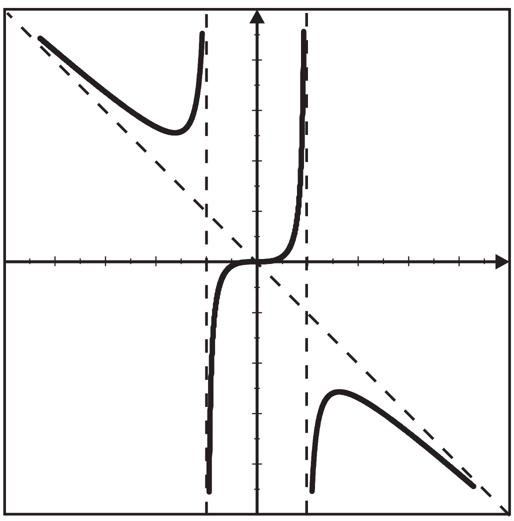
Л.И. Магазинников
А.Л. Магазинников

Практикум по дифференциальному исчислению

Учебное пособие



Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Л.И. Магазинников
А.Л. Магазинников

Практикум по дифференциальному исчислению

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия

Томск
ТУСУР
2007

УДК 517.2(075)
ББК 22.1я73
М12

Рецензенты:
кафедра высшей математики Томского гос. ун-та,
зав. каф.д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Панько**;
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики
Томского политехнического ун-та **Е.Т. Ивлев**

Магазинников Л.И., Магазинников А.Л.

М12 Практикум по дифференциальному исчислению: учеб. пособие / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007. – 213 с.

ISBN 978-5-86889-387-2

Рассмотрены примеры решения задач по введению в математический анализ и дифференциальному исчислению скалярных и векторных функций скалярного и векторного аргументов. Приведены задачи для самостоятельной работы с указанием ответов.

Для студентов и преподавателей вузов.

УДК 517.2(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86889-387-2

Оглавление

Предисловие

В практикуме рассмотрены методы решения задач по введению в математический анализ и дифференциальному исчислению. Цель его — оказать помощь студентам в самостоятельной работе над учебным материалом. Преподаватели могут использовать пособие для проведения практических аудиторных занятий и организации самостоятельной работы студентов. Предлагаемый практикум составлен в полном соответствии с учебным пособием «Дифференциальное исчисление», авторы А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников.

Весь материал разбит на 28 тем: 10 по введению в математический анализ и 18 по дифференциальному исчислению. Каждая тема содержит необходимые теоретические положения, которые следует изучить, прежде чем приступать к решению задач. Сначала формулируются задачи и приводятся их подробные решения. Затем даётся набор задач для самостоятельного решения в объеме, достаточном для аудиторной работы на практических занятиях и для самостоятельной работы. Пособие применялось в учебном процессе и получило положительные отзывы от студентов и преподавателей.

Программа раздела «Дифференциальное исчисление» курса высшей математики

Множества, операции над множествами, числовые множества и их границы, свойства числовых множеств. Модуль вещественного числа и его свойства, обозначения числовых множеств, наиболее часто встречающихся на практике, системы окрестностей в R и R_n. Функции, или отображения. Понятие функции. Классификация функций по размерностям соответствующих множеств, основные свойства функций. Композиция отображений, обратная функция. Предел функции. Понятие предела функции на языке окрестностей. Последовательность и ее предел, понятие предела функции на языке последовательностей, односторонние пределы, двойные и повторные пределы. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Разрывы функции. Классификация разрывов. Замечательные пределы и их следствия. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Дифференцируемые отображения. Понятие производной матрицы и дифференциала. Строение производной матрицы. Таблица производных. Некоторые правила дифференцирования, производная композиции отображений, производная обратной функции, производная по направлению. Производные высших порядков. Частные производные высших порядков. Параметрически и неявно заданные функции и их дифференцирование. Геометрический и механический смысл производных. Уравнение касательной к кривой. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Дифференциал функции и его строение для различных классов функций. Инвариантность формы записи первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и ее применение в приближенных вычислениях. Основные теоремы дифференциального исчисления. Достаточные условия дифференцируемости функции. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Условия постоянства, монотонного возрастания и убывания функций. Экстремумы. Необходимые условия экстремума для скалярных функций от одного и многих аргументов. Достаточные условия экстремума для функций одного и многих переменных. Условные экстремумы. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом множестве. Выпуклость вверх и вниз графика функции. Асимптоты. Общая схема исследования функции и построение графиков.

Введение в математический анализ

1. Множества. Операции над множествами. Числовые множества

Напомним, что операцию сложения (объединения) двух множеств A и B можно обозначать либо $A \cup B$, либо $A + B$, а операцию умножения (пересечения) — в виде $A \cap B$ или $A \cdot B$, разность множеств можно обозначать либо $A \setminus B$, либо $A - B$.

1.1. Даны два числовых множества: $A = \{1;5;6;9\}$ и $B = \{2;4;5;8;9\}$. Перечислите элементы множеств $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$, $B \setminus A$.

Решение. Множество $A + B \equiv A \cup B$ согласно определению суммы множеств состоит из тех и только тех элементов, которые входят либо в A, либо в B. Поэтому $A + B = \{1;5;6;9;2;4;8\}$.

Множество $A \cdot B \equiv A \cap B$ состоит из всех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и множеству B. В нашем примере это элементы 5 и 9, следовательно, $A \cdot B = \{5;9\}$.

Множество $A \setminus B$ содержит только те элементы из множества A, которые не входят в B. В нашем случае $A \setminus B \equiv A - B = \{1;6\}$. Множество $B - A$ состоит из тех элементов множества B, которые не входят в A, поэтому $B \setminus A \equiv B - A = \{2;4;8\}$.

При построении той или иной теории предполагают, что рассматриваемые в этой теории множества $A, B, C, \ldots$ принадлежат некоторому множеству Ω, называемому универсальным. Например, если мы решили изучать множество целых положительных чисел, не превышающих 10, то $\Omega = \{1;2;3;\ldots 10\}$. Если изучают все целые положительные числа, то Ω совпадает с натуральным рядом N, и т.д. Множество всех элементов из Ω, которые не входят в множество A, называется дополнением A или отрицанием A и обозначается $\bar{A}$.

1.2. Пусть $\Omega = \{1;2;3;\ldots 10\}$ — универсальное множество, $A = \{2;4;6;8;10\}$. Найдите $\bar{A}$.

Решение. По определению множество $\bar{A}$ состоит из тех элементов Ω, которые не входят в A, следовательно, $\bar{A} = \{1;3;5;7;9\}$.

1.3. Докажите справедливость равенства $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ для любых множеств A, B, C.

Решение. Два множества D и F называются равными, если $D \subset F$ и $F \subset D$. По определению соотношение $D \subset F$ означает, что любой элемент x множества D $(x \in D)$ принадлежит множеству F $(x \in F)$, а из условия $F \subset D$ следует, что если $x \in F$, то $x \in D$. Поэтому для доказательства справедливости равенства $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ надо доказать, что $(A+B)\cdot C \subset (A\cdot C + B\cdot C)$ и $(A\cdot C + B\cdot C) \subset (A+B)\cdot C$.

Докажем первое соотношение. Пусть $x \in (A+B)\cdot C$ — любой элемент. По определению произведения множеств это означает, что $x \in (A+B)$ и $x \in C$. Из определения суммы множеств и условия $x \in (A+B)$ следует, что либо $x \in A$, либо $x \in B$, а поскольку $x \in C$, то либо $x \in A\cdot C$, либо $x \in B\cdot C$. Поэтому $x \in (A\cdot C + B\cdot C)$. Так как x — любой элемент из $(A+B)\cdot C$, то этим мы доказали, что $(A+B)\cdot C \subset (A\cdot C + B\cdot C)$.

Докажем второе соотношение. Пусть теперь x — любой элемент из множества $A\cdot C + B\cdot C$. Это означает, что либо $x \in A\cdot C$, либо $x \in B\cdot C$. Это возможно, если либо $x \in A$ и $x \in C$, либо $x \in B$ и $x \in C$, следовательно, $x \in (A+B)$ и $x \in C$, т.е. $x \in (A+B)\cdot C$. Мы доказали, что $(A\cdot C + B\cdot C) \subset (A+B)\cdot C$. Из доказанных включений следует, что $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

1.4. Докажите, что $\bar{A} + \bar{B} = \overline{(A\cdot B)}$.

Решение. Чтобы доказать данное равенство, нужно доказать, что $(\bar{A} + \bar{B}) \subset \overline{A\cdot B}$ и $\overline{A\cdot B} \subset (\bar{A} + \bar{B})$.

Докажем сначала, что $(\bar{A} + \bar{B}) \subset \overline{A\cdot B}$. Пусть $x \in \bar{A} + \bar{B}$, тогда либо $x \in \bar{A}$, либо $x \in \bar{B}$, т.е. либо $x \notin A$, либо $x \notin B$, следовательно, $x \notin A\cdot B$, а потому $x \in \overline{A\cdot B}$. Так как x — любой элемент из $\bar{A} + \bar{B}$, то мы доказали, что $(\bar{A} + \bar{B}) \subset \overline{A\cdot B}$.

Пусть теперь $x \in \overline{A\cdot B}$. По определению отрицания $x \notin A\cdot B$, т.е. либо $x \notin A$, либо $x \notin B$, следовательно, либо $x \in \bar{A}$, либо $x \in \bar{B}$, а потому $x \in (\bar{A} + \bar{B})$. Мы доказали, что $\overline{A\cdot B} \subset (\bar{A} + \bar{B})$. Равенство $(\bar{A} + \bar{B}) = \overline{A\cdot B}$ доказано.

1.5. Докажите, что если $A \cdot B = A$, то $B \subset A$.

Решение. Пусть x — любой элемент из B. Так как $A \cdot B = A$, то это означает, что $x \in A$, т.е. $B \subset A$.

1.6. Докажите, что если $A + B = B$, то $A \subset B$.

Решение. Пусть x — любой элемент из A. По определению суммы $x \in (A + B)$. Но поскольку $A + B = B$, то $x \in B$, следовательно, $A \subset B$.

1.7. Даны два множества: A — отрезок $[-3;4]$ и B — интервал $(1;6)$. Охарактеризуйте множества $A + B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\bar{A}$, $\bar{B}$. В качестве универсального множества Ω принять всё множество вещественных чисел $(-\infty, +\infty)$.

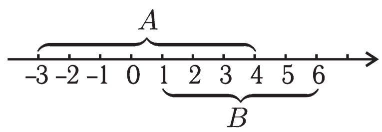


Рис. 1.1

Решение. Строим множества A и B на числовой оси (рис. 1.1). Непосредственно из определения операций над множествами и рисунка следует, что $A + B$ совпадает с полуинтервалом $[-3;6)$, множество $A \cdot B$ есть полуинтервал $(1;4]$, множество $A \setminus B$ совпадает с $[-3;1]$, а множество $B \setminus A$ является интервалом $(4;6)$. Множество $\bar{A}$ состоит из точек, расположенных на лучах $(-\infty;-3)$ и $(4;+\infty)$, а множество $\bar{B}$ есть $(-\infty;1] \cup [6;+\infty)$.

