставленной, в уравнение превращает его в тождество.

Таким образом, дифференциальные уравнения — это уравнения нового типа. Если в алгебраических уравнениях фигурировало некоторое неизвестное число (для системы уравнений — набор чисел), то в дифференциальном уравнении неизвестна уже функция.

Необходимость рассмотрения нового типа уравнений — дифференциальных обусловлена их широким распространением. Действительно, при изучении и количественном описании многих физических, химических, биологических и даже социальных явлений очень часто не удается непосредственно найти законы, описывающие тот или иной процесс. Однако легко обнаружить связь между исследуемой величиной и ее изменением (во времени или пространстве). Выписав соответствующие соотношения, как правило, получают дифференциальные уравнения.

В качестве примеров приведем несколько дифференциальных уравнений, выражающие законы.

Пример 1. Второй закон Ньютона. Этот закон математически выражается в виде дифференциального уравнения:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right),$$

здесь учтено, что сила F, вызывающая ускорение $a = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ тела массы m, в общем случае зависит от положения тела (если тело движется в каком-либо поле), его скорости (учет сопротивления движению), а также может меняться во времени.

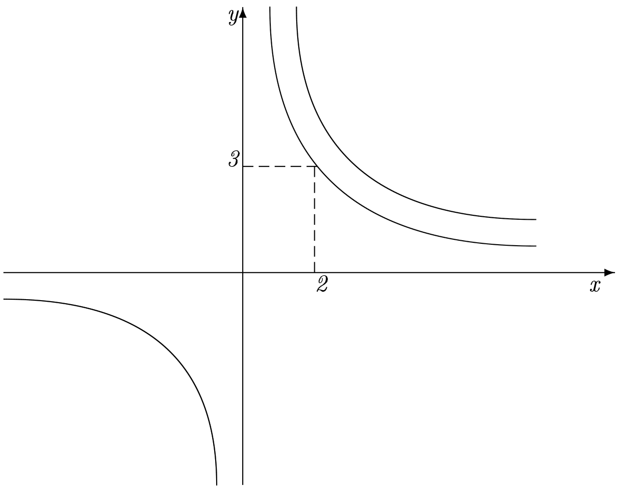
Пример 2. Уравнение радиоактивного распада. Закон радиоактивного распада хорошо известен: скорость распада (количество атомов радиоактивного элемента, распавшихся за единицу времени) $\dfrac{dx(t)}{dt}$ пропорциональна количеству радиоактивного вещества $x(t)$. Этот закон формулируется математически с помощью дифференциального уравнения: $\dfrac{dx(t)}{dt} = -kx(t)$.

Решение этого дифференциального уравнения находится достаточно просто $x(t) = e^{-kt}$. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой функции в уравнение.

Пример 3. Зависимость выручки от реализации товара $U(p)$ от цены p товара задается законом $\dfrac{d^2U(p)}{dp^2} = (4p^2 - 3)U(p)$. Решением этого уравнения является функция $U(p) = pe^{-2p^2}$.

Пример 4. Найдите уравнение кривой, зная, что отрезок, который касательная к кривой в произвольной точке отсекает на оси ординат, равен удвоенной ординате точки касания.

Пусть уравнение кривой $y = f(x)$. Тогда уравнение касательной к этой кривой в точке с координатами (;) имеет вид $Y - y = y'(x)(X - x)$. Отрезок, отсекаемый кривой на оси Y равен $Y = y - y'(x)$ (так как = 0). По условию $Y = 2y$. Получаем уравнение $y - xy' = 2y$ или $xy' + y = 0$.



Умножив обе части этого уравнения на dx, получим $xdy + ydx = 0$ или $d(xy) = 0$. Откуда = или $y = \dfrac{C}{x}$.

Дифференциальное уравнение задает семейство гипербол, асимптотами которых являются оси координат. Для выделения одной кривой необходимо задать на кривой точку. Пусть точка $(2;3)$ лежит на кривой. Значит $xy = 6$, т.е. $C = 6$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения (то есть нахождения функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению) называется *интегрированием уравнения*, а его решение часто называют *интегралом дифференциального уравнения.* Иногда найти интеграл дифференциального уравнения легко, в некоторых случаях эта процедура бывает довольно сложной, а бывает и так, что решение дифференциального уравнения найти в общем виде невозможно.

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

Разрешив его относительно производной, получим *обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной*

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

Уравнение первого порядка можно записать в *дифференциальной форме*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.3}$$

В случае, если $f(x, y) = f(x)$, то есть функция зависит только от одной переменной x, получим простейшее дифференциальное уравнения 1-го порядка $y' = f(x)$, решение которого $y = \int f(x)dx + C$ легко найти.

Решением обыкновенного дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая, будучи подставленной вместе с производной в уравнение, превращает его в тождество. Решение уравнения, полученное в виде неявной функции $\varphi(x, y) = 0$ называют *интегралом дифференциального уравнения.*

Дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений (интегралов). Для обозначения этого множества вводится понятие *общего ре-*

шения (общего интеграла) дифференциального уравнения. Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка содержит независимый параметр C. Наличие в общем решении констант связано с тем, что при решении дифференциальных уравнений выполняется интегрирование — операция, обратная дифференцированию. При интегрировании возникает константа. Между понятиями общее решение и общий интеграл принципиальных различий нет. Просто под термином решение принято понимать обычную функцию, а под термином интеграл — функцию, заданную неявно. Так сложилось исторически, и такая терминология принята во всем мире.

Определить значение константы интегрирования можно, если мы потребуем, чтобы наше решение удовлетворяло дополнительному условию, например, $y(x_0) = y_0$ (задача Коши).

График какого-либо частного решения дифференциального уравнения первого порядка (при фиксированном значении параметра $C = C_0$) задает на плоскости $(x; y)$ линию, которую называют *интегральной кривой*. При изменении значения параметра C получится другая интегральная кривая. Перебрав все возможные значения параметра C, мы получим некоторый набор интегральных кривых, который называют семейством интегральных кривых. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения первого порядка (точно так же как и его общий интеграл) задает на плоскости (x, y) семейство интегральных кривых.

§2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть в уравнении

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

функция $f(x, y)$ представима в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{2.2}$$

и его называют *уравнением с разделяющимися переменными.* Запишем дифференциал функции $y(x)$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = f_1(x) f_2(y) dx,$$

Ограничимся рассмотрением таких значений y, при которых $f_2(y) \neq 0$. Тогда, разделив обе части полученного уравнения на $f_2(y)$ и введя (для удобства) функцию $g(y) = \dfrac{1}{f_2(y)}$, получим уравнение, которое называют уравнением *с разделенными переменными*

$$g(y)dy = f_1(x)dx. \tag{2.3}$$

Действительно, если в исходном уравнении в правой части были обе переменные (и x и y), то в последнем уравнении переменная x встречается только в правой части, а переменная y — только в левой.

Так как $dy = y'(x)dx$, то обе части уравнения с разделенными переменными представляют собой дифференциалы некоторых функций. Это значит, что функция $g(y(x))y'(x)$ является производной некоторой функции (первообразной от $g(y(x))y'(x)$) и $f_1(x)$ также есть производная некоторой функции (первообразной от $f_1(x)$). Поскольку равны дифференциалы функций, то с точностью до постоянной равны и сами функции. Следовательно, можно записать следующее равенство:

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int f_1(x)dx.$$

Перейдя в интеграле правой части этого выражения к интегрированию по y, то есть сделав замену переменных, получим выражение, которое и определяет зависимость y от x.

$$\int g(y)dy = \int f_1(x)dx. \tag{2.4}$$

Пример 2.1. Решите уравнение $y' = \dfrac{xy + 4y}{y^2 - 2}$. Найдите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(3) = 1$.

Решение . Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Вынесем в правой части за скобку общий множитель и запишем производную как отношение дифференциалов $\dfrac{dy}{dx} =$

$\dfrac{y(x+4)}{y^2-2}$, разделим обе части на y^2-2 и умножим на dx. В уравнении $\dfrac{y^2-2}{y}dy = (x+4)dx$ правая часть зависит от переменной x, а левая – от y. Найдем первообразные для левой и правой частей уравнения:
$\int \frac{y^2-2}{y}dy = \int \left(y - \frac{2}{y}\right) dy = \frac{y^2}{2} - 2\ln|y|;$
$\int (x+4)dx = \frac{x^2}{2} + 4x.$
Общий интеграл имеет вид $\dfrac{y^2}{2} - 2\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + 4x + C$.

Чтобы найти частное решение, подставим начальные условия ($x = 3$, $y = 1$) в общий интеграл. Получим $\frac{1}{2} - 2\ln 1 = \frac{9}{2} + 12 + C$. Следовательно, $C = -16$ и частный интеграл имеет вид $\dfrac{y^2}{2} - 2\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + 4x - 16$.

Задание 2.1. Решите уравнение $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$.

Задание 2.2. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2}y' = (x+2)y^2$.

Задание 2.3. Решите уравнение $(x^2-3x+2)\ln^2 yy' = 3xy - 5y$.

Задание 2.4. Решите уравнение $y^2 \sin^3 xy' = \cos x\sqrt{y^3-1}$.