1.8. Даны два множества: A — интервал $(-2;5)$ и B — отрезок $[1;3]$. Опишите множества $A + B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

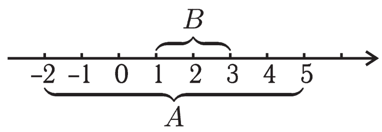


Рис. 1.2

Решение. Строим множества A и B (рис. 1.2). Видим, что $A + B = A$, $A \cdot B = B$, множество $A \setminus B$ состоит из объединения интервалов $(-2;1) \cup (3;5)$, $B \setminus A = \varnothing$.

1.9. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $y^2 \le 2x$, $x \le 2$ (множество A);

б) $y^2 \le x$, $x^2 + y^2 \le 4$ (множество B).

Решение. Строим параболу $y^2 = 2x$ и прямую $x = 2$. Границы множества A расположены на этих линиях. Множество A является пересечением двух множеств: F — множества точек, расположенных ниже верхней и выше нижней ветвей параболы $y^2 = 2x$, и G — множества точек, расположенных слева от прямой $x = 2$.

На рис. 1.3*а* множество A изображено заштрихованной областью $A0B$. Множество B изображено на рис. 1.3*б*.

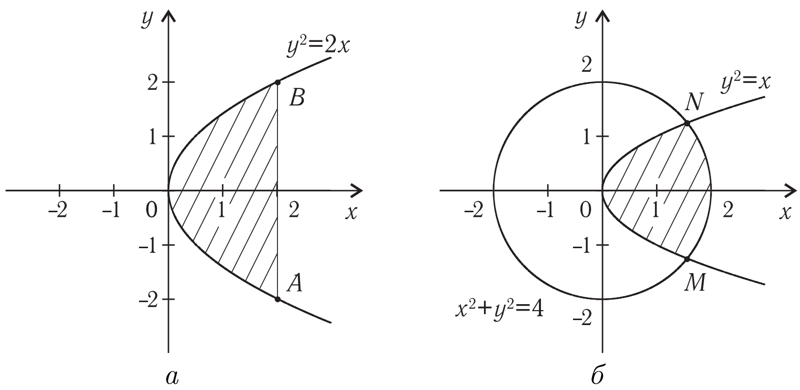


Рис. 1.3

1.10. Найдите множество X всех решений неравенства $\sqrt{x^2} < 3$ и укажите точную нижнюю и точную верхнюю границу множества X.

Решение. По определению арифметического корня данное неравенство эквивалентно неравенству $|x| < 3$. Так как

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

то $x > -3$ и $x < 3$, поэтому $-3 < x < 3$. Таким образом, множество X является интервалом $(-3;3)$. Докажем, что $\sup X = 3$. Действительно, все числа множества X меньше трёх, т.е. 3 является верхней границей. Покажем, что это наименьшая из всех верхних границ. Предположим противное, что существует граница α, меньшая 3, но большая -3. По свойству плотности множества вещественных чисел между числами α и 3 найдётся число α_0, принадлежащее X. Так как $\alpha_0 > \alpha$, то α не является верхней границей вопреки предположению, т.е. верхних границ, меньших 3, не существует. Следовательно, число 3 является точной верхней границей, т.е. $\sup X = 3$. Аналогично показывается, что $\inf X = -3$.

1.11. Найдите множество X всех решений неравенства $|x^2 - 6x + 8| > x^2 - 6x + 8$.

Решение. Неравенство $|a| > a$ выполняется только при $a < 0$. Поэтому данное неравенство выполняется только для тех x, для которых $x^2 - 6x + 8 < 0$ или $(x-2)(x-4) < 0$, откуда $2 < x < 4$, т.е. X есть интервал (2;4).

Задачи для самостоятельного решения

1.12. Даны множества: $A = \{2,7,8,10\}$, $B = \{1,2,4,8\}$, $C = \{2,3,5,6,8\}$. Охарактеризуйте множества: а) $A + B$, б) $B + C$, в) $A \cdot B \cdot C$, г) $A \setminus B$, д) $C \setminus B$.

1.13. Пусть Ω — натуральный ряд чисел (универсальное множество). Его подмножества: A — множество чётных чисел; B — множество чисел, делящихся на 4; C — множество чисел, делящихся на 8. Охарактеризуйте множества: а) $A{+}B$, б) $A{+}C$, в) $B + C$, г) $A \cdot B$, д) $A \cdot C$, е) $B \cdot C$, ж) $B \setminus A$, з) $C \setminus A$, и) $A \setminus B$, к) $B \setminus C$, л) $C \setminus B$, м) $\bar{A}$.

1.14. Докажите, что $A + A \cdot B = A$.

1.15. Докажите, что $(A \setminus B) + (B \setminus A) + A \cdot B = A + B$.

1.16. Докажите, что $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

1.17. Докажите, что из условия $A \subset B$ следует $\bar{B} \subset \bar{A}$, а из условия $\bar{B} \subset \bar{A}$ следует $A \subset B$.

1.18. Даны два множества: A — интервал $(-5;3)$ и B — отрезок $[-3;5]$. Охарактеризуйте множества: а) $A + B$, б) $A \cdot B$, в) $A \setminus B$, г) $B \setminus A$, д) $\bar{A}$, е) $\bar{B}$. (В качестве универсального принять всё множество вещественных чисел $(-\infty; +\infty)$.)

1.19. Даны два множества: A — отрезок [1;10] и B — полуинтервал [2;6). Охарактеризуйте множества: а) $A+B$, б) $A\cdot B$, в) $A\setminus B$, г) $B\setminus A$.

1.20. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
а) $x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 1;$ б) $x+y\le 2,\ y\ge x,\ x\ge 0;$
в) $y\ge x^2,\ y\le 1-x.$

1.21. Пусть X — множество всех решений неравенства $x^2-3x-4<0$. Найдите $\sup X$, $\inf X$.

1.22. Найдите множество X всех решений неравенства $|x+4|<5$ и укажите $\sup X$.

1.23. Найдите множество X всех решений неравенства $|x+2|>3$.

1.24. Убедитесь, что множество X всех решений неравенства $x^2-5x+6>0$ не ограничено ни сверху, ни снизу.

1.25. Пусть b и ε — любые положительные числа. Докажите эквивалентность следующих неравенств:

а) $|a|\le b$ и $-b\le a\le b$;

б) $|a-b|<\varepsilon$ и $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$;

в) $|a|>b$ и $a<-b$ или $b<a$;

г) $|a-b|\ge\varepsilon$ и $a\le b-\varepsilon$ или $b+\varepsilon a$.

1.26. Запишите без знака модуля следующие выражения:

а) $f_1(x)=|x-1|-2|x+2|$;

б) $f_2(x)=|3x-6|-|x+1|+|2x+4|$;

в) $f_3(x)=||x|-2|$;

г) $f_4(x)=||x-3|-x|$.

1.27. Найдите множество всех решений следующих уравнений:

а) $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+|x+5|=-1;$ б) $|x-4|+|6+x|=-0{,}2;$

в) $|x+1|+|x-1|=3;$ г) $|x-6|-|x-1|=3;$

д) $||x|-2|=4;$ е) $||3-2x|-1|=2|x|.$

1.28. Найдите множество всех решений следующих неравенств:

а) $|x+2| - 2|x-1| < 4$; б) $|2x+1| > x-4$;

в) $\left|\dfrac{2x+3}{4x-3}\right| < 1$; г) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| < \dfrac{2}{|x-1|}$.

2. Функции. Простейшие свойства функций

Чтобы определить функцию $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$, нужно задать два множества $X \subset R_n$ и $Y \subset R_m$ и установить правило f, по которому можно каждому элементу x из множества X сопоставить элемент y из множества Y. Здесь R_n и R_m — точечно-векторные линейные евклидовы пространства размерности n и m соответственно, в которых выбраны некоторые декартовы системы координат. Тогда каждый элемент x из R_n, называемый точкой или вектором, может быть задан как упорядоченная совокупность n действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. (Для R_m таких чисел m.) В R_n введено понятие расстояния $r(M_1, M_2)$ между любыми его точками $M_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $M_2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ соотношением

$$r(M_1, M_2) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2}.$$

Пространство R_1 будем отождествлять с множеством вещественных чисел R.

В зависимости от значений n и m различают четыре класса функций.

1. $n = 1,\ m = 1,\ f : X \subset R \to Y \subset R$ — числовые функции одного числового аргумента. Функции этого класса изучаются в средней школе, например, $y = \sin x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \log_a x$, $y = a^x$ и т.д.

2. n — конечно, произвольно, $m = 1$, $f : X \subset R_n \to Y \subset R$ — числовая функция векторного аргумента или числовая функция n числовых аргументов $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, если x_1 — высота треугольника, а x_2 — длина основания, то его площадь S есть функция двух аргументов $S = S(x_1, x_2) = (1/2)x_1 x_2$; если x_1 — высота кругового конуса, а x_2 — радиус его основания, то объём конуса $V = V(x_1, x_2) = (1/3)\pi x_1 x_2^2$, т.е. является также функцией двух аргументов; расстояние от точки $M(x, y, z)$ до начала координат является функцией трёх аргументов $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. $n = 1$, m — произвольно, конечно, $f : X \subset R \to Y \subset R_m$ — векторная функция числового аргумента: каждому вещественному числу x из X сопоставляется некоторый m-мерный вектор. Функцию этого типа можно задать в виде

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots\cdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]^T,$$

где $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ — числовые функции числового аргумента. Их называют координатными.

При $m = 2$ и $m = 3$ данные функции широко используются в физике для описания движения точки на плоскости или в пространстве. При этом в качестве аргумента x принимают время t. Например, функция $f(t) = \begin{bmatrix} 2t+3 \\ -4t+5 \\ t+1 \end{bmatrix}$ описывает движение точки по прямой линии, параллельной вектору $\mathbf{l} = \{2; -4; 1\}$, проходящей через точку $M_0(3;5;1)$ в момент времени $t = 0$. В момент времени $t = 1$ точка займёт положение $M_1(5;1;2)$.

Функция $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2+4 \end{bmatrix}$ описывает движение точки по параболе $y = x^2 + 4$.

4. n и m — произвольные конечные числа, т.е. $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$. Каждому вектору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества X ставится в соответствие m-мерный вектор

$(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из множества Y. Функцию этого класса можно задать в виде

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Функции

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

также называют координатными. Подобные функции применяются для изучения процессов, зависящих от многих параметров, а также при переходе от одних переменных к другим в задачах преобразования областей. Простейшим примером таких функций являются линейные операторы, изученные нами в линейной алгебре. Линейный оператор $A : R_n \to R_m$, как известно, может быть задан в виде

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n \end{bmatrix},$$

где $a_i^k = \text{const}$. В этом случае все координатные функции являются линейными.

Функции $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ также широко применяются в физических задачах для описания векторных полей. Пусть $n = 2$, $m = 2$. Тогда $f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$. Каждой точке (x, y) плоскости сопоставляется вектор $\mathbf{a}(x, y)$ с координатами $\begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$. Такую конструкцию называют плоским векторным полем. Если $n = 3$, $m = 3$, то каждой точке $M(x, y, z)$ сопоставляется трёхмерный вектор $\mathbf{a}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$.