Задание 2.5. Решите уравнение $(2y+1)e^{x-x^2}y' = (2x-1)(y^2+1)$.

§3. Однородные уравнения.

Некоторые дифференциальные уравнения путем замены переменных или введением некоторой специальной комбинации переменных можно привести к виду уравнений с разделяющимися переменными. Одним из таких уравнений являются однородные уравнения.

Функция $f(x, y)$ называется однородной измерения k, если для любого действительного числа t выполняется условие $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$. Функция называется однородной измерения 0, если при умножении x и y на один и тот же множитель функция не меняется, т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)$. Однородную функцию нулевого измерения можно представить в виде $f(x, y) = \varphi(y/x)$.

Пример 3.1. Проверьте, что функция $f(x, y) = \dfrac{3x^3 - x^2y + 6y^3}{4x^3 - 5xy^2 + x^2y}$ является однородной нулевого измерения.

Однородные уравнения первого порядка записываются в виде

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого измерения. Сделав замену $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, $(y(x) = x \cdot z(x))$, вычислив производную $y' = z(x) + x \cdot z'(x)$ и обозначив $f(x, y) = \varphi(z)$, уравнение (3.1) можно записать в виде $z(x) + x \cdot z'(x) = \varphi(z)$, и при $\varphi(z) - z \neq 0$ получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрирование обеих частей уравнения дает

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| - \ln C.$$

(здесь, для удобства, константа интегрирования записана в виде $\ln C$). Из этого выражения можно получить функцию $x = x(z)$: $x = Ce^{\int \frac{dz}{\varphi(z) - z}}$.

Пример 3.2. Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sin^2 \dfrac{y}{x}$.

Решение . Сделаем замену $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, откуда получаем, что $y(x) = x \cdot z(x)$. Вычислим производную $y' = z(x) + x \cdot z'(x)$. Подставим y' и y в уравнение и получим $z + xz' = z + \sin^2 z$ или $x\dfrac{dz}{dx} = \sin^2 z$. Разделим переменные $\dfrac{dz}{\sin^2 z} = \dfrac{dx}{x}$ и найдем первообразные для обеих частей уравнения: $-\operatorname{ctg} z = \ln|x| - C$. Возратившись к исходным переменным, получим общий интеграл уравнения $\operatorname{ctg} \dfrac{y}{x} = C - \ln|x|$.

Задание 3.1. Решите уравнение $(y - x)ydx + x^2 dy = 0$.

Задание 3.2. Решите уравнение $y' = \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{xy - 3x^2}$.

Задание 3.3. Решите уравнение $y' = \dfrac{2x^2 - 3xy + y^2}{xy - 3x^2}$.

Задание 3.4. Решите уравнение $y' = y + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

Задание 3.5. Решите уравнение $y' = \dfrac{x^2 - 2xy + 4y^2}{3xy - 4x^2}$.

Задание 3.6. Решите уравнение $y' = \dfrac{3x^2 - 2xy + 5y^2}{x^2 + 2xy - y^2}$.

К однородным приводятся уравнения, правая часть которых зависит от линейной комбинации переменных: $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, если положить $z = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$. Можно также ввести новые переменные $u = x - \alpha$, $v = y - \beta$, причем α и β подбирают так, чтобы выражение в правой части стало однородным.

Пример 3.3. Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 3}{y - x + 1}$.

Сделаем замену $x = u - 2$, $y = v - 1$ и получим уравнение $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{u + v}{v - u}$, которое является однородным.

§4. Линейные уравнения первого порядка.

Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называют уравнения линейные (т.е. первой степени) относительно неизвестной функции и ее производной:

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции.

Если $q(x) = 0$, то уравнение (4.1) называется линейным однородным. В противном случае (когда $q(x) \neq 0$) — линейным неоднородным.

В линейном однородном уравнении переменные разделяются. Действительно, при $q(x) = 0$ перенесем слагаемое $p(x)y$ в правую часть и получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными типа уравнения (2.1), в котором $f_1(x) = p(x)$, а $f_2(y) = y$. Разделив переменные и проинтегрировав (проделайте это самостоятельно), получим

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{4.2}$$

здесь C — константа интегрирования.

Для решения неоднородного уравнения можно применить метод вариации произвольной постоянной. Будем считать, что в решении (4.2) однородного уравнения C является не константой, а функцией от x: $C(x)$. Дифференцируя выражение (4.2), получим, что

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{C(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{4.3}$$

Подставляем результат в неоднородное уравнение (4.1):

$$\frac{C(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \tag{4.4}$$

Сократив слагаемые $C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$ и умножив обе части уравнения на $e^{\int p(x)dx}$, получим уравнение для определения функции $C(x)$:

$$\frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{4.5}$$

Проинтегрировав это уравнение и подставив результат в выражение (4.2), получим решение неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка (4.1):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\tilde{C} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{4.6}$$

здесь $\tilde{C}$ не зависящая от x константа интегрирования уравнения.

Другой метод решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка заключается в том, что мы представляем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{4.7}$$

Подставляя выражение (4.7) в уравнение (4.1), приводим это уравнение к виду:

$$v(x)\left(\frac{du(x)}{dx} + p(x)u(x)\right) + \left(u(x)\frac{dv(x)}{dx} - q(x)\right) = 0 \tag{4.8}$$

Приравняв нулю каждое из выражений, стоящее в квадратных скобках (поскольку неизвестных функций у нас две, то для их определения требуется два уравнения), получим линейное однородное уравнение для функции $u(x)$:

$$\frac{du(x)}{dx} + p(x)u(x) = 0 \tag{4.9}$$

и уравнение с разделяющимися переменными для функции v(x):

$$u(x)\frac{dv(x)}{dx} - q(x) = 0. \tag{4.10}$$

Решив эти уравнения, получим полное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка, в точности совпадающее с выражением (4.6).

Отметим, что и метод вариации постоянной, и представление искомой функции в виде произведения по сути две разные формы одного и того же метода решения уравнения. Как правило, ни один из этих двух способов не дает каких-либо преимуществ, и выбирают тот способ, который больше нравится.

Пример 4.1. Решите уравнение $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-1} = \sin x$.

Решение . Решим однородное уравнение $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-1} = 0$. Перенесем второе слагаемое в правую часть $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x-1}$, разделим переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ и проинтегрируем $\ln|y| = -\ln|x-1| + \ln C$. После преобразований получим решение однородного уравнения $y_0 = \frac{C}{x-1}$. Для решения неоднородного уравнения будем считать, что C функция переменной x и будем искать решение в виде $y = \frac{C(x)}{x-1}$. Вычислим производную $y' = \frac{C'(x)(x-1) - C(x)}{(x-1)^2}$ и подставим y и y' в неоднородное уравнение. Получим $\frac{C'(x-1) - C}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^2} = \sin x$, откуда $C' = (x-1)\sin x$. Интеграл для нахождения $C(x)$ берется по частям: $u = x-1$, $dv = \sin x dx$, $du = dx$, $v = -\cos x$ и $C(x) = \int (x-1)\sin x dx = -(x-1)\cos x + \sin x + \tilde{C}$ ($\tilde{C}$ – константа интегрирования). Подставим $C(x)$ в решение. Итак, общее решение уравнения $y = \frac{-(x-1)\cos x + \sin x + \tilde{C}}{x-1}$.

Отметим, что многие дифференциальные уравнения, которые формально не являются линейными, путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Одним из распространенных способов замены поменять местами переменные x и y, т.е. искать зависимость не $y = y(x)$, а $x = x(y)$.

Пример 4.2. Решите уравнение $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x - y^2} = 0$.

Будем считать аргументом y, а функцией x. Тогда с учетом того, что

$\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$ исходное уравнение преобразуется к виду $\dfrac{dx}{dy} + x = y$. В результате получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно функции $x(y)$, интегрирование которого не представляет труда (проделайте это самостоятельно).

Рассмотрим еще один тип уравнений, который с помощью замены переменных сводится к линейным, — *уравнение Бернулли*, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{4.11}$$

которое заменой переменных $z = y^{1-n}$ сводится к линейному. Действительно, дифференцируя $z(x)$ как сложную функцию от y, находим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}(y^{1-n}) = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{4.12}$$

Разделив обе части уравнения (4.11) на y^{-n} и используя выражение (4.12), получаем для функции $z(x)$ линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x) \tag{4.13}$$

Интегрирование уравнения (4.13) дает

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\tilde{C} + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)^{1/(n-1)}. \tag{4.14}$$

Уравнение Бернулли может быть решено и представлением искомой функции в виде произведения двух функций.

Задание 4.1. Решите уравнение $y' - \dfrac{y}{x-1} = x^2$.

Задание 4.2. Решите уравнение $y' + \dfrac{y}{x+1} = e^{x^2+2x}$.

Задание 4.3. Решите уравнение $y' - \dfrac{2y}{x-3} = x - 2$.

Задание 4.4. Решите уравнение $y' - 2y \operatorname{ctg} x = \cos x$.

Задание 4.5. Решите уравнение $y' + \dfrac{y}{x+1} = \ln x$.

Задание 4.6. Решите уравнение $y' - \dfrac{y}{x+1} = \ln(x+1)$.

Задание 4.7. Решите уравнение $y' - \dfrac{2y}{x+1} = \ln x$.