Получаем пространственное векторное поле. Если в точку $M(x_0, y_0, z_0)$ поместить некоторую массу, то она порождает поле тяготения. Каждая массивная точка будет испытывать силу тяготения этой точки, которую можно определить с помощью известной формулы Ньютона.

Пусть $n = 2$, $m = 3$. Каждой точке плоскости (x, y) сопоставляется некоторый вектор в трёхмерном пространстве, т.е. плоскость по каким-то законам порождает в пространстве векторное поле. Этот закон и описывается функцией $f(x, y) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ R(x,y) \end{bmatrix}$.

Как видим, функции $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ можно применять для описания векторных полей различного строения, а также для описания законов движения точки в многомерных пространствах. Изучение векторных функций, т.е. функций третьего и четвёртого типов, сводится к изучению функций первых двух типов — их координатных функций.

Графиком функции $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ называют множество точек $(x, f(x))$ в $(n+m)$-мерном пространстве. В частности, при $n = m = 1$ имеем некоторое множество точек (x, y) на плоскости.

При $n = 1$, $m = 3$ графиком будет некоторая пространственная кривая, а при $n = 2$, $m = 1$ графиком является поверхность. При $n = 2$, $m = 2$ графиком является множество точек $(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ четырёхмерного пространства. Четырёхмерное пространство не допускает наглядного изображения, поэтому договорились брать два экземпляра плоскостей: (O, x_1, x_2) и (O_1, y_1, y_2). В первой из них строят область определения X функции, а во второй — область Y значений функции f. В этом случае говорят, что функция f отображает область X в области Y. Более подробно этой проблемы мы коснёмся в интегральном исчислении функций многих переменных, где будут приведены многочисленные примеры отображения областей.

2.1. Пусть $f(x+3) = x^2 + 4x + 5$. Найдите $f(x)$.

Решение. Преобразуем выражение $A = x^2 + 4x + 5$. Можем записать:

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 - 6x - 9 + 4x + 5 = (x+3)^2 - 2x - 4 = \\ &= (x+3)^2 - 2(x+3) + 6 - 4 = (x+3)^2 - 2(x+3) + 2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

2.2. Дано, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + 4$. Найдите $f(x)$.

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{x} = u$. Тогда

$$x = \frac{1}{u}, \quad f(u) = \frac{1}{u^2} + 4 = \frac{4u^2+1}{u^2}.$$

Обозначая аргумент через x, получим $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{x^2}$.

2.3. Даны функции $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Найдите $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

Решение:

$$f[f(x)] = \frac{\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\right)^2 + 3} = \frac{(x^2-1)^2 - (x^2+3)^2}{(x^2-1)^2 + 3(x^2+3)^2} =$$

$$= -\frac{2(x^2+1)}{x^4+4x^2+7}; \qquad \varphi[\varphi(x)] = \frac{1}{\dfrac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{2+x};$$

$$f[\varphi(x)] = \frac{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2 - 1}{\dfrac{1}{(x+1)^2} + 3} = \frac{1-(x+1)^2}{1+3(x+1)^2};$$

$$\varphi[f(x)] = \frac{1}{\dfrac{x^2-1}{x^2+3} + 1} = \frac{x^2+3}{2x^2+2}.$$

2.4. Даны функции $f(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\sin x$. Найдите $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

Решение. $f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$; $\varphi[\varphi(x)]=\sin(\sin x)$;
$f[\varphi(x)]=\sqrt{\sin x}$; $\varphi[f(x)]=\sin(\sqrt{x})$.

2.5. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

б) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

Решение:

а) область определения данной функции состоит из тех значений x, для которых оба слагаемых принимают действительные значения. Должны выполняться два условия:

$$\begin{cases} (x^2-x-2)\geq 0, \\ (3+2x-x^2)>0. \end{cases}$$

Корнями квадратного уравнения $x^2-x-2=0$ являются числа -1 и 2, а уравнения $3+2x-x^2=0$ — числа -1 и 3. Поэтому данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)\geq 0, \\ (x+1)(x-3)<0. \end{cases}$$

Используя метод интервалов, находим, что первое неравенство выполняется на лучах $(-\infty;-1]$ и $[2;+\infty)$, а второе — в интервале $(-1;3)$. Общей частью этих трёх множеств является множество $[2;3)$, которое и есть область определения данной функции;

б) функция $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ принимает действительные значения, если $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0$, т.е. если $\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 1$, или $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)\leq 0$. Решая последнее неравенство, находим, что областью определения является отрезок [1;4].

2.6. Найдите область определения и постройте её для следующих функций $f : X \subset R_2 \to Y \subset R$:

а) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

б) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{x + y}{2}$;

в) $f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

г) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

Предлагается решить самостоятельно.

2.7. Найдите область определения следующих векторных функций скалярного аргумента:

$$\text{а) } f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ \lg \dfrac{1}{x+1} \end{bmatrix}; \text{ б) } \varphi(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \\ \arccos \dfrac{x+1}{4} \end{bmatrix}.$$

Решение. Чтобы найти область определения векторной функции, нужно найти области определения каждой координатной функции и взять их общую часть. В случае а) имеем: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \lg \dfrac{1}{x+1}$. Функция $f_1(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$, а функция $f_2(x)$ определена при $\dfrac{1}{x+1}$ >0, т.е. при $x > -1$ или в интервале $(-1; +\infty)$. Этот луч и является областью определения функции $f(x)$.

В случае б) $f_1(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Эта функция определена на отрезке [2;4], функция $f_2(x) = \arccos \dfrac{x+1}{4}$ определена при $\left|\dfrac{x+1}{4}\right| \leq 1$, т.е. $|x + 1| \leq 4$ или $-4 \leq x + 1 \leq 4$. Получаем отрезок [−5;3]. Этот отрезок с отрезком [2;4] имеет общую часть [2;3]. Отрезок [2;3] является областью определения функции $\varphi(x)$.

2.8. Найдите область определения векторной функции векторного аргумента $f : X \subset R_2 \to Y \subset R_2$:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x + \arcsin y \\ y + \arcsin x \end{bmatrix}.$$

Решение. Область определения этой функции является пересечением областей определения координатных функций $f_1(x,y) = x + \arcsin y$ и $f_2(x,y) = y + \arcsin x$. Первая из них определена в полосе $-1 \leq y \leq 1$, а вторая — в полосе $-1 \leq x \leq 1$. Эти полосы пересекаются по замкнутому квадрату со сторонами $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, который и является областью определения данной функции.

2.9. Функция $f(x)$ определена на отрезке [2;4]. Какова область определения функций: а) $f(8x^2)$; б) $f(x-3)$.

Решение:

а) функция $f(8x^2)$ является композицией функций $u = 8x^2$ и $f(u)$. Область значений функции $u = 8x^2$ должна входить в область определения функции $f(u)$, поэтому $2 \leq 8x^2 \leq 4$, т.е. $1/4 \leq x^2 \leq 1/2$. Отсюда следует, что множество $[-1/\sqrt{2}; -1/2] \cup [1/2; 1/\sqrt{2}]$ является областью определения функции $f(8x^2)$;

б) функция $f(x-3)$ определена при всех x, удовлетворяющих неравенству $2 \leq x - 3 \leq 4$, т.е. на отрезке [5;7].

2.10. Докажите, что функция $f_1(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$ является нечётной, $f_2(x) = x\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$ — чётной, а функция $f_3(x) = 2x^3 - x + 1$ — общего вида (не является ни чётной, ни нечётной).

Решение:

$$f_1(-x) = \lg\frac{1+x}{1-x} = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\lg\frac{1-x}{1+x} = -f_1(x);$$

$$f_2(-x) = -x\frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1} = -x\frac{1/3^x+1}{1/3^x-1} = -x\frac{3^x+1}{1-3^x} =$$
$$= x\frac{3^x+1}{3^x-1} = f_2(x),$$

т.е. функция $f_1(x)$ нечётна, а $f_2(x)$ чётна;

$f_3(-x) = -2x^3 + x + 1$. Видим, что $f_3(x) \neq -f_3(-x)$ и

$f_3(-x) \neq f_3(x)$, т.е. функция $f_3(x)$ — общего вида.

2.11. Докажите, что если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то функция $f(ax)$ также периодическая с периодом T/a.

Решение. Действительно, $f[a(x+T/a)] = f(ax+T) = f(ax)$, т.е. T/a — один из периодов функции $f(ax)$.

2.12. Найдите период функции $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Можем записать: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Видим, что период функции $\cos^2 x$ совпадает с периодом функции $\cos 2x$. Так как период функции $\cos x$ равен 2π, то согласно задаче 2.11 период функции $\cos 2x$ равен π.

2.13. Найдите период функций: а) $f(x) = \sin 2\pi x$;
б) $f(x) = |\cos x|$.

Ответ: а) $T = 1$; б) $T = \pi$.

Задачи для самостоятельного решения

2.14. Пусть $f(x) = x^2$ и $\varphi(x) = 2^x$. Найдите: а) $f[\varphi(x)]$,
б) $\varphi[f(x)]$.

2.15. Найдите $f(x+1)$, если $f(x-1) = x^2$.

2.16. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Найдите $\varphi(x) = f\{f[f(x)]\}$.

2.17. Дана функция $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$. Докажите, что функция $f(2x+1)$ может быть представлена в виде $f(2x+1) = Ax^2 + Bx + C$. Найдите значения констант A, B, C.

2.18. Даны две линейные функции $f_1(x) = 5x+4$ и $f_2(x) = 3x-1$. Докажите, что функция $f(x) = f_2[f_1(x)]$ также линейна, т. е. имеет вид $f(x) = Ax + B$. Найдите значения констант A и B.

2.19. Даны две функции $f_1(x) = \dfrac{3x+7}{5x+6}$ и $f_2(x) = \dfrac{5x+4}{2x-8}$, называемые дробно-линейными. Докажите, что функция $f(x) = f_1[f_2(x)]$ также дробно-линейна, т. е. имеет вид $f(x) = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$. Укажите значения констант A, B, C, D.

2.20. Для некоторой функции $f : X \subset R \to Y \subset R$ известно, что $f(3x+5) = 45x^2 - 12x + 3$. Докажите, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Найдите значения констант A, B, C.

2.21. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$; б) $f(x) = \lg \dfrac{2+x}{2-x}$;

в) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$; г) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;

д) $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \arcsin \dfrac{1+x^2}{2x}$.

2.22. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 33x + 270}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 26x + 168}$;

в) $f(x) = \lg[(1+x)(12-x)]$; г) $f(x) = \arcsin \dfrac{x+2}{x-6}$;

д) $f(x) = \sqrt{(x+9)(x+8)(x-14)}$;

е) $f(x) = \arcsin \dfrac{15}{x-11}$;

ж) $f(x) = \sqrt{x^2 + 13x + 42} + \arcsin \dfrac{-x}{13}$.

2.23. Постройте область определения следующих функций:

а) $f(x,y) = \log_2(x+y)$;

б) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

в) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{4}$;

г) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

2.24. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \begin{bmatrix} 1 - \lg x \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}} \end{bmatrix}$; б) $f(x) = \begin{bmatrix} \arcsin \dfrac{3-2x}{5} \\ \sqrt{3-x} \end{bmatrix}$.