Задание 4.8. Решите уравнение $y' + 2xy = 3\sqrt{2x+1}\, e^{x^2}$.

§5. Уравнения в полных дифференциалах.

Если мы рассматриваем уравнения первого порядка в дифференциальной форме

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.1}$$

то может оказаться, что его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $U(x,y)$:

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

то есть функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются частными производными функции двух переменных $U(x,y)$:

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}\,. \tag{5.2}$$

Если выполнены условия теоремы о равенстве смешанных производных, порядок взятия частных производных не влияет на результат, то есть $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$, то функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ должны удовлетворять условию:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{5.3}$$

В этом случае говорят, что уравнение (5.1) является *уравнением в полных дифференциалах.* Общий интеграл этого уравнения записывается в виде

$$U(x,y) = C, \tag{5.4}$$

а удовлетворяющий начальному условию $y(x_0) = y_0$ частный интеграл в виде

$$U(x,y) = U(x_0, y_0) \tag{5.5}$$

Найдем сначала частный интеграл уравнения (5.1), удовлетворяющий условию $y(x_0) = y_0$. Проинтегрируем, например, первое из уравнений (5.2) по x, используя при этом понятие определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y).$

При вычислении интеграла считается, что $y = \text{const}$, и интегрирование по x выполняется как от обычной функции одной переменной. Поэтому, в общем случае константа интегрирования зависит от y: $\varphi(y)$. Для нахождения функции $\varphi(y)$ воспользуемся вторым уравнением (5.2). Продифференцировав полученное выражение по y (считая при этом $x = const$), получим:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y) - N(x_0,y) + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y),$$

здесь мы воспользовались соотношением (5.3). В итоге уравнение для отыскания функции $\varphi(y)$ будет иметь простой вид $\dfrac{d\varphi(y)}{dx} = N(x_0,y)$. Важно, что левая часть полученного уравнения зависит только от переменной y (ведь x_0 — константа!). Проинтегрировав обе части уравнения по y в пределах от y_0 до y, получим

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy,$$

что позволяет записать частный интеграл уравнения (5.1) в виде

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = 0 \tag{5.4}$$

Если начать интегрирование со второго уравнения из (5.2), то совершенно аналогично можно получить, что

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = 0 \tag{5.5}$$

Отметим, что в выражении (5.4) в первом интеграле переменная y во время интегрировании по x считается параметром, а потом опять — переменной. Аналогично, в выражении (5.5) во втором интеграле переменная x при интегрировании по y считается параметром, а потом опять — переменной.

Пример 5.1. Найдите решение уравнения
$(x^2 - 3y + 2x)dx + (y - 3x + \sin y)dy = 0$, удовлетворяющее начальному

условию $y(2) = 0$.

Решение . Дано $M(x,y) = x^2 - 3y + 2x$, $N(x,y) = y - 3x + \sin y$. Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах, если выполнено условие $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Имеем $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -3$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -3$. Следовательно, задано уравнение в полных дифференциалах. Для нахождения функции $U(x,y)$ вычислим интеграл $U(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (x^2 - 3y + 2x)dx = \dfrac{x^3}{3} - 3xy + x^2 + \varphi(y)$. Найдем функцию $\varphi(y)$. Для этого найдем частную производную $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ и приравняем ее функции $N(x,y)$. Итак, $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -3x + \varphi'(y) = y - 3x + \sin y$, откуда $\varphi'(y) = y + \sin y$ и $\varphi(y) = \int (y + \sin y)dy = \dfrac{y^2}{2} - \cos y$. Общий интеграл уравнения имеет вид $U(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 3xy + x^2 + \dfrac{y^2}{2} - \cos y = C$.
Найдем частный интеграл. Подставим в общий интеграл начальные условия: $U(2,0) = \dfrac{2^3}{3} - 3\cdot 2\cdot 0 + 2^2 + \dfrac{0^2}{2} - \cos 0 = C$. Значит, $C = \dfrac{8}{3} + 4 - 1 = 5\dfrac{2}{3}$ и частный интеграл задан уравнением $\dfrac{x^3}{3} - 3xy + x^2 + \dfrac{y^2}{2} - \cos y = 5\dfrac{2}{3}$.

Задание 5.1. Найдите решение уравнения
$(2x^2 \cos y - y^2 \sin x - 1)dx + (2 - x^3 \sin y - y^2 \sin x)dy = 0$.

Задание 5.2. Найдите решение уравнения
$(\sin y + y \cos x)dx + (x \cos y + \sin x)dy = 0$.

Задание 5.3. Найдите решение уравнения
$(2x \ln y + x^2)dx + (\dfrac{x^2}{y} - 3)dy = 0$.

Задание 5.4. Найдите решение уравнения
$(x - y + 1)e^{x+y}dx + (x - y - 1)e^{x+y}dy = 0$.

§6. Теорема существования и единственности решения уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$.

При построении решений рассмотренных выше уравнений мы не обсуждали один очень важный вопрос: всегда ли можно найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию (решить задачу Коши). Если нам удалось решить задачу Коши, т.е. построить какое-либо частное решение, нельзя ли найти еще одно или несколько таких решений. В тех случаях, когда решение построено (или подобрано), актуальной остается лишь вторая часть вопроса. А если сразу не удается найти решение, то важно знать, существует ли искомое решение в принципе (ведь искать то, чего нет, занятие весьма неблагодарное). Ответ на этот очень важный вопрос дает следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка.

Теорема 6.1. *Если в дифференциальном уравнении* $y' = f(x, y)$
1. функция $f(x, y)$ *непрерывна и ограничена в некоторой области* D *плоскости* (x, y),
2. имеет в области D *ограниченную частную производную:* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, *или, что то же самое, удовлетворяет в области* D *условию Липшица:* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|$, *где* $N = \text{const} > 0$, *то для любой точки* $(x_0, y_0) \in D$ *в некотором интервале* $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x + 0 + \delta$ *существует и притом единственное решение этого уравнения* $y = y(x)$, *удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$.

Доказательство этой теоремы мы здесь приводить не будем.

Геометрический смысл теоремы достаточно прост: через каждую точку области D, в которой задано дифференциальное уравнение, обязательно проходит, причем только одна, интегральная кривая.

Если в одной или некотором подмножестве точек той области плоскости (x, y), в которой нас интересует решение дифференциального уравнения, нарушается хотя бы одно из условий теоремы 6.1, то нельзя гарантировать наличие частных решений этого уравнения, проходящих через эти точки, а если такие решения существуют, то нельзя гарантировать их единственность.

Те точки плоскости (x, y), через которые в результате нарушения условий теоремы 6.1 проходит несколько интегральных кривых, называются *особыми точками.* А те решения уравнения $y' = f(x, y)$ (интегральные кривые), каждая точка которых является особой называются *особыми* *решениями (особыми интегральными кривыми).*

Теперь мы можем дать строгое определение общего решения дифференциального уравнения: *общим решением дифференциального уравнения называют множество всех его частных решений, удовлетворяющих условиям теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.*

Отметим, что особое решение дифференциального уравнения не может быть получено из общего решения ни при каких значениях константы интегрирования C. Это особое решение (если оно существует для данного уравнения) является особой интегральной кривой.

§7. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x), \ldots$:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{7.1}$$

Если уравнение (7.1) можно привести к виду:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \tag{7.2}$$

то получим обыкновенное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной.

В общем случае уравнения (7.1) и (7.2) не эквивалентны.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, входящей в это дифференциальное уравнение.

Решением дифференциального уравнения (частным решением) на интервале $(a; b)$ называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая определена на $(a; b)$, имеет непрерывные производные и, будучи подставленной, вместе с ее производными в дифференциальное уравнение, обращает его в тождество для любого $x \in (a, b)$. *Интегралом (частным интегралом)* дифференциального уравнения называется его любое решение, заданное неявной функцией $\varphi(x, y) = 0$.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений (интегралов). Для обозначения этого множества вводится понятие *общего решения (общего интеграла)* дифференциального уравнения.

Основная задача теории дифференциальных уравнений нахождение всех решений дифференциального уравнения и описание их свойств. Однако, для приложений теории дифференциальных уравнений важное значение имеет задача, в которой ищется решение уравнения (7.1), удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что функция вместе со своими производными до $(n-1)$ порядка должна принимать в точке x_0 заданные значения (начальные условия)

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{7.3}$$

В этом случае говорят, что для дифференциального уравнения поставлена *задача Коши*. При задании начальных условий важно, чтобы количество этих условий в точности совпадало с порядком дифференциального уравнения.

Как и для уравнения первого порядка, для задачи Коши уравнения n-го порядка сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения, приводимая ниже (без доказательства).

Теорема 7.1. *Если в дифференциальном уравнении* $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ *функция* $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ *непрерывна в некоторой области* D*, имеет в области* D *по всем своим аргументам, начиная со второго, ограниченные частные производные* $\dfrac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y'}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(n-1)}}$, *то в окрестности любой точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *существует и притом единственное решение уравнения* $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, $\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Смысл сформулированной выше теоремы заключается в том, что решение задачи Коши для уравнения n-го порядка (при выполнении определенных условий) всегда существует, причем это решение единственно. Другими словами, если мы каким-то образом "угадали" решение задачи Коши, то это решение полностью исчерпывает задачу.