2.25. Найдите и постройте область определения следующих функций:

а) $f(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{4x-y^2} \\ \lg(1-x^2-y^2) \end{bmatrix}$;

б) $f(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+2x+y^2} \\ \sqrt{x^2-2x+y^2} \end{bmatrix}$.

2.26. Докажите, что функции

а) $f_1(x) = 2^{-x^2}$, $f_2(x) = \dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$,

$f_3(x) = |x+1| + |x-1|$ — чётные;

б) $\varphi_1(x) = \dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$, $\varphi_2(x) = \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$,

$\varphi_3(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$ — нечётные;

в) $\psi_1(x) = \sin x - \cos x$, $\psi_2(x) = 2^{x-x^2}$,

$\psi_3(x) = x^3 + x^2 - 2$ — общего вида.

2.27. Даны функции:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \sin x^2$; в) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; г) $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

Какие из них являются периодическими?

2.28. Докажите, что функция $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ имеет обратную, и найдите её.

2.29. Докажите, что функция $y = x^2 - 2x$ имеет две обратных: $y_1 = 1 + \sqrt{x+1}$ и $y_2 = 1 - \sqrt{x+1}$.

2.30. Докажите, что следующие функции ограничены снизу:

а) $f_1(x) = x^6 - 6x^4 + 11x^2$; б) $f_2(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2$.

2.31. Докажите, что следующие функции ограничены сверху:

а) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-16x+36}}$; б) $f_1(x) = \dfrac{5}{\sqrt{5x^2-10x+55}}$.

2.32. Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

а) $f_1(x) = 3\sin x + 4\cos x$; б) $f_2(x) = 5\sin x + 12\cos x$.

2.33. Охарактеризуйте вид графика следующих функций:

$$\text{а) } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad \text{б) } z = x^2 + y^2;$$
$$\text{в) } z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{г) } z = x^2 - y^2.$$

2.34. Начертите линии уровня данных функций, придавая z значения от -3 до $+3$ через 1: а) $z = xy$; б) $z = y(x^2 + 1)$.

2.35. Постройте график функции $y = 2\sqrt{-3(x+1)} - 0{,}5$ с помощью преобразования графика функции $y = \sqrt{x}$.

2.36. Постройте график функции $y = 3\sin(2x - 4)$ с помощью преобразования графика функции $y = \sin x$.

2.37. Применяя элементарное исследование функций (без использования производной), постройте графики следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x^2+1}; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^2+1};$$
$$\text{в) } y = x^4 - 2x^2 + 5; \quad \text{г) } y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5};$$
$$\text{д) } y = \frac{2x-5}{x-3}; \quad \text{е) } y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 10.$$

2.38. Постройте графики следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } -\infty < x < 1; \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, \text{ если } 1 \le x \le 3; \\ 4, \text{ если } 3 < x < +\infty; \end{cases}$$

б) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$;

в) $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$;

г) $f(x) = \sin x + |\sin x|$, если $0 \le x \le 3\pi$;

д) $f(x) = \arccos(\cos x)$;

е) $f(t) = \left[\begin{array}{c} t+5 \\ t-7 \end{array} \right]$; ж) $f(t) = \left[\begin{array}{l} t+1 \\ t^2 + 2t + 2 \end{array} \right]$.

3. Предел функции

Рекомендуется по учебному пособию [6] изучить подразделы 1.4 и 1.5. Следует обратить особое внимание на подраздел 1.4 и знать все типы окрестностей, их обозначения и формы записи в виде неравенств.

Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает: для любой окрестности $U(A)$ (в частности, сколь угодно малой) элемента A найдётся проколотая окрестность $\dot{V}(x_0)$ элемента x_0 такая, что из условия $x \in \dot{V}(x_0) \cap X$ следует, $f(x) \in U(A)$, где X — область определения функции $f(x)$, а x_0 — предельная точка множества X.

Часто вместо произвольной окрестности $U(A)$ рассматривают симметричную окрестность $U_\varepsilon(A)$. При этом окрестность $\dot{V}(x_0)$ может получиться как симметричной, так и несимметричной, но из всякой несимметричной окрестности можно выделить симметричную $\dot{V}_\delta(x_0)$. Поскольку окрестность $\dot{V}(x_0)$ проколотая, т.е. не содержит точку x_0, то $x \neq x_0$, и в точке x_0 функция $f(x)$ может быть не определена.

Чтобы доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, достаточно найти множество $\{x\}$ тех значений x, для которых справедливо включение $f(x) \subset U(A)$ для любой окрестности $U(A)$. Если найденное множество $\{x\}$ является окрестностью x_0, то утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ справедливо, в противном случае оно неверно. В частности, если функция $f(x)$ в точке x_0 определена и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то множество $\{x\}$ будет содержать и точку x_0.

Приведённое определение предела применимо для любого класса функций. В этом разделе мы будем в основном заниматься числовыми функциями одного числового аргумента.

3.1. Исходя из определения предела, доказать:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$; д) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}\neq 2$; ж) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

Решение: а) утверждение $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ непосредственно следует из определения предела. Если окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ ($|x-x_0|<\varepsilon$) дана, то в качестве окрестности $\dot{V}_\delta(x_0)$ можно принять $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$, т.е. положить $\delta=\varepsilon$;

б) докажем, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$. По определению предела мы должны доказать, что для любой заданной окрестности $U_\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\varepsilon>0$ существует окрестность $\dot{V}(2)$ такая, что если $x\in\dot{V}(2)$, то $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, т.е. $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}\right)$, что равносильно следующим двум неравенствам:

$$-\varepsilon<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<+\varepsilon$$

или

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

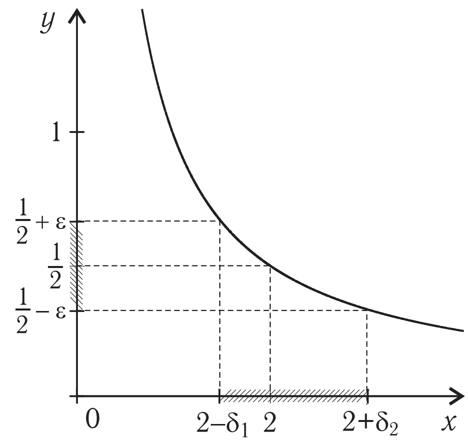


Рис. 3.1

Так как при достаточно малом ε все части этого неравенства положительны, то

$$\frac{2}{1+2\varepsilon}<x<\frac{2}{1-2\varepsilon}.$$

Очевидно,

$$\frac{2}{1+2\varepsilon}<2,\ \frac{2}{1-2\varepsilon}>2,$$

следовательно, множество $\left(\dfrac{2}{1+2\varepsilon},\dfrac{2}{1-2\varepsilon}\right)$ является окрестностью точки $x_0=2$ (несимметричной). Существование требуемой окрестности $\dot{V}(2)$ доказано (рис. 3.1).

Можно для наглядности эту окрестность записать в виде $\left(2 - \dfrac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}, 2 + \dfrac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right)$ и считать

$$\dot{V}(2) = \dot{V}_{\delta_1,\delta_2}(2), \text{ где } \delta_1 = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon},\ \delta_2 = \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}.$$

в) докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

По определению мы должны доказать, что для любой окрестности $U_\varepsilon(0)$ точки $y = 0$ существует окрестность $V(+\infty)$ элемента $+\infty$ такая, что если $x \in V(+\infty)$, то $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, или $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Так как $x \to +\infty$, то можно считать, что $x > 0$, поэтому знак модуля можно опустить и записать $\dfrac{1}{x} < \varepsilon$ или $x > \dfrac{1}{\varepsilon} = M$. Множество $x > M$ есть $V_M(+\infty)$ согласно определению окрестности элемента $+\infty$.

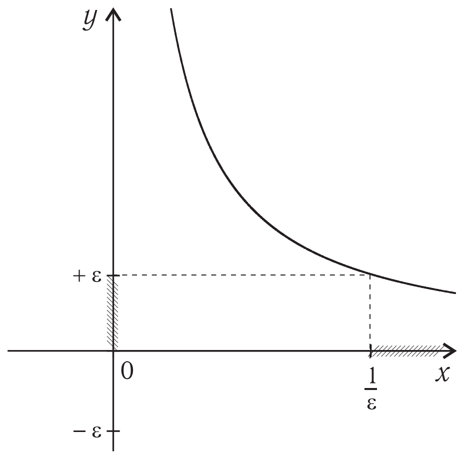


Рис. 3.2

Существование окрестности $V(+\infty)$, удовлетворяющей соответствующим условиям, доказано. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (рис. 3.2).

Доказательство равенств $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ предоставляем читателю.

Подчеркнём, что равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ равносильно двум равенствам: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$;

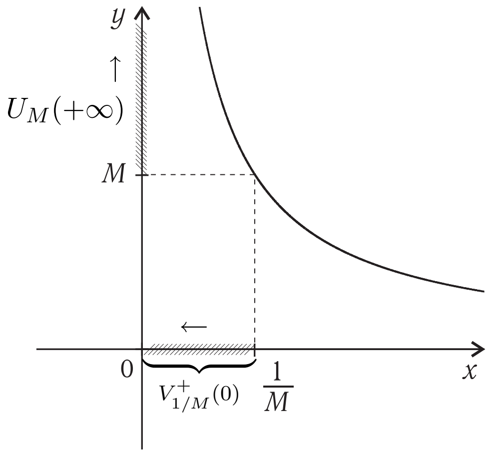


Рис. 3.3

г) докажем равенство

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Нужно доказать, что для любой окрестности $U_M(+\infty)$ существует правая полуокрестность $V^+_\delta(0)$ $(0<x<\delta)$ такая, что если $x\in V^+_\delta(0)$, то $\dfrac{1}{x}\in U_M(+\infty)$. Последнее означает, что $\dfrac{1}{x}>M$. Так как $x>0$, $M>0$, то $0<x<\dfrac{1}{M}$. Если положить $\delta=\dfrac{1}{M}$, то требуемая окрестность $V^+_\delta(0)$ найдена и равенство $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=0$ доказано (рис. 3.3).

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ (предлагаем проделать это самостоятельно);

е) докажем, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}\neq 2$. Предположим противное, т.е. что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}$ равен двум. Это означало бы: для любой окрестности $U_\varepsilon(2)$ существует окрестность $\dot V(1)$ такая, что если $x\in\dot V(1)$, то $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon(2)$, т.е. $\left|\dfrac{1}{x}-2\right|<\varepsilon$, или $2-\varepsilon<\dfrac{1}{x}<\varepsilon+2$.

Так как все части неравенства можно считать положительными, то $\dfrac{1}{2+\varepsilon} < x < \dfrac{1}{2-\varepsilon}$. Только для этих значений x выполняется $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon$. Но точка $x = 1$ в найденную окрестность $\left(\dfrac{1}{2+\varepsilon}; \dfrac{1}{2-\varepsilon}\right)$ при малом ε не входит, т.е. данное множество не является окрестностью точки 1. Таким образом, требуемая окрестность $\dot{V}(1)$ не существует, а потому $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x}$ не может равняться двум;

ж) докажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. Требуется показать, что для любой достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(4)$ существует окрестность $\dot{V}(2)$ точки 2 такая, что если $x \in \dot{V}(2)$, то $x^2 \in U_\varepsilon(4)$, т.е. $|x^2 - 4| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$, $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$. Так как $x \to 2$, то можно считать, что $x > 0$, при $x > 0$ функция $y = x^2$ монотонно возрастает, поэтому $\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon}$. Поскольку $x > 0$, то знак модуля можно опустить и записать $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$. Точка $x = 2$ принадлежит интервалу $(\sqrt{4-\varepsilon}; \sqrt{4+\varepsilon})$, т.е. этот интервал является окрестностью точки 2, удовлетворяющей требуемому условию, которую и принимаем в качестве $\dot{V}(2)$. Существование $\dot{V}(2)$ доказано, а этим доказано, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

3.2. Докажите самостоятельно, что

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{1}{x - x_0} = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0-0} \frac{1}{x - x_0} = -\infty.$$

Указание: сделать замену $x - x_0 = t$ и применить задачу 3.1.

3.3. Используя теоремы о пределе произведения суммы и частного, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$;

б) $$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = \lim_{x\to x_0} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = \\ = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} = \\ = \frac{a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n}{b_0x_0^m + b_1x_0^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x_0 + b_m},$$

где n и m — натуральные числа, a_i и b_i — константы, $b_0x_0^m + b_1x_0^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x_0 + b_m \neq 0$, x_0 — конечно.

Решение: а) можем записать: $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = \lim\limits_{x\to x_0} (x \cdot x \cdot \cdots \cdot x)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{x\to x_0} x \cdot \lim_{x\to x_0} x \cdot \cdots \cdot \lim_{x\to x_0} x = x_0^n;$$

б) функция $P_n(x)$ представляет собой сумму $(1+n)$ слагаемых, каждое из которых имеет конечный предел, например, $\lim\limits_{n\to\infty} a_0x^n = \lim\limits_{x\to x_0} a_0 \lim\limits_{x\to x_0} x_n = a_0x_0^n$. Поэтому б) следует из теоремы о пределе суммы;

в) следует из теоремы о пределе частного, суммы и произведения.

Функцию $P_n(x)$ в задаче 3.3 называют многочленом или полиномом порядка n (если $a_0 \neq 0$).

3.4. Вычислите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}(x^2+3x+4); \quad \text{б) } \lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-3}{2x^2+4x-5}.$$

Решение. На основе доказанного в задаче 3.3, п. б) можем записать: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x+4) = 2^2 + 3\cdot 2 + 4 = 14$;

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-3}{2x^2+4x-5} = \frac{3^2+2\cdot 3-3}{2\cdot 3^2+4\cdot 3-5} = \frac{12}{25}.$$

3.5. Найдите $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$.

Решение. В данном случае применить теорему о пределе частного невозможно, так как знаменатель обращается при $x_0 = 1$ в нуль. Заметим, что и числитель при $x_0 = 1$ также обращается в нуль. Получаем неопределённое выражение типа $0/0$. Мы уже подчёркивали, что в определении предела при $x \to x_0$

величина x никогда не принимает значение x_0. В нашем примере $x \neq 1$, а потому $x - 1 \neq 0$. Разлагая на множители числитель и знаменатель, получаем

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 20x + 15}{3x^2 - 15x + 12} = \lim_{x\to 1} \frac{5(x-1)(x-3)}{3(x-1)(x-4)}.$$

Поделим числитель и знаменатель на величину $x - 1$, отличную от нуля. Получим $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5(x-3)}{3(x-4)} = \dfrac{5(1-3)}{3(1-4)} = \dfrac{10}{9}$.

3.6. Найдите $A = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$.

Решение. Убеждаемся, что числитель и знаменатель в точке $x_0 = -3$ обращаются в нуль. По теореме Безу многочлены в числителе и знаменателе делятся на $x + 3$. Выполняя это деление, получаем

$$A = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x^2-6x-27)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2+2x-3)}{(x^2-6x-27)}$$

(числитель и знаменатель разделили на $x + 3 \neq 0$). Замечаем, что числитель и знаменатель опять обращаются в нуль при $x_0 = -3$. Находим

$$A = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-9)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-1)}{(x-9)} = \frac{-3-1}{-3-9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

3.7. Найдите $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+4}{3x+5}$.

Решение. Поделим числитель и знаменатель на x. Получим $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+4/x}{3+5/x}$. Применяя теорему о пределе частного и суммы и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x} = 0$, находим $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+4/x}{3+5/x} = \dfrac{2}{3}$.

3.8. Найдите $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4 + 2x^3 - 14}{5x^4 + x^3 + x^2 - 1}$.

Решение. Поделив числитель и знаменатель на x^4, получим $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7 + 2/x - 14/x^4}{5 + 1/x + 1/x^2 - 1/x^4}$.

Затем применяем теоремы о пределе суммы, произведения и частного. Учитывая, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0; \ \lim_{x\to\infty} \frac{14}{x^4} = 0; \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = 0,$$

получаем, $A = \dfrac{7}{5}$.

3.9. Найдите $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3 + 4x + 2}$.

Решение. Поделим числитель и знаменатель на x^4. Получим $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + 2/x^2 + 1/x^4}{1/x + 4/x^3 + 2/2x^4} = \infty$, поскольку числитель стремится к единице, а знаменатель — к нулю.

В некоторых случаях, встречающихся довольно часто, функция $f(x)$ может быть определена во всей окрестности $V(x_0)$, включая и x_0. Если при этом окажется, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0.

В задаче 3.3 мы доказали непрерывность многочлена. Доказаны следующие теоремы, которые мы будем применять при отыскании пределов.

Теорема 1. Элементарные функции $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны в каждой внутренней точке их области определения.

В граничных точках возможна односторонняя непрерывность. Эти точки подлежат дополнительному исследованию.

Теорема 2. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, то функция $z = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Для непрерывных функций в точке x_0 справедливы равенства:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(\lim_{x\to x_0} x)] = f[\varphi(x_0)],$$

т.е. символы f и $\lim\limits_{x\to x_0}$ для непрерывных функций перестановочны. Этим свойством мы будем широко пользоваться при отыскании пределов, например

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^4+3x+10} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(x^4+3x+10)} =$$

$$= \sqrt{81+9+10} = 10.$$

Использованы непрерывность функции $y=\sqrt{u}$ и теорема о пределе суммы.

3.10. Найдите $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{\frac{9x^2+1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= 1-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{1}{x^2}\right)} = 1-3 = -2.$$

Напомним, что $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & \text{если } a>0; \\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a<0. \end{cases}$

По этой причине $\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x} = -\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x^2}}$, поскольку $x\to-\infty$, а потому $x<0$.

3.11. Докажите самостоятельно: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x} = 4$.

Из задач 3.10 и 3.11 следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$ не существует.

3.12. Найдите $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$.

Решение. Замечаем, что числитель и знаменатель при $x \to 1$ стремятся к нулю, т.е. имеем неопределённость типа $0/0$. Умножим числитель и знаменатель на множители, сопряжённые соответствующим выражениям:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{7(1-x)}{8(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2+2}{3+3} = \frac{7}{12}.$$

Мы воспользовались непрерывностью функции $\sqrt{x}$ и теоремой о пределе частного и суммы.

3.13. Найдите $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$.

Решение. Применим формулу $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+ +b^2)$. Полагая $a = \sqrt[3]{2x-1}$, $b = \sqrt[3]{3x-2}$, умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы чисел a и b. Получим

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-1-3x+2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(3x-2)}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}} = -\frac{1}{3}.$$

(Применили теоремы о пределе частного, суммы и произведения, а также непрерывность функций u^2 и $\sqrt[3]{u}$.)

3.14. Найдите $\lim\limits_{x\to 0+0} 3^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 3^{1/x}$.

Решение. Сделаем замену $t = 1/x$. Если $x \to 0+0$, то $t \to +\infty$, если $x \to 0-0$, то $t \to -\infty$ (см. задачу 3.1). По свойству показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ получаем

$$\lim_{x\to 0+0} 3^{1/x} = \lim_{t\to +\infty} 3^t = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0} 3^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} 3^t = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{3^t} = 0.$$

Как видим, предел $\lim\limits_{x\to 0} 3^{1/x}$ не существует.

3.15. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{1/x}-1}{7^{1/x}-1}$.

Решение. Найдём правый и левый пределы: $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{5^{1/x}-1}{7^{1/x}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{5^{1/x}-1}{7^{1/x}-1}$. Сделаем замену $t = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{5^{1/x}-1}{7^{1/x}-1} = \lim_{t\to +\infty} \frac{5^t-1}{7^t-1} = \lim_{t\to +\infty} \frac{(5/7)^t - 1/7^t}{1-1/7^t} = 0.$$

Мы воспользовались свойством показательной функции $y = a^x$: при $a < 1$ справедливо $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$, при $a > 1$ — $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$, а также теоремой о пределе частного.

Аналогично получаем

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{5^{1/x}-1}{7^{1/x}-1} = \lim_{t\to -\infty} \frac{5^t-1}{7^t-1} = 1.$$

(По свойству показательной функции при $a > 1$ следует, что $\lim\limits_{x\to -\infty} a^t = 0$.) Мы показали, что существуют конечные правый и левый пределы, но они не равны. Следовательно, предел не существует.

В математическом анализе важное значение имеют два класса функций: бесконечно малые и бесконечно большие. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty, +\infty, \infty$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, то функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно большая при $x \to x_0$. Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Теорема 4. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на ограниченную в окрестности точки x_0 функцию есть функция бесконечно малая при $x \to x_0$.

Теорема 5. Произведение функции, имеющей конечный предел, отличный от нуля при $x \to x_0$, на бесконечно большую функцию при $x \to x_0$ есть функция бесконечно большая.

Все определения и теоремы переносятся на случай $x \to \pm\infty, \infty$. Более подробно бесконечно малые и бесконечно большие функции будут рассмотрены в разделе 8.

3.16. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.

Решение. Функция $f_1(x) = x$ бесконечно малая при $x \to 0$. Для функции $f_2(x) = \sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ имеем $|f_2(x)| = \dfrac{1}{2}\left|\sin\dfrac{2}{x}\right| \le \dfrac{1}{2}$, т.е. функция $f_2(x)$ ограничена. Следовательно, имеем произведение бесконечно малой при $x \to 0$ функции на ограниченную, а потому (по теореме 4) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

Заметим, что применить теорему о пределе произведения в данном случае невозможно, так как $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ не существует, что будет доказано позже.

3.17. Найдите $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}$.

Решение. Функция $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ бесконечно большая при $x \to 1+0$, так как функция $u = x-1$ бесконечно малая, $\lim\limits_{x\to 1+0} = \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{3}{4}$. Имеем произведение бесконечно большой функции на функцию с конечным пределом при $x \to 1+0$. По теореме 5 функция $\dfrac{1}{x-1}\dfrac{x+2}{x+3}$ бесконечно большая. А так как $\dfrac{3}{4} > 0$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}\dfrac{x+2}{x+3} = +\infty$.