§8. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Простейшее дифференциальное уравнение, имеющее порядок выше первого и позволяющее понизить порядок так, что его удается проинтегрировать, имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{8.1}$$

Проинтегрировав обе части уравнения (8.1), получим уравнение, порядок которого уменьшился на единицу:
$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + (n-1)!C_n$, здесь множитель $(n-1)!$ введен для удобства.

Порядок этого уравнения может быть понижен точно так же, как это было сделано в уравнении (8.1).
$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + (n-1)!C_n x + (n-2)!C_{n-1}$.

Проделав эту процедуру n раз, мы в итоге получим следующее решение, содержащее последовательное n-кратное интегрирование функции $f(x)$:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1} + \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x)\underbrace{dx \ldots dx}_{n} \tag{8.2}$$

Пример 8.1. Решите уравнение $y''' = 12x^2 + 32\cos 2x$.

Решение . Порядок данного уравнения равен трем ($n = 3$). Поэтому получим:
$y'' = \int(12x^2 + 32\cos 2x)dx = 4x^3 + 16\sin 2x + 2C_3$,
$y' = \int(4x^3 + 16\sin 2x + 2C_2)dx = x^4 - 8\sin 2x + 2C_3 x + C_2$,
$y = \int(x^4 - 8\sin 2x + 2C_2 x + C_1)dx = 0,2x^5 - 4\cos 2x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1$.

2. Уравнение, не содержащее явно $y, y', \ldots, y^{(k)}$ также позволяет понизить порядок. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{8.3}$$

Проведя замену переменных $z(x) = y^{(k)}(x)$, получим уравнение порядка $(n-k)$ относительно функции $z(x)$. Решив его, то есть найдя явный вид функции $z(x)$, из уравнения $y^{(k)} = z(x)$ с известной правой частью найдем функцию $y(x)$.

Пример 8.2. Найдите общее решение уравнения $y''' - \dfrac{y''}{x+1} = 0$.

Решение . Сделаем замену $y'' = z(x)$. Тогда уравнение примет вид $z' - \dfrac{z}{x+1} = 0$.
Решим его: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x+1}$, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x+1}$, $\ln|z| = \ln|x+1| + \ln C_1$, $z = C_1(x+1)$. Возвращаясь к переменной y, получим $y'' = C_1(x+1)$. Откуда $y' = C_1(x^2/2 + x) + C_2$ и общее решение уравнения имеет вид $y = C_1(x^3/6 + x^2/2) + C_2x + C_3$.

3. К уравнениям, позволяющим понизить порядок, также относятся уравнения, не содержащие явно x. Рассмотрим уравнение

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{8.4}$$

В этом уравнении сделаем замену $y' = p(y)$. Тогда производная $y'(x)$ неизвестной функции $y(x)$ зависит от x неявно, и является сложной функцией от x: $y'(x) = p(y(x))$. Для второй производной от функции y справедливо равенство $y'' = \dfrac{dp(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p(y)$.

В результате такой подстановки уравнение (8.4) становится уравнением первого порядка относительно функции $p(y)$:

$$F(y, p(y), p'(y) \cdot p(y)) = 0. \tag{8.5}$$

Решив это уравнение, получим уравнение вида $y' = p(y)$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 8.3. Решите уравнение $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

Решение . Заменой $y' = p(y)$ и $y'' = p'(y) \cdot p(y)$, оно сводится к уравнению первого порядка $p(y)\dfrac{dp}{dy} + 2y(p(y))^3 = 0$, откуда $\dfrac{dp}{dy} + 2y(p(y))^2 = 0$ или $p(y) = 0$. Второе уравнение дает тривиальное решение $y = \mathrm{const}$, а первое является уравнением с разделяющимися переменными и в результате интегрирования дает $y'(x) = p(y) = \dfrac{1}{y^2 + C_1}$. Проинтегрировав в свою очередь это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения $x = y^3/3 + C_1 y + C_2$.

§9. Линейные уравнения n-го порядка.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x), \quad (9.1)$$

где $a_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ a_n(x) \neq 0)$ и $f(x)$ — заданные функции.

Если все коэффициенты $a_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и правая часть $f(x)$ — непрерывные функции аргумента x, то при любых начальных условиях решение уравнения (9.1) существует и единственно:

Теорема 9.1. *Если функции $a_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b]$, то для любых начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ существует единственное решение уравнения (9.1), определенное на $[a; b]$ и удовлетворяющее начальным условиям.*

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (9.1) называют однородным, в противном случае — неоднородным.

Часто для краткости используют символическую запись уравнения типа (9.1), вводя оператор $\mathbf{L}$:
$L[y] = a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)$
или $L[y] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x)$.

Тогда уравнение можно записать в виде

$$L[y] = 0 \qquad \text{(однородное)} \qquad (9.2)$$

$$L[y] = f(x) \qquad \text{(неоднородное)} \qquad (9.3)$$

Оператор L является линейным. В самом деле $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x))^{(k)} = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) y_1^{(k)}(x) + \beta \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) y_2^{(k)}(x) = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$.

Решения линейных уравнений обладают свойствами, которые будут в дальнейшем использоваться для построения общего решения. Сформулируем и докажем эти свойства:

Теорема 9.2. *Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнений $L[y] = f_1(x)$ и $L[y] = f_2(x)$ соответственно, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.*

Доказательство. По условию теоремы $L[y_1] = f_1(x)$ и $L[y_2] = f_2(x)$. По свойству линейного оператора имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$. □

Следствие 9.3. *Если функция $y_1(x)$ является решением уравнения $L[y] = f(x)$, а функция $y_2(x)$ является решением однородного уравнения $L[y] = 0$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения $L[y] = f(x)$.*

Следствие 9.4. *Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ являются решениями однородного уравнения $L[y] = 0$, то функция $y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_k\, y_k(x)$ также является решением этого уравнения.*

В курсе линейной алгебры мы показали, что множество определенных на $[a; b]$ функций образует линейное пространство. Множество непрерывных на $[a; b]$ функций и множество n раз дифференцируемых на $[a; b]$ функций образуют подпространства этого линейного пространства ($C[a; b]$ и $C_n[a; b]$).

Следствие 9.5. *Множество всех решений линейного дифференциального однородного уравнения образует подпространство пространства $C_n[a; b]$.*

Для изложения следующего материала понадобятся некоторые понятия линейной алгебры. Вспомним их.

Система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ называется *линейно зависимой* на отрезке $[a;b]$, если можно найти набор неравных одновременно нулю констант λ_k, таких что, для всех $x \in [a;b]$ справедливо равенство

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x) = 0 \tag{9.4}$$

Левая часть равенства (9.4) называется *линейной комбинацией* функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$. Если же для функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ такого набора неравных одновременно нулю констант λ_k не существует, то есть равенство (9.4) справедливо только при условии, что все $\lambda_k = 0$, то говорят, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ *линейно независимы.*

Приведем примеры линейно зависимых или линейно независимых систем функций:

а) Система функций $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, a при $a \neq 0$ — линейно зависима на $(-\infty; +\infty)$, так как $1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + \dfrac{-1}{a} \cdot a = 0$;

б) Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ — линейно независимы. По основной теореме алгебры многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ обращается в ноль не более чем в n точках.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.6. *Каждое линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет ровно n линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.*

Совокупность линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения называют *фундаментальной системой решений.*

Теорема 9.7. (О структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка) *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $L[y] = 0$ представляет собой линейную комбинацию его n линейно независимых частных решений (фундаментальной системы решений)*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \tag{9.5}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные (без доказательства).

Пример 9.1. Найдите общее решение уравнения $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Это уравнение имеет два линейно независимых частных решения $y_1 = x$ и $y_1 = \frac{1}{x}$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Тогда согласно теореме 9.7 общее решение имеет вид $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$.

Кстати, для двух ненулевых функций условие линейной независимости равносильно условию $\frac{y_1}{y_2} \neq \mathrm{const}$.

Теорема 9.8. (О структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка) *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка $L[y] = f(x)$ представляет собой сумму общего решения y_{OO} соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $L[y] = 0$ и любого частного решения $y_{ЧН}(x)$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ (без доказательства).*

$$y_{OН}(x) = y_{OO}(x) + y_{ЧН}(x) \tag{9.6}$$

Пример 9.2. Найдите общее решение уравнения $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено в примере 9.1 и имеет вид $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{\text{ЧН}}(x) = x^2$ (решение найдено методом подбора функции, соответствующей виду правой части).

Подобрав частное решение, мы согласно теореме 9.8 можем построить общее решение неоднородного уравнения
$y_{\text{ОН}}(x) = y_{\text{ОО}}(x) + y_{\text{ЧН}}(x) = C_1x + \frac{C_2}{x} + x^2$.