Итак, мы познакомились с понятием предела функции $f(x)$. Если функция в точке x_0 непрерывна, то отыскание предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не представляет труда. Он равен $f(x_0)$. Если же свойство непрерывности нарушено, то могут возникнуть неопределённости вида $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞. С первыми двумя типами неопределённостей мы уже встретились. Другие рассмотрим позднее.

Мы пока привели примеры отыскания пределов функций $f : X \subset R \to Y \subset R$. Пределы функций $f : X \subset R_n \to Y \subset R$ будут рассмотрены в разделе 10.

Задачи для самостоятельного решения

3.18. Исходя из определения предела, докажите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$;

д) $\lim\limits_{x\to 1-0}\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} \neq 2$; ж) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.

3.19. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+4x-5)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^4-8x^2+28}{x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+8}{x^2+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x}{x-4}$,

обосновывая ссылками на соответствующие теоремы каждую операцию.

3.20. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+10x+24}{x^2+9x+18}$;

д) $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^3+6x^2-45x-162}{x^3+25x^2+204x+540}$;

е) $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{x^3+22x^2+140x+200}{x^3+23x^2+160x+300}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^3-x^2-44x-96}{x^2-17x+72}$.

3.21. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-\sqrt{8x}}{2-\sqrt[3]{4x}}$.

Указание. В примере а) сделать замену $x=t^{12}$, в примере б) — $x=t^{15}$. Использовать формулу $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+$ $+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})$.

3.22. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-7x^2+4x+1}{6x^4+5x^3-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2}\right)^3$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+1}{x^3+x^2+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+1}{2x^2+1}$.

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5\sqrt{x^3}+7\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}}{13\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x^2}+17\sqrt{x^3}}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{17x^2+18x+2}-\sqrt[3]{10x^2+4x-13}}{\sqrt[3]{x^2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16}{\sqrt[4]{x}}\sqrt[4]{\dfrac{(16x-5)x}{256x-3}}$.

3.23. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{16x^6+5}}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{16x^6+5}}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x-17\sqrt{x^2-15x-17}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+16\sqrt{x^2-x+8}}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+10\sqrt{x^2-4x+10}}{x}$.

3.24. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

3.25. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

Указание. В примере в) прибавить и вычесть x.

3.26. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to3+0}2^{\frac{1}{x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to3-0}2^{\frac{1}{x-3}}$; в) $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}+1}{4^{\frac{1}{x-2}}+2}$.

4. Числовые и векторные последовательности

Последовательность — это функция натурального аргумента $f(n) = y_n : N \to X$. Если $X \subset R$, имеем числовую последовательность, если $X \subset R_n$, то получаем векторную последовательность, если X — некоторое множество функций, то получаем функциональную последовательность, и т.д. В этом разделе мы будем изучать числовые и векторные последовательности. После изучения теории вы легко сможете привести любое число примеров числовых и векторных последовательностей, например: $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dots\right\}$ — числовая последовательность; $\left\{\dfrac{n+1}{n}; \dfrac{1}{n}\right\}$ — векторная последовательность: $y_1 = (2;1), y_2 = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right), y_3 = \left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right), \dots$

Вы заметили, что задание векторной последовательности $y_n = \{y_n^{(1)}; y_n^{(2)}; \dots; y_n^{(k)}\}$ сводится к заданию k различных числовых последовательностей $\{y_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, называемых координатными.

Множество натуральных чисел имеет единственную предельную точку $+\infty$, т.е. может быть только случай $n \to +\infty$. Обычно знак «+» опускают и пишут $n \to \infty$. Определение предела последовательности дословно повторяет определение предела функции при $x \to +\infty$. Напомним, что $V_M(+\infty)$-окрестность элемента $+\infty$ во множестве натуральных чисел является множеством всех натуральных чисел, больших M. Число A называют пределом числовой последовательности $\{y_n\}$, если для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ числа A найдётся $V_M(+\infty)$-окрестность символа $+\infty$ такая, что для любого $n \in V_M(+\infty)$, т.е. для всех $n > M$, выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(A)$, т.е. $|y_n - A| < \varepsilon$. Пишут $A = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Аналогично определяется предел векторной последовательности. Очень важна для дальнейшего теорема о существовании предела векторной последовательности, из которой следует, что для отыскания предела векторной последовательности нужно найти пределы её координатных числовых последовательностей [6, с. 91, теорема 1].

4.1. Исходя из определения предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Решение. Пусть $U_\varepsilon(0)$ любая ε-окрестность точки 0. Требуется согласно определению предела последовательности найти окрестность символа $+\infty$ такую, что если $n\in V_M(+\infty)$, т.е. $n>M$, то должно выполняться $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, т.е. $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ или $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Видим, что можно принять $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$. Если выполнено $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Теоремы о пределе суммы, произведения и частного, сформулированные для функций непрерывного аргумента, переносятся и на последовательности.

Применяя результаты решения задачи 4.1 и теорему о пределе произведения последовательностей, легко находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Учитывая непрерывность функции $f(x)=x^\lambda$, $\lambda>0$, и применяя теорему о пределе частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\lambda}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n^\lambda}=0 \text{ при } \lambda>0.$$

4.2. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+4}{n^2+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{n^3+5n^2+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n+1}{n^2+n+5}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+2n^3+3}{2n^4+3n^2+2}\right)^2$.

Решение. Подобные пределы находят теми же методами, что и пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

В примерах а), б), в) делим числитель и знаменатель на старшую степень величины n.

Получаем:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n+4}{n^2+7} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5/n+4/n^2}{1+7/n^2} = 2$

(применили теорему о пределе частного, суммы и то, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0$);

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{n^3+5n^2+4} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n-2/n^2+3/n^3}{1+5/n+4/n^3} = 0;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+4n+1}{n^2+n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4/n^2+1/n^3}{1/n+1/n^2+5/n^3} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) \frac{1}{1/n+1/n^2+5/n^3} = \infty$$

как предел произведения последовательности, имеющей конечный предел, на бесконечно большую последовательность. Второй сомножитель есть бесконечно большая последовательность, так как последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}\right\}$ — бесконечно малая (теорема 3);

г) учитывая непрерывность функции $y = x^2$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+2n^3+3}{2n^4+3n^2+2}\right)^2 = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^3+3}{2n^4+3n^2+2}\right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+3/n^4}{2+3/n^2+2/n^4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

4.3. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2-1}}{n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3+2n^2}}{(n+3)}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2-1}}{n+3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \frac{\sqrt[3]{(8n^3+2n^2-1)/n^3}}{(n+3)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8+2/n-1/n^3}}{1+3/n} = 2$$

(поделили числитель и знаменатель на n, величину n подвели под знак корня, применили теорему о пределе частного, использовали непрерывность функции $\sqrt[3]{u}$, применили теорему о пределе суммы);

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+2n^2}}{(n+3)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{n^3+2n})/n}{(n+1)/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3/n^4+2n/n^4}}{1+1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{1/n+2/n^3}}{1+1/n} = 0$$

(обоснование всех операций сделать самостоятельно).

4.4. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+8}-n)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+4})$.

Решение этих примеров основано на применении формул $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+8}-n) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+6n+8}-n)(\sqrt{n^2+6n+8}+n)}{\sqrt{n^2+6n+8}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n+8-n^2}{\sqrt{n^2+6n+8}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(6n+8)/n}{(\sqrt{n^2+6n+8}+n)/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6+8/n}{\sqrt{1+6/n+8/n^2}+1} = \frac{6}{1+1} = 3;$$

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+4}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n^3+4}\right)^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1-n^3-4}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} = 0.$$

В приведённых примерах мы имели неопределённость вида $\infty-\infty$. При этом может получиться предел конечный, отличный от нуля, равный нулю или бесконечный.

Приведём примеры отыскания пределов, используя теоремы о переходе к пределу в неравенствах и о существовании предела монотонных ограниченных последовательностей [6, п. 3.5.2, теорема 2].

4.5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

Решение. Очевидно неравенство

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}/n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}=1.$$

По теореме о «зажатой» функции [6, п. 3.5.5, теорема 3] получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

4.6. Докажите, что последовательность

$$x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots,$$

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},\ldots$$

имеет предел и найдите его.

Решение. Очевидно, $x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$, т.е. данная последовательность монотонно возрастает. Докажем, что она ограничена сверху.

Имеем равенство $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$. Так как $x_1<2$, то

$$x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2,\ \ x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2,\ldots$$

Если доказано, что $x_{n-1}<2$, то $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$. Методом индукции мы доказали, что $x_n<2$. Итак, данная последовательность монотонно возрастает и ограниченна сверху, а потому имеет предел.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Так как $x_n^2=2+x_{n-1}$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $a^2=2+a$. Решая это квадратное уравнение, находим $a_1=2$, $a_2=-1$.

Поскольку $a\geq 0$ (все члены последовательности неотрицательны), то $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

4.7. Найдите:

а) $$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\dfrac{n^2}{n^2+4}\\ \dfrac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}\end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+4}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}\mathbf{j}\right);$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{n+1}\mathbf{i}+\frac{1-4n}{2n+1}\mathbf{j}+\frac{n+5}{n-6}\mathbf{k}\right|.$$

Решение: а) имеем векторную последовательность. Её пределом согласно теории является вектор, координаты которого равны пределам координатных последовательностей. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\dfrac{n^2}{n^2+4}\\ \dfrac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+4}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+4/n^2}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+2/\sqrt{n}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1/3\end{bmatrix} = \mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j};$$

б) пусть дан вектор $\mathbf{a}_n = \{x_n, y_n, z_n\}$, тогда $|\mathbf{a}_n| = \sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}$. Учитывая, что функции $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\varphi(x) = x^2$ непрерывны, получаем

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \sqrt{\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}y_n^2+\lim_{n\to\infty}z_n^2}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{n+1}\mathbf{i}+\frac{1-4n}{2n+1}\mathbf{j}+\frac{n+5}{n-6}\mathbf{k}\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-4n}{2n+1}\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n-6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+1/n}\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1/n-4}{2+1/n}\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+5/n}{1-6/n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Используемое нами определение предела функции называют определением на языке окрестностей, или определением Коши. Известно и другое, эквивалентное первому, определение предела на языке последовательностей, или определение Гейне. Оно приведено в [6, п. 3.5.3]. Напомним его. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и x_0 его предельная точка. Говорят, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ из X, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции имеет пределом точку A.

Определение Гейне часто используют для доказательства того, что предел не существует.

4.8. Докажите, что пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$, б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{2x-y}$ не существуют.

Решение: а) извлечем две последовательности точек, сходящиеся к нулю: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2n\pi}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}\right\}$.
Находим, что $\cos x_n = \cos(2n\pi) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\cos y_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos y_n = 0$. Так как эти пределы не равны, то по определению Гейне предел не существует;

б) будем приближаться к точке $(0, 0)$ по последовательности точек $(x_n, 0)$, $x_n \to 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{2x_n} = \dfrac{1}{2}$.

Возьмём другую последовательность, сходящуюся к $(0; 0)$, например $(0; y_n)$, $y_n \to 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(0, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{-y_n} = -1$. Так как $\dfrac{1}{2} \neq -1$, то по определению Гейне предел б) не существует.

Задачи для самостоятельного решения

4.9. Исходя из определения предела последовательности, докажите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+3}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+4}=0$.

4.10. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+5n^2+n+1}{n^3-2n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+4}{n^3+5n+3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2n^2+1}{2n^3+6}\right)^3$.

4.11. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16n^4+2n^3+3}}{n+5}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+5}-2}{\sqrt{18n+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^{10}+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

4.12. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+5})-\sqrt{n})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+4n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+6n^2+2})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2})$.

4.13. Используя теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, докажите существование следующих пределов:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\dots+\dfrac{1}{3^n+n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dots+\dfrac{1}{n!}\right)$

$(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)$.

4.14. Докажите существование и найдите предел последовательности $x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ радикалов}}$, $a>0$.

4.15. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{2}{24}+\dots+\dfrac{2}{(n-5)(n-3)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

Указание. Применить следующие соотношения:

$$\frac{2}{(n-5)(n-3)}=\frac{1}{(n-5)}-\frac{1}{(n-3)},$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right).$$

4.16. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{4n}{8n+1}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{3n^2-1}\sin\dfrac{n+1}{2n+3}+\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}\right)$.

4.17. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n}{1+1/3+1/9+\cdots+1/3^n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$.

Указание. Использовать формулу суммы членов арифметической прогрессии $a_1+a_2+\cdots+a_n = \dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$ и геометрической прогрессии $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+aq^n+\cdots = \dfrac{a}{1-q}$, $|q|<1$.

4.18. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a>p$ $(a<q)$, то начиная с некоторого номера будут выполняться неравенства $x_n > p$ $(x_n < q)$.

4.19. Докажите справедливость неравенства
$a^n > \dfrac{(a-1)^2}{4}n^2$ при любом $a>1$ и любом $n>2$.

Указание. Использовать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots +$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}b^n,$$

применив её к соотношению $a^n = (1+\lambda)^n$ $(\lambda>0)$.

4.20. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Указание. Использовать результаты предыдущей задачи.

4.21. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ $(a>1)$.

4.22. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a(x_n + C)}{\log_a x_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $a > 1$, $C = \text{const}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg n + \lg(n+1)}{\lg(n+2) + \lg(n+3)}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 n + \log_3 n}{\log_3 n + \log_4 n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n^{1000}+1)}{n+2}$.

Указание. В примере в) перейти к другому основанию логарифма по формуле $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

4.23. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

4.24. Найдите пределы следующих векторных последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2} \end{bmatrix}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \dfrac{4n^6+n-1}{8n^6+7} \\ \dfrac{\sqrt[5]{32n^5+4n+3}}{n+2} \end{bmatrix}$.

4.25. Используя определение предела функции на языке последовательностей, докажите, что следующие пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+4y}{5x-3y}$.

5. Первый замечательный предел

Предел вида $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ получил название первого замечательного предела. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$, где $u(x)$ — любая функция, такая, что $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$. Действительно, сделав замену $u(x)=t$, получим $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$. Обратите внимание на то, что в первом замечательном пределе раскрывается неопределенность $0/0$, причем аргумент синуса стремится к нулю, и в знаменателе находится точно этот аргумент. Непосредственным следствием первого замечательного предела являются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(мы использовали теорему о пределе произведения и непрерывность функции $\cos x$, из которой следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos\lim\limits_{x\to 0}x=1$).

Для отыскания второго предела сделаем замену $\arcsin x = y$, $x=\sin y$. Если $x\to 0$, то $y\to 0$, что следует из непрерывности функции $\arcsin x$.

Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{(\sin y)/y}=1.$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$ (замена $\operatorname{arctg} x=y$).

5.1. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{5\sin u}{u} = 5,\ (u = 5x)$;

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{5x}\cdot 5} = \frac{3}{5};$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\arcsin 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{4x}\cdot 4} = \frac{3}{4};$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 2;$$

д) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 2}{2}.$$

Многие примеры можно решить проще, если воспользоваться следующим очевидным утверждением.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ (по теореме о пределе произведения).

Например:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(x-1)} = \frac{1}{4}.$$

5.2. Найдите следующие пределы, сделав подходящую замену:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$.

Решение: а) поскольку непосредственное применение первого замечательного предела невозможно, так как аргумент синуса не стремится к нулю, то сделаем замену $x=y+\pi$. Когда $x\to\pi$, то $y\to 0$. Теперь

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(3y+3\pi)}{\sin(2y+2\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2};$$

б) используем формулу тригонометрии $\cos x-\sin x=$ $=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$, затем делаем замену $y=\dfrac{\pi}{4}-x$, $x=\dfrac{\pi}{4}-y$.

Имеем $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin y}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin y}{\sin 2y}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

в) $$\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x+\pi/6}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-\pi/6}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{2\sin\left(\dfrac{y+\pi/3}{2}\right)\sin\dfrac{y}{2}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2\sin\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{y}{2}}=2.$$

Сделали замену $y = x - \dfrac{\pi}{6}$, использовали формулу

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

и равенство $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

5.3. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}[6(x-1)] - \operatorname{tg}(x-1)}{x-1}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 8x}{x-\sin 2x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin 2x}$.

5.4. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\sin x-\cos x}{1+3\sin x-\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+x^2)-1}{\sin x^2}$.

5.5. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos(x+\pi/6)}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi/2-x)\operatorname{tg}x$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{1-4\sin^2 x}$; е) $\lim\limits_{x\to-\pi/3}\dfrac{\sin(x+\pi/3)}{1-8\cos^3 x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-5}\sin\dfrac{x+5}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{10}$; з) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos(x+\pi/4)}$.

5.6. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{\sin 2x}-1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-\sqrt[3]{3x}}{\sqrt{\operatorname{tg}3x/2}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{|x|}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

Указание. Рекомендуется использовать известные формулы тригонометрии:

$$1-\sin x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right);\qquad 1\pm\operatorname{tg}x=\frac{\sin\left(\pi/4\pm x\right)}{\cos(\pi/4)\cdot\cos x}.$$

6. Второй замечательный предел

Каждый из пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ (n – натурально), $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ называют вторым замечательным пределом. Здесь e – число Эйлера, $e=2{,}718281828\ldots$

6.1. Докажите справедливость следующих утверждений:
а) если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то
$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e; \tag{1}$$
б) если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\varphi(x)$ существует, то
$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\varphi(x)}; \tag{2}$$
в) если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\varphi(x)$ существует, то
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\varphi(x)}. \tag{3}$$

Действительно, положив в (1) $\alpha(x)=t$, получим:
$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$
Соотношение (2) следует из (1), так как
$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\varphi(x)}.$$
Последняя операция является следствием непрерывности экспоненты, строгое обоснование мы опускаем.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$ и утверждение (3) следует из (2) при $\alpha(x)=f(x)-1$.

Заметим, что во втором замечательном пределе раскрывается неопределенность типа 1^∞. Обратим внимание на то, что $\lim\limits_{x\to x_0}1^{\varphi(x)}=1$. Этот предел не содержит никакой неопределенности и в случае, если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, что следует из определения предела на языке последовательностей.

В следующей задаче рассмотрены случаи, когда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\varphi(x)}$ неопределенности не содержит.

6.2. Докажите справедливость следующих утверждений:

а) если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 и $f(x)>0$, то
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{\varphi(x)}=f(x_0)^{\varphi(x_0)}; \tag{4}$$

б) если либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q < 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = +\infty$, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q > 1$, но $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = 0; \tag{5}$$

в) если либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q < 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = -\infty$, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q > 1$, но $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \infty. \tag{6}$$

Справедливость соотношения (4) следует из непрерывности степенно-показательной функции. Доказательство формул (5) и (6) опустим. (Интуитивно они очевидны.)

Формулы (1) — (3) и (4) — (6) справедливы и при $x \to \infty, -\infty, +\infty$.

Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ может привести также к неопределенностям 0^0, ∞^0, которые мы рассмотрим позднее.

6.3. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x^2+1}$.

Решение: а) так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right) = 0$, то можем положить в соответствии с (2) $\alpha(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $\varphi(x) = \dfrac{2}{x}$. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2+3x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x+1}\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(x+3)}{x+1}} = e^6;$$

б) полагаем в соотношении (2) $\alpha(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, что возможно, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$. Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{x+1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}} = e^0 = 1;$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x^2+1} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+1}} = 0$, так как

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1/x}{1+1/x} = -\infty.$$

Все четыре рассмотренных предела содержат неопределённость 1^∞. Раскрывая эту неопределённость, можно получить самые разнообразные ответы, включая $0, 1$ и ∞.

6.4. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x-3}{4x-18}\right)^{\frac{2}{5-x}}$.

Решение: а) так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x+3} = 1$, то имеем право применить формулу (3), положив в ней $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$, $\varphi(x) = x+4$. Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}-1\right)(x+4)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-(x+4)}{x+3}} = e^{-1} = 1/e;$$

б) поскольку $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-3}{4x-18} = 1$, то также применима формула (3). Находим

$$\lim_{x\to5}\left(\frac{x-3}{4x-18}\right)^{\frac{2}{5-x}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{x-3}{4x-18}-1\right)\frac{2}{5-x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to5}\frac{(15-3x)\cdot2}{(5-x)(4x-18)}} = e^3.$$

6.5. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2)^{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)^{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+1}{8x+5}\right)^{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{5x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Решение: а) так как $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2) = 3$, $\lim\limits_{x\to1}(x^3+1) = 2$ и функции $f(x) = x^2+2$, $\varphi(x) = x^3+1$ непрерывны в точке $x = 1$, то $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2)^{x^3+1} = 3^2 = 9$ (см. (4));

б) находим $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$, следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)^{x-2}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{8x+5}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+1}{8x+5}\right)^{x^3}=+\infty$ (см. (6));

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+1}{5x^2+2}=\dfrac{4}{5}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{5x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=0$ (см. (5)).

Задачи для самостоятельного решения

6.6. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\left(1+\dfrac{x^2-4}{x+3}\right)^{\frac{1}{\sin(x-2)}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 4x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{x-1}{x^3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to3+0}\left(1+\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-3)}}$;

е) $\lim\limits_{x\to4}\left(1+\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+1}\right)^{\frac{x+13}{x^2-6x+8}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\left(1+\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}\right)^{\frac{16}{x^2-1}}$.

6.7. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{5x^2-2x+1}\right)^{4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{x-\pi}}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)^{\frac{4}{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{8x-14}{3x-4}\right)^{\frac{24}{x^3-8}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+6}{x^2+4}\right)^{x^4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-6}\right)^{x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

и) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Указание: в примере б) использовать формулу

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

6.8. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{5x+4}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+1}{3x+2}\right)^{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+3}{2x+1}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8x^2+3x+1}{16x^2+7}\right)^{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3+2x-3}{x^3-5x-6}\right)^{\frac{\operatorname{tg}2x}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}\right)^{\frac{\arcsin^2(x-3)}{(x-3)^2}}$.

Используя число e, вводят ряд новых функций:

e^x, называемую экспонентой;

$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус;

$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ — гиперболический тангенс;

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — гиперболический котангенс.}$$

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ называют гиперболическими. Находят применение и функции, обратные гиперболическим: $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arcth} x$.