Поскольку для нахождения фундаментальной системы решений однородного уравнения важна линейная независимость функций был выведен критерий линейной независимости частных решений линейного дифференциального уравнения.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $n-1$ раз дифференцируемы (в частности $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — набор частных решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка). Построим матрицу размера $n \times n$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы называют *определителем Вронского* или *Вронскианом*

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (9.7)$$

Теорема 9.9. (О линейной зависимости системы функций). *Если система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на $(a;b)$, то определитель Вронского для этой системы на $(a;b)$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. Докажем теорему для случая $n = 3$. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ — линейно зависимы, то есть $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y2(x) + \lambda_3 y3(x) = 0$ и $\lambda_3 \neq 0$. Тогда $y_3(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $C_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}, C_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & y_3^2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) \end{vmatrix} = 0,$$

так как третий столбец — линейная комбинация первых двух. □

Из теоремы 9.9 следует, что если определитель Вронского для некоторой системы функций не равен тождественно нулю на $(a;b)$, то эта система функций линейно независима.

Задание 9.1. Докажите с помощью определителя Вронского линейную независимость каждой из систем функций.

1) 1, x, x^2, x^3;

2) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$;

3) e^{-x}, e^{2x}, e^{3x}.

Заметим, что система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ может быть линейно независимой на $(a;b)$, но определитель Вронского для этой системы функций может быть на $(a;b)$ тождественно равен нулю. Например, если

$$y_1 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases},$$

то эти функции линейно независимы, но определитель Вронского тождественно равен нулю на $\mathbb{R}$.

Теорема 9.10. (О линейной независимости решений линейного дифференциального уравнения) *Для того чтобы система частных решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $(x \in (a;b))$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского для этой системы функций не равнялся нулю ни в одной точке интервала $(a;b)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая $n = 3$. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ — линейно независимы на $[a;b]$ и являются решениями однородного уравнения $L[y] = a_3(x)y'''(x) + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$. Предположим, что существует точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $W(x_0) = 0$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1^2(x_0) & y_2^2(x_0) & y_3^2(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & y_{30} \\ y_{10}' & y_{20}' & y_{30}' \\ y_{10}^2 & y_{20}^2 & y_{30}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим систему трех линейных однородных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, коэффициентами которой служат строки из $W(x_0)$:

$$\begin{cases} y_{10}\lambda_1 + y_{20}\lambda_2 + y_{30}\lambda_3 &= 0 \\ y_{10}'\lambda_1 + y_{20}'\lambda_2 + y_{30}'\lambda_3 &= 0 \\ y_{10}''\lambda_1 + y_{20}''\lambda_2 + y_{30}''\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = W(x_0) = 0$, следовательно, она имеет ненулевое решение $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3$. Образуем с его помощью функцию $\overline{y} =$

$\overline{\lambda}_1 y_1 + \overline{\lambda}_2 y_2 + \overline{\lambda}_3 y_3$. Функция $\overline{y}$ — решение уравнения $L[y] = 0$. Тогда

$$\begin{array}{rcccl} \overline{y}(x_0) & = & \overline{\lambda}_1 y_{10} + \overline{\lambda}_2 y_{20} + \overline{\lambda}_3 y_{30} & = & 0 \\ \overline{y}'(x_0) & = & \overline{\lambda}_1 y'_{10} + \overline{\lambda}_2 y'_{20} + \overline{\lambda}_3 y'_{30} & = & 0 \\ \overline{y}''(x_0) & = & \overline{\lambda}_1 y''_{10} + \overline{\lambda}_2 y''_{20} + \overline{\lambda}_3 y''_{30} & = & 0 \end{array}.$$

Таким образом, решение $\overline{y}$ удовлетворяет нулевой системе начальных условий. Но этой же системе начальных условий удовлетворяет функция $y \equiv 0$. По теореме о существовании и единственности решений получаем, что $\overline{y} = \overline{\lambda}_1 y_1 + \overline{\lambda}_2 y_2 + \overline{\lambda}_3 y_3 \equiv 0$, но не все коэффициенты равны нулю. Противоречие с линейной независимостью системы функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$. □

§10. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \qquad (10.1)$$

где a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a_n \neq 0$) — некоторые числа, а $f(x)$ — заданная функция. Не нарушая общности рассмотрения, поскольку $a_n \neq 0$ можно считать, что $a_n = 1$, то есть разделить обе части уравнения (10.1) на a_n.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называют *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Введем оператор $\mathbf{L}$: $L[y] = y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x)$.

Тогда уравнение можно записать в виде

$$L[y] = 0 \qquad \text{(однородное)}$$

$$L[y] = f(x) \qquad \text{(неоднородное)}$$

Поскольку уравнение $L[y] = 0$ есть частный случай более общего уравнения (9.1), для него справедливы теоремы 9.7 и 9.8 о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, и его решение находится как линейная комбинация соответствующих частных решений. Вид уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{10.2}$$

показывает, что его частные решения нужно искать среди таких функций, которые в алгебраическом смысле подобны своим производным. Таким свойством обладает, в частности, показательная функция. Поэтому для построения фундаментальной системы решений однородного уравнения частные решения будем искать в виде

$$y(x) = e^{kx}. \tag{10.3}$$

Так как $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то подставив производные в уравнение (10.2), получим

$L[y] = k^n e^{kx} + a_{n-1}k^{n-1}e^{kx} + \ldots + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx}$, или

$e^{kx}(k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_1 k + a_0) = 0$.

Сократив последнее выражение на e^{kx}, получим *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_1 k + a_0 = 0. \tag{10.4}$$

Находим его корни, которых для уравнения n-го порядка (с учетом их кратности) будет ровно $n : k_1, k_2, \ldots, k_n$. Имеет место следующая

Теорема 10.1. *Функция $y(x) = e^{kx}$ является решением линейного однородного уравнения (10.2) тогда и только тогда, когда число k является корнем характеристического уравнения (10.4).*

Рассмотрим все возможные значения корней уравнения (10.4):

I. Все корни характеристического уравнения (10.4) действительны и различны. Тогда фундаментальная система решений уравнения (10.2) представляет собой набор экспонент $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$. Эти решения линейно независимы, (доказательство проведем для случая $n = 3$) так как

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} e^{k_2 x} e^{k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ k_1^2 & k_2^2 - k_1^2 & k_3^2 - k_1^2 \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x} \begin{vmatrix} k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ k_2^2 - k_1^2 & k_3^2 - k_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_2 + k_1 & k_3 + k_1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \neq 0.$$

В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{k_x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{10.5}$$

Пример 10.1. Найдите общее решение уравнения $y''' - 5y'' - 24y' = 0$.

Решение . Составим характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 - 24k = 0$. Оно имеет три различных корня $k_1 = 0$, $k_2 = -3$, $k_3 = 8$. Соответствующие этим корням частные решения $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-3x}$, $y_3 = e^{8x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{8x}$.

II. Все корни характеристического уравнения (10.4) действительны, но уравнение имеет равные корни (корень k_1 имеет кратность r). Рассмотрим сначала случай, когда для уравнения (10.4) кратность r имеет корень $k_1 = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_r k^r = 0,$$

а само дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_r y^{(r)} = 0,$$

не содержит функцию и ее производные порядка меньше r. Такому уравнению удовлетворяют все функции, у которых производные порядка r и выше равны нулю. Это условие выполняется для функций $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $\ldots, y_r = x^{r-1}$, которые линейно независимы (многочлен $C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1}$ имеет не более r корней). Общее решение уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1} + C_r e^{k_r x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \tag{10.6}$$

Можно также доказать, что если $k \neq 0$ — корень характеристического уравнения кратности r, то фундаментальная система решений уравнения (10.2) вместо r экспонент с одинаковыми показателями содержит следующие r линейно независимых функций:

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx},\ \dots, y_r = x^{r-1}e^{kx}$$

и его общее решение имеет вид:

$$y_0 = (C_1 + C_2x + \ldots + C_rx^{r-1})e^{kx} + \ldots + e^{k_nx} \tag{10.7}$$

Пример 10.2. Найдите общее решение уравнения $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 3y''' = 0$.

Решение . Составим характеристическое уравнение $k^5 - 4k^2 + 3k^3 = 0$. Оно имеет корни $k_{1,2,3} = 0$ (кратности 3), $k_4 = 1$, $k_5 = 3$. Соответствующие им частные решения $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$, $y_3 = x^2e^{0x} = x^2$, $y_4 = e^x$, $y_5 = e^{3x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5e^{3x}$.

III. Если характеристическое уравнение (10.4) с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$, то комплексно сопряженное число $\alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения, и в фундаментальной системе решений уравнения (10.2) этим корням соответствует пара функций $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Тогда функции $\tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ и $\tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}$ также являются решениями уравнения (10.2). Применив формулы Эйлера $\left(\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)$, получим

$$\begin{matrix} \tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = \dfrac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} - e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}. \tag{10.8}$$

Функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ линейно независимы и в общем решении уравнения им будут соответствовать слагаемые

$$y_0 = \ldots + (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x} + \ldots \tag{10.9}$$

Пример 10.3. Найдите общее решение уравнения $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

Решение . Характеристическое уравнение $k^3 + 4k^2 + 13k = 0$ имеет три корня — один действительный и пару комплексно-сопряженных: $k_1 = 0$ и $k_{2,3} = -2 \pm 3i$. Поэтому общее решение записывается в виде $y = C_1 + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)e^{-2x}$.

IV. Если же комплексно-сопряженные корни вида $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (10.4) имеют кратность r, то в фундаментальной системе уравнения (10.2) этим корням соответствуют линейно независимые функции:

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x & xe^{\alpha x}\cos\beta x & \ldots & x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x & xe^{\alpha x}\sin\beta x & \ldots & x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}. \tag{10.10}$$

а их линейная комбинация (вместе с остальными $n-2r$ функциями фундаментальной системы) составит общее решение уравнения (10.2).

Пример 10.4. Найдите общее решение уравнения $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Решение . Характеристическое уравнение $k^6 + 8k^4 + 16k^2 = 0$ имеет шесть корней — действительные $k_{1,2} = 0$ и комплексно-сопряженные $k_{3,4} = 2i$, $k_{5,6} = -2i$, кратности 2. Поэтому общее решение записывается в виде $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)\cos 2x + (C_5 + C_6x)\sin 2x$.

Все рассмотренные возможные случаи значений корней характеристического уравнения сведем в таблицу.

Таблица 1

Вид общих решений линейных однородных дифференциальных уравнений $y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1y'(x)+a_0y(x)=0$ **с постоянными коэффициентами**

Корни характеристического уравнения $k^n+a_{n-1}k^{n-1}+a_1k+a_0=0$	Вид общего решения
все корни характеристического уравнения действительны и различны	$y_0=C_1e^{k_x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$
$k=0$ — корень характеристического уравнения кратности r	$y_0=C_1+C_2x+\ldots+C_rx^{r-1}+\ldots+C_ne^{k_nx}$
$k\neq 0$ — корень характеристического уравнения кратности r	$y_0=(C_1+C_2x+\ldots+C_rx^{r-1})e^{kx}+\ldots+C_ne^{k_nx}$
характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\alpha\pm i\beta$	$y_0=\ldots+(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}+\ldots$
характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\alpha\pm i\beta$ кратности r	$y_0=\ldots+\sum\limits_{m=0}^{r-1}(C_{1m}x^m\cos\beta x+C_{2m}x^m\sin\beta x)e^{\alpha x}+\ldots$

Задание 10.1. Найдите общие решения уравнений
а) $y''+5y'-14y=0$; б) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

Задание 10.2. Найдите общие решения уравнений
а) $y''-5y'-6y=0$; б) $y'''-2y''-5y'+6y=0$.

Задание 10.3. Найдите общие решения уравнений
а) $y'''-2y''+y'=0$; б) $y^{(4)}-6y'''+9y''=0$.

Задание 10.4. Найдите общие решения уравнений
а) $y'''-y''-y'+y=0$; б) $y'''-6y''+12y'-8y=0$.

Задание 10.5. Найдите общие решения уравнений а) $y''' - 4y'' + 20y' = 0$; б) $y^{(4)} - 16y = 0$.

Задание 10.6. Найдите общие решения уравнений
а) $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$; б) $y^{(5)} + 8y^{(4)} + 17y''' = 0$.

§11. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

При построении общего решения неоднородного уравнения $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$ нам в соответствии с теоремой 9.8 кроме общего решения соответствующего однородного уравнения необходимо найти какое-либо частное решение неоднородного уравнения. В соответствии с теоремой 9.2 мы можем разбивать правую часть линейного неоднородного уравнения на отдельные слагаемые, находить для таких правых частей частные решения, а затем, сложив их, получать искомое частное решение линейного неоднородного уравнения.

Для некоторых видов функции $f(x)$, стоящей в правой части неоднородного уравнения, частные решения можно находить методом подбора, задавая частное решения "пробной" функцией, например, в виде многочлена с коэффициентами, определяемыми при подстановке в уравнение, или в виде показательной или тригонометрических функций, параметры которых также определяются при их подстановке в уравнение.

Теорема 11.1. (О виде частного решения линейного неоднородного уравнения со специальной правой частью) *Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $L[y] = f(x)$, где $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$ имеет вид $y(x) = e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)x^r$, $(k = \max\{m, l\})$, r — кратность корня $\alpha + i\beta$).*

Частные случаи этих функций, составляющих правые части линейных неоднородных уравнений, собраны в таблице 2, в которой использованы следующие обозначения: $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены с заданными коэффициентами степеней m и l соответственно; $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ — многочлены степени k с коэффициентами, определяемыми при подстановке в уравнение ($k = \max\{m, l\}$).

В этой же таблице даны правила подбора "пробной" функции.

Описанный выше метод подбора частных решений требует особой аккуратности, когда правая часть неоднородного уравнения представляет собой показательную или тригонометрическую функцию типа синус или косинус. При совпадении корней характеристического уравнения с соответствующими параметрами этих функций "пробную" функцию необходимо умножать на x^r, причем показатель степени зависит от кратности соответствующего корня.

Таблица 2

Вид частных решений линейного неоднородного уравнения $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$ с постоянными коэффициентами для правых частей особого вида

Вид правой части	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения (то есть $a_0 \neq 0$)	$\tilde{P}_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\tilde{P}_k(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\tilde{P}_k(x)e^{\alpha x}$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x$	Число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$	Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
	Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)x^r$

Пример 11.1. Найдите общее решение однородного уравнения
$y''' - 6y'' + 8y' = 0$.

Решение . Характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 8k = 0$ имеет три корня $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$. Поэтому общее решение записывается в виде $y_0 = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}$.

Пример 11.2. Найдите частное решение неоднородного уравнения
$y''' - 6y'' + 8y' = (15x - 8)e^{-x}$.

Решение . Так как $k = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y(x) = (Ax+B)e^{-x}$. Найдем производные $y' = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} =$

$(-Ax-B+A)e^{-x}$, $y''=-Ae^{-x}+(Ax+B-A)e^{-x}=(Ax+B-2A)e^{-x}$, $y'''=Ae^{-x}-(Ax+B-2A)e^{-x}=(-Ax-B+3A)e^{-x}$. Подставив функцию $y(x)$ и ее производные в исходное уравнение, получим уравнение
$(-Ax-B+3A)e^{-x}-6(Ax+B-2A)e^{-x}+8(-Ax-B+A)e^{-x}=(15x-8)e^{-x}$. Сократим обе части уравнения на e^{-x} и приведем подобные. Имеем $-15Ax-15B+23A=15x-8$. Это равенство превращается в тождество, если

$$\begin{cases} -15A & & = & 15 \\ 23A & - & 15B & = & 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A & = & -1,8 \\ B & = & -1 \end{cases}.$$

Теперь можно записать искомое частное решение $y(x)=-(x+1)e^{-x}$.

Пример 11.3. Найдите частное решение неоднородного уравнения
$y'''-6y''+8y'=12x^2-2x+7$.

Решение . Так как $k=0$ является корнем характеристического уравнения, то будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=(Ax^2+Bx+C)x=Ax^3+Bx^2+Cx$. Найдем производные $y'=3Ax^2+2Bx+C$, $y''=6Ax+2B$, $y'''=6A$. Подставив функцию $y(x)$ и ее производные в исходное уравнение, получим уравнение
$6A-6(6Ax+2B)+8(3Ax^2+2Bx+C)=12x^2-2x+7$. Раскроем скобки и соберем коэффициенты при одинаковых степенях x:
$8Ax^2+(-36A+16B)x+(6A-12B+8C)=12x^2-2x+7$. Это равенство превращается в тождество, если

$$\begin{cases} 8A & = & 16 \\ -36A+16B & = & -2 \\ 6A-12B+8C & = & 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A & = & 0,5 \\ B & = & 1 \\ C & = & 2 \end{cases}$$

Теперь можно записать частное решение $y(x)=-0,5x^3+x^2+2x$.

Пример 11.4. Найдите частное решение неоднородного уравнения
$y'''-6y''+8y'=17\cos x$.

Решение . Так как $k=i$ не является корнем характеристического уравнения, то будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y(x)=A\cos x+B\sin x$. Найдем производные $y'=-A\sin x+B\cos x$, $y''=-A\cos x-B\sin x$, $y'''=A\sin x-B\cos x$. Подставив функцию $y(x)$

и ее производные в исходное уравнение, получим уравнение
$(A\sin x - B\cos x - 6(-A\cos x - B\sin x) + 8(-A\sin x + B\cos x) = 17\cos x$.
Раскроем скобки и соберем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Имеем $(-7A + 6B)\sin x + (6A + 7B)\cos x = 17\cos x$. Это равенство превращается в тождество, если

$$\begin{cases} -7A + 6B &= 0 \\ 6A + 7B &= 17 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A &= 1,2 \\ B &= 1,4 \end{cases}.$$

Теперь можно записать частное решение $y(x) = 1,2\sin x + 1,4\cos x$.

Пример 11.5. Найдите общее решение уравнения
$y''' - 6y'' + 8y' = (x+1)e^{-x} + 17\cos x$.

Решение . В примере 11.1 найдено общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}$. Правую часть представим в виде суммы двух функций $f_1(x) = (x+1)e^{-x}$ и $f_2(x) = 17\cos x$. Воспользовавшись теоремой 9.2 и результатами примеров 11.2 и 11.4, запишем искомое частное решение в виде суммы найденных решений
$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x} + -(x+1)e^{-x} + 1,2\sin x + 1,4\cos x$.

Задание 11.1. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'' - 3y' + 2y = (5 - 2x)e^x$.

Задание 11.2. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'' - y' - y = 2x^2 - 8x - 1$.

Задание 11.3. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'' - y' - y = (6x - 4)e^{2x}$.

Задание 11.4. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'' - y'' - y = 5\cos x$.

Задание 11.5. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y''' - 3y'' + 2y' = 12x^2 - 24x - 11$.

Задание 11.6. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'' + y' - 6y = 16\cos 2x - 28\sin 2x$.

Задание 11.7. Найдите общее решение неоднородного уравнения
$y'''' - 2y''' + y'' = 2x^2 - 8x - 1$.

Задание 11.8. Найдите общее решение неоднородного уравнения $y''' - 4y'' - 5y' = 5x^2 + 3x - 7$.

Задание 11.9. Найдите общее решение неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = (8 - 4x)e^{2x}$.

Задание 11.10. Найдите общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 16\cos x - 2\sin x$.

§12. Метод вариации произвольной постояной при решении линейных неоднородных уравнений.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{12.1}$$

$(L[y] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}y^{(n-k)} = f(x))$.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $L[y] = 0$, и его общее решение

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k y_k(x). \tag{12.2}$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(x) y_k(x). \tag{12.3}$$

Чтобы убедиться, что решение в таком виде существует, найдем производные и подставим в уравнение.
$y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k'(x)y_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{n} C_k(x)y_k'(x)$.
При нахождении производных число слагаемых в левой части растет в геометрической прогрессии (знаменатель $q = 2$), поэтому для удобства вычислений полагаем первое слагаемое равным нулю $\sum\limits_{k=0}^{n} C_k'(x)y_k(x) = 0$.

Тогда $y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k(x)y_k'(x)$.

Найдем вторую производную
$y''(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y'_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{n} C_k(x)y''_k(x)$. По тем же соображением положим $\sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y'_k(x) = 0$ и тогда $y''(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y'_k(x)$.
Наконец, $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{n} C_k(x)y_k^{(n)}(x)$.
Подставим функцию (12.3) и ее производные в уравнение (12.1), получим
$\sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) \sum\limits_{k=0}^{n} C_k(x)L[y(x)] = f(x)$
или $\sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) = f(x)$.

Для определения коэффициентов $C_k(x)$ получили систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k(x) & = & 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k(x) & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C'_k(x)y_k^{(n-1)}(x) & = & f(x) \end{array}\right. \qquad (12.4)$$

Определитель этой системы $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, так как функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы. Система имеет единственное решение $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$, следовательно, и функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ определяются однозначно с точностью до константы. Подставляя $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ в (12.3) найдем общее решение уравнения (12.1).

Задание 12.1. Найдите общее решение уравнения $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

§13. Системы дифференциальных уравнений.

До сих пор мы ограничивались исследованием одного дифференциального уравнения для неизвестной функции и ее производных. Нередко в реальности для описания процессов и явлений требуется несколько функций, что приводит к системе уравнений для нескольких неизвестных функций и их производных:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), \dots, y_m(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)) & = & 0 \\ F_2(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), \dots, y_m(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)) & = & 0 \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & & \dots \\ F_m(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n_1)}(x), \dots, y_m(x), \dots, y_m^{(n_m)}(x)) & = & 0 \end{cases} \tag{13.1}$$

Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением систем, содержащих только первые производные неизвестных функций.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_m(x), y_m'(x)) & = & 0 \\ F_2(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_m(x), y_m'(x)) & = & 0 \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots & & \dots \\ F_m(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_m(x), y_m'(x)) & = & 0 \end{cases} \tag{13.2}$$

Разрешив систему уравнений (13.2) относительно производных, получим *канонический вид системы дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} y_1'(x) & = & F_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \\ y_2'(x) & = & F_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m'(x) & = & F_m(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \end{cases} \tag{13.3}$$

Проблема перехода от системы уравнений (13.2) к системе (13.3) сама по себе достаточно сложная, и ее решение не входит в задачу теории дифференциальных уравнений.

Систему дифференциальных уравнений можно получить из одного дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ порядка n, вводя вспомогательные функции. Положим

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y_1' = y' \\ \dots \qquad \dots \\ y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \tag{13.4}$$

Таким образом, из одного дифференциального уравнения получили систему дифференциальных уравнений первого порядка.

Для системы дифференциальных уравнений формулируется задача Коши о нахождении частного решения ${}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ по заданным начальными условиями ${}_k(x_0) = {}_{k0}$.

Часто в системах дифференциальных уравнений независимую переменную обозначают через t (время).

§14. Системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим линейную систему, уравнения которой имеют вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(x) + f_1(t) \\ y_2'(t) & = & a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) + f_2(t) \\ \ldots & \ldots & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) + f_n(t) \end{array}\right. \tag{14.1}$$

Введем вектор-столбцы функций $Y(t) = (y_k(t))$ и $F(t) = (f_k(t))$, а также матрицу $A(t) = (a_{ij}(t))$. Тогда систему уравнений (14.1) можно записать в матричном виде

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t). \tag{14.2}$$

Для краткости используют символическую запись уравнения типа (14.2), вводя линейный оператор L.

$$L[Y(t)] = A(t)Y(t) + F(t). \tag{14.3}$$

Если $F(t) \equiv 0$, то систему линейных уравнений (14.2) называют *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Для однородных систем линейных уравнений, так же как и для линейных однородных уравнений справедливы теоремы о сумме решений системы, вводится понятие фундаментальной системы как набора линейно независимых частных решений этой системы вектор-столбцов $(Y(t))_k$. Поскольку, система n линейных дифференциальных уравнений может быть сведена к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, ее фундаментальная система должна содержать ровно n линейно независимых функций.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 14.1. (О структуре общего решения однородной системы n линейных дифференциальных уравнений) *Общее решение однородной системы n линейных дифференциальных уравнений $L[Y(t)] = 0$ представляет собой линейную комбинацию его n линейно независимых частных решений (фундаментальной системы).* (без доказательства)

Теорема 14.2. (О структуре общего решения неоднородной системы n линейных дифференциальных уравнений) *Общее решение неоднородной системы n линейных дифференциальных уравнений $L[Y(t)] = F(t)$ представляет собой сумму общего решения $(Y(t))_0$ соответствующей однородной системы n линейных дифферен-циальных уравнений $L[Y(t)] = 0$ и любого частного решения $(Y(t))_{частн}$ неоднородной системы $L[Y(t)] = F(t)$.* (без доказательства)

Является ли некоторый набор частных решений однородной системы n линейных дифференциальных уравнений — вектор-столбцов $(Y(t))_k$ на интервале $(a; b)$ линейно независимым определяют, используя определитель Вронского для системы n линейных дифференциальных уравнений:

$$W = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{14.4}$$

здесь $y(t)_{ij}$ — i-й элемент j-го вектор-столбца $(Y(t))_j$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 14.3. (О линейной независимости решений системы n линейных дифференциальных уравнений) *Для того чтобы набор частных решений системы n линейных дифференциальных уравнений $Y(t)_k$ $(t \in (a; b),\ k = 1, 2, \dots, n)$ был линейно независим необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского не равнялся нулю ни в одной точке интервала $(a; b)$.* (без доказательства)

Если известно общее решение однородной системы линейных уравнений, то решение неоднородной системы можно найти методом вариации постоянных.

§15. Системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид аналогичный (14.1):

$$\begin{cases} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) + f_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \ldots + a_{2n}y_n(t) + f_2(t) \\ \ldots \quad \ldots & \qquad\qquad \ldots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \ldots + a_{nn}y_n(t) + f_n(t) \end{cases} \tag{15.1}$$

а в матричной форме отличие от уравнения (14.2) только в том, что матрица A не зависит от t

$$Y'(t) = AY(t) + F(t). \tag{15.2}$$

Так же как и для линейных систем с переменными коэффициентами, если $F(t) = 0$, систему линейных уравнений называют *однородной*

$$Y'(t) = AY(t), \tag{15.3}$$

в противном случае — неоднородной

$$Y'(t) = AY(t) + F(t). \tag{15.4}$$

Рассмотрим сначала однородную систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \tag{15.5}$$

Простейший способ решения системы (15.5) — метод исключения неизвестной. Продифференцируем первое уравнение и подставим производную $y'(t)$ из второго уравнения

$$x''(t) = a_{11}x'(t) + a_{12}y'(t) = a_{11}x'(t) + a_{12}(a_{21}x(t) + a_{22}y(t)) =$$
$$= a_{11}x'(t) + a_{12}\left(a_{21}x(t) + a_{22}\frac{x'(t) - a_{11}x(t)}{a_{12}}\right).$$

Для функции $x(t)$ получили однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x''(x) - (a_{11} + a_{22})x'(t) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x(t) = 0. \qquad (15.6)$$

Решая уравнение (15.6) найдем функцию $x(t)$, а затем подставив ее в первое уравнение системы (15.5) находим функцию $y(t)$.

Пример 15.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' &= &x + 2y \\ y' &= &4x + 3y \end{cases}$.

Решение . Из первого уравнения найдем $y = \dfrac{x' - x}{2}$, подставим во второе $\dfrac{x'' - x'}{2} = 4x + 3\dfrac{x' - x}{2}$ или $x'' - 4x' - 5x = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k - 5 = 0$ и его корни $k_1 = -1, k_2 = 5$. Тогда $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$ и $y(t) = \dfrac{-C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - C_1e^{-t} - C_2e^{5t}}{2} = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}$.

Итак получили $\begin{cases} x(t) &= &C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y(t) &= &-C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t} \end{cases}$.

Пример 15.2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' &= &x - 5y \\ y' &= &2x - y \end{cases}$.

Решение . Из первого уравнения найдем $y = \dfrac{-x' + x}{5}$, подставим во второе $\dfrac{-x'' + x'}{5} = 2x - \dfrac{-x' + x}{5}$ или $x'' + 9x = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 9 = 0$ и его корни $k_{1,2} = \pm 3i$.

Тогда $x(t) = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$ и

$y(t) = \dfrac{15C_1 \sin 3t - 15C_2 \cos 3t + 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t}{5} =$
$= (C_1 + 3C_2) \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$.

Итак получили $\begin{cases} x(t) &= &5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y(t) &= &(C_1 + 3C_2) \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \end{cases}$.

Пример 15.3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' &= &x - y \\ y' &= &x + 3y \end{cases}$.

Решение . Из первого уравнения найдем $y = x - x'$, подставим во второе $x' - x'' = x + 3x - 3x'$ или $x'' - 4x' + 4x = 0$. Характеристическое уравнение

имеет вид $k^2-4k+4=0$ и его корни $k_{1,2}=2$. Тогда $x(t)=(C_1+C_2t)e^{2t}$ и $y(t)=(C_1+C_2t)e^{2t}-(2C_1+2C_2t+C_2)e^{2t}=(-C_1-C_2-c_2t)e^{2t}$.
Итак получили $\begin{cases} x(t) &= & (C_1+C_2t)e^{2t} \\ y(t) &= & (-C_1-C_2-C_2t)e^{2t} \end{cases}$.

Аналогично (методом исключения неизвестных функций) можно решить однородную систему при произвольном числе уравнений. К сожалению, процедура исключения неизвестных из систем с большим числом уравнений (больше 2) довольно громоздка. Однако существует более прямой путь решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Аналогично тому, как мы искали частное решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами n-го порядка в виде $y(t)=e^{kt}$, представим решение системы уравнений (15.3) в виде

$$Y(t)=\overline{U}e^{\lambda t} \tag{15.7}$$

здесь $\overline{U}=(U_1,U_2,\ldots,U_n)^T$ — вектор-столбец постоянных. Подставив выражение (15.7) в уравнение (15.3) и сократив обе части полученного выражения на $e^{\lambda t}$, получим алгебраическое уравнение для нахождения вектор-столбца $\overline{U}$

$$\lambda\overline{U}=A\overline{U}. \tag{15.8}$$

Полученное уравнение есть ни что иное, как уравнение для определения собственных значений λ и собственных векторов $\overline{U}$ матрицы A.

Из теории линейных операторов следует, что для матрицы размера $n\times n$, в общем случае, существует ровно n собственных значений (с учетом их кратности) и столько же собственных векторов. Найдя собственные значения матрицы $(\lambda_k, k=1,2,\ldots,n)$ из характеристического уравнения

$$|A-\lambda E|=0, \tag{15.9}$$

построим n различных собственных векторов $\overline{U}_k$, каждый из которых соответствует определенному собственному значению. Найденные вектор-столбцы $(e^{\lambda_k t}\overline{U}_k)$ составят фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, с помощью которой и строится общее решение системы уравнений (15.3):

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} \overline{U}_k \tag{15.10}$$

здесь мы считаем, что все собственные значения k различны.

Если же какой-либо корень характеристического уравнения (15.9) является кратным ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = k$), то в общем решении (15.10) вместо r слагаемых, соответствующих этим собственным числам, записывается следующее выражение

$$(C_{k_1}\overline{U}_{k_1} + tC_{k_2}\overline{U}_{k_2} + \ldots + t^{r-1}C_{k_r}\overline{U}_{k_r})e^{\lambda_k t} \tag{15.11}$$

Для каждой пары комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ в общем решении (15.10) вместо двух соответствующих комплексных слагаемых можно записать два слагаемых, каждое из которых при подходящей параметризации пары констант интегрирования C_1 и C_2 будет действительным

$$(C_1\overline{U}_1 + C_2\overline{U}_2)e^{\alpha t}\cos\beta t + i(C_1\overline{U}_1 - C_2\overline{U}_2)e^{\alpha t}\sin\beta t \tag{15.12}$$

Данный метод решения легко реализовать для системы двух уравнений (15.5), записанной в матричном виде:

Пример 15.4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' &= & x+2y \\ y' &= & 4x+3y \end{cases}$.

Решение . Запишем систему уравнений в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, корни которого $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$.

Частные решения системы записываем в виде
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$, где константы u_{ij} определяются (с точностью до множителя) из матричного уравнения $(A - \lambda E)Y = 0$.

Если $\lambda = -1$, то $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$ или $2u_{11} + 2u_{12} = 0$ и $\overline{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Если $\lambda = 5$, то $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0$ или $-4u_{21} + 2u_{22} = 0$ и $\overline{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений имеет вид

$\begin{cases} x_1(t) &= e^{-t} \\ y_1(t) &= -e^{-t} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2(t) &= e^{5t} \\ y_2(t) &= 2e^{5t} \end{cases}$.

С помощью найденной фундаментальной системы функций записываем общее решение

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Пример 15.5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' &= x - 5y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$.

Решение . Запишем систему уравнений в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$, корни которого $\lambda_{1,2} = \pm 3i$.

Частные решения системы записываем в виде

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_1 = e^{-3it} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_1 = e^{3it} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$, где константы u_{ij} определяются (с точностью до множителя) из матричного уравнения $(A - \lambda E)Y = 0$.

Если $\lambda = -3i$, то $\begin{pmatrix} 1+3i & -5 \\ 2 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$ или

$(1+3i)u_{11} - 5u_{12} = 0$ и $\overline{U}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

Если $\lambda = 3i$, то $\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0$ или

$(1-3i)u_{21} - 5u_{22} = 0$ и $\overline{U}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений имеет вид

$x_1(t) = 5e^{-3it} = 5(\cos 3t - i\sin 3t)$, $x_2(t) = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i\sin 3t)$, $y_1(t) = (1+3i)e^{-3it} = (1+3i)(\cos 3t - i\sin 3t) = (\cos 3t + 3\sin 3t) + i(3\cos 3t - \sin 3t)$, $y_2(t) = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)(\cos 3t + i\sin 3t) = (\cos 3t + 3\sin 3t) + i(-3\cos 3t + \sin 3t)$.

Применив формулы Эйлера, получим фундаментальную систему решений, не содержащую функций комплексного переменного.

$\tilde{x}_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 5\cos 3t$, $\tilde{x}_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{2i} = 5\sin 3t$,

$\tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \cos 3t + 3\sin 3t$, $\tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = 3\cos 3t - \sin 3t$.

С помощью найденной фундаментальной системы функций записываем общее решение $x(t) = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t$, $y(t) = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(3\cos 3t - \sin 3t) = (C_1 + 3C_2)\cos 3t + (3C_1 - C_2)\sin 3t$.

Запишем решение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \cos 3t \begin{pmatrix} 5C_1 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix} 5C_2 \\ 3C_1 - C_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 15.6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Решение . Запишем систему уравнений в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, корни которого $\lambda_{1,2} = 2$.

Частные решения системы ищем в виде

$x(t) = (A_1 t + A_2)e^{2t}$, $y(t) = (B_1 t + B_2)e^{2t}$.

Найдем производные этих функций и подставим в систему дифференциальных уравнений.

$x'(t) = (2A_1t + 2A_2 + A_1)e^{2t}$, $y'(t) = (2B_1t + 2B_2 + B_1)e^{2t}$ и подставим в систему дифференциальных уравнений.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2A_1t + 2A_2 + A_1)e^{2t} & = & (A_1t + A_2)e^{2t} - (B_1t + B_2)e^{2t} \\ (2B_1t + 2B_2 + B_1)e^{2t} & = & (A_1t + A_2)e^{2t} + 3(B_1t + B_2)e^{2t} \end{array}\right. .$$

Сократим уравнения на e^{2x} и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2A_1t + 2A_2 + A_1 & = & A_1t + A_2 - B_1t - B_2 \\ 2B_1t + 2B_2 + B_1 & = & A_1t + A_2 + 3B_1t + 3B_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1 + B_1 & = & 0 \\ A_1 + A_2 + B_2 & = & 0 \\ -A_1 - B_1 & = & 0 \\ -A_2 - B_2 + B_1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B_1 & = & -A_1 \\ B_2 & = & -A_1 - A_2 \end{array}\right. .$$

Пусть $A_1 = C_1$, $A_2 = C_2$, тогда $B_1 = -C_1$, $B_2 = -C_1 - C_1$.

Общее решение системы имеет вид

$x(t) = (C_1t + C_2)e^{2t}$, $y(t) = (-C_1t - C_1 - C_2)e^{2t}$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \cos 3t \begin{pmatrix} (C_1t + C_2)e^{2t} \\ (-C_1t - C_1 - C_2)e^{2t} \end{pmatrix}.$$