6.9. Докажите:

а) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

б) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

в) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$;

г) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

д) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

е) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$;

ж) $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2}$;

з) $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$;

и) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2}$.

Как видим, гиперболические функции по свойствам очень напоминают тригонометрические функции. Гиперболические функции применяются во многих задачах, в частности при построении неевклидовых геометрий.

7. Следствия второго замечательного предела

Используя непрерывность показательной и логарифмической функций, легко доказать равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$.

Заметим, что во всех этих пределах имеется неопределённость типа $0/0$.

7.1. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то существуют пределы:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=\log_a e; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=1; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a; \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[1+\alpha(x)]^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu. \tag{5}$$

Решение. Сделаем замену в (1) $\alpha(x)=t$. Если $x\to x_0$, то $t\to 0$. Получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}=\log_a e$$

по первому следствию из второго замечательного предела. Аналогично доказываются соотношения (2)—(5).

Формулы (1) — (5) сохраняются и при $x\to\pm\infty,\infty$.

7.2. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-1}{\varphi(x)}$, то верны следующие соотношения:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a f(x)}{\varphi(x)}=\log_a e\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{\varphi(x)}; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)]^{\mu}-1}{\varphi(x)}=\mu\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{\varphi(x)}. \tag{7}$$

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$. Можем записать $f(x)=1+\alpha(x)$. Теперь

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\log_a e\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{\varphi(x)}.$$

Использовали формулу (1) и теорему о пределе произведения. Утверждение (7) доказывается аналогично.

Если окажется, что предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-1}{\varphi(x)}$ не существует, то пределы (6) и (7) также не существуют.

7.3. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\varphi(x)} = \ln a \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}; \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^{\alpha(x)}-1}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}. \tag{9}$$

Решение. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} \cdot \dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \ln a \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

При этом мы использовали формулу (3) и теорему о пределе произведения. Соотношение (8) доказано. Равенство (9) следует из (8) при $a = e$.

В задачах 7.2 и 7.3 случаи $x \to \infty, -\infty, +\infty$ не исключаются. Заметим, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$, $A \neq 0$, то в пределах задач 7.2 и 7.3 неопределённости нет и соответствующие пределы будут равняться нулю. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует, но функция $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ ограничена в окрестности x_0, то соответствующие пределы также будут равны нулю по теореме о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

Как видим, пределы (6), (7), (8) и (9) содержат неопределённость типа $0/0$ только при $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$.

При решении примеров с использованием следствий из второго замечательного предела можно либо использовать задачи

7.1—7.3, либо делать преобразования в каждом отдельном случае, подобно тому как это сделано в задачах 7.1—7.3 в общем случае.

7.4. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+\operatorname{tg}^3 x)}{\operatorname{tg}^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin^3 x}-1}{\sin^3 x}$.

Решение: а) все предложенные пределы являются частным случаем пределов, рассмотренных в задаче 7.1. Можно положить $\alpha(x)=\operatorname{tg}^3 x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}^3 x=0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\operatorname{tg}^3 x)}{\operatorname{tg}^3 x}=\log_a e;$$

б) в этом случае $\alpha(x)=\sin^2 x$, так как $\sin^2 x\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}=\ln 3$ (см. (3));

в) на основании предела (5) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^3 x}-1}{\sin^3 x}=\frac{1}{3}$$

(здесь $\alpha(x)=\sin^3 x$ и $\sin^3 x\to 0$ при $x\to 0$).

7.5. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+5x}{1+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2+4x-4)}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}x\cdot\ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{5}{x}\right)$.

Решение: а) положим $f(x)=\dfrac{1+5x}{1+4x}$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, $\varphi(x)=$ $=x$. На основании формулы (6) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+5x}{1+4x}=\log_e e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1+5x}{1+4x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+4x)}=1;$$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+4x-4)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-4-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1} = 6,$

в этом примере можно положить $f(x) = x^2+4x-4$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-4) = 1$, и применить формулу (6);

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{5}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{5}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}5t}{t} = 5,$

где $t = \dfrac{1}{x}$, $\alpha(x) = \operatorname{tg}\dfrac{5}{x}$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.

7.6. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-3^3}{x^2-9} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^3(3^{x-3}-1)}{(x-3)(x+3)} = 3^3\ln 3\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x+3)} = \dfrac{27}{6}\ln 3 = \dfrac{9}{2}\ln 3;$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 4.$

Здесь $\alpha(x) = x^2-1$, $\varphi(x) = \sqrt{x}-1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{4+x^2}-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{4+x^2}+2)\sin^2 x}{4+x^2-4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}(\sqrt{4+x^2}+2) = 4.$

7.7. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^{\mu} x - 1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$.

Решение: а) обозначим $f(x) = \cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, то можем применить формулу (7). Получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^{\mu} x - 1}{x^2} = \mu \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \mu \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = -\frac{\mu}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} - 13 = \frac{1}{6}$$

(так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$).

7.8. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{\ln(x^2 - 5x + 7)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{\ln(x^2 - 5x + 7)} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{e^2(e^{x-2} - 1)}{\ln[1 + (x^2 - 5x + 6)]} = e^2 \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} = -e^2;$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \dfrac{ax}{2}}{-2\sin^2 \dfrac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.9. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3(1+4x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{5x} - 1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+3x} - 1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+5x)}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)^{2/3} - 1}{x}$.

7.10. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\sin^2 x)}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{2\operatorname{tg}^3 x}-1}{\operatorname{tg}^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x^4}-1}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(1+\operatorname{arctg}^2 x)}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+3\operatorname{tg}^2 x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

7.11. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+5}{x-3} \ln\dfrac{4x-1}{2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} (4x^3+1)\ln\dfrac{x^4-2x+2}{x^4+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{5x+1}{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3}{4x-8}\log_4\dfrac{5x+3}{6x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^2+5)\ln\dfrac{x^3+3x-4}{x^3+x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x}\ln\dfrac{2x+1}{6x+1}$.

7.12. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin 4x}-1}{\operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-4}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{5x-5}-1}{\sqrt{5x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{\operatorname{tg} 4x}-1}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{\sqrt[3]{3x^2}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x-6}-1}{x^2-5x+6}$.

7.13. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^x}{e^{\sin 2x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{e^x-e^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\sin^4 x}-1}{e^{x^4}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-6x+10)}{\sin^2 4(x-3)}$.

7.14. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{e^{x-2}-1}{|x-2|}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{\sqrt{(x-3)^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^3(x-2)}-1}{|(x-2)^3|}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; з) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

к) найдите $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{при } x<0,\\ \dfrac{\ln(1+3x)}{x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Указание. В примере д) использовать задачу 4.21.

8. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

8.1. Докажите, что следующие функции являются бесконечно малыми:

а) $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2+4}$ при $x\to 1$;

б) $f(x)=(x-2)^3\sin^2\dfrac{1}{x-2}$ при $x\to 2$.

Решение: а) так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+4}=0$, то по определению функция $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+4}$ бесконечно малая при $x\to 1$;

б) функция $f(x)$ представима в виде произведения двух функций: $f_1(x)=(x-2)^3$ и $f_2(x)=\sin^2\dfrac{1}{x-2}$. Функция $f_1(x)$

бесконечно малая при $x \to 2$, а поскольку $|f_2(x)| \leq 1$ при любом x, то функция $f(x)$ бесконечно малая по теореме о произведении бесконечно малой и ограниченной функций.

8.2. Докажите, что следующие функции являются бесконечно большими:

а) $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2+4}{(x-1)^2}$ при $x \to 1$,

б) $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3 \sin^2 \dfrac{1}{x-2}}$ при $x \to 2$.

Решение. В задаче 8.1 мы показали, что функции $f(x) = \dfrac{1}{\varphi_1(x)}$ и $f(x) = \dfrac{1}{\varphi_2(x)}$ являются бесконечно малыми при $x \to 1$ и $x \to 2$ соответственно. По теореме о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются бесконечно большими.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, то при $C \neq 0$, $C \neq \infty$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости. В частности, при $C = 1$ они называются эквивалентными. В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Если $C = 0$, то говорят, что бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\beta(x)$, а при $C = \infty$ — бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет более низкий порядок малости по сравнению с $\beta(x)$. Если этот предел не существует, то бесконечно малые называются несравнимыми.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^r} = C$, $C \neq 0$, $C \neq +\infty$, $r > 0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка r относительно бесконечно малой $\beta(x)$. При этом бесконечно малая $C[\beta(x)]^r$ называется главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$. Заметим, что $\alpha(x) \sim C[\beta(x)]^r$. Обычно в качестве $\beta(x)$ берут бесконечно малую $(x - x_0)$.

Аналогично сравнивают и бесконечно большие функции.

8.3. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)^3$ имеет более высокий порядок малости при $x \to 1$ по сравнению с функцией $\alpha(x) = x - 1$.

Решение. Находим $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x-1)^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x-1)^3}{(x-1)^3}(x - 1)^2 = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x-1)^3}{(x-1)^3} = 1$. Следовательно, по определению функция $f(x)$ бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\beta(x) = x - 1$.

8.4. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \to 0+0$ имеет более низкий порядок малости по сравнению с $\alpha(x) = x$.

Решение. Находим $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}} = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

8.5. Докажите, что бесконечно малые $f(x) = \sqrt{4 + (x-2)^2} - 2$ и $\alpha(x) = (x-2)^2$ имеют одинаковый порядок малости при $x \to 2$.

Решение. Находим $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4+(x-2)^2} - 2}{(x-2)^2} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4 + (x-2)^2 - 4}{(x-2)^2(\sqrt{4+(x-2)^2} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

По определению бесконечно малые $f(x)$ и $\alpha(x)$ одного порядка малости.

8.6. Найдите порядок малости и главную часть бесконечно малой $\alpha(x) = \sin 2x - 2\sin x$ относительно $\beta(x) = x$.

Решение. Согласно определению порядка малости нужно найти такое значение r, чтобы предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^r}$ был конечным и отличным от нуля. Преобразуем числитель:

$$\sin 2x - 2\sin x = 2\sin x\cos x - 2\sin x = 2\sin x(\cos x - 1) =$$
$$= -4\sin x\sin^2\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^r} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^r} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x}{x}\,\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2^2}\cdot 4x^{r-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^{r-3}}.$$

Видим, что предел будет конечным только при $r = 3$, так как

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}} = 1$. При $r = 3$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} = -1.$$

Вывод: порядок малости величины $\alpha(x) = \sin 2x - 2\sin x$ относительно $\beta(x) = x$ равен трем, а её главная часть равна $\gamma(x) = -x^3$ при $x \to 0$.

8.7. Докажите, что бесконечно малая $\alpha(x) = 3\sin^4 x - x^5$ имеет порядок малости относительно $\beta(x) = x$, равный 4, а ее главная часть равна $\gamma(x) = 3x^4$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x - x^5}{3x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^4 x}{x^4} - \dfrac{x}{3}\right) = 1$. Отсюда и следует справедливость утверждения задачи.

При $x \to \infty$, $-\infty$, $+\infty$ в качестве эталонной бесконечно малой обычно берут $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$.

8.8. Докажите, что функция $\alpha(x) = \sqrt{x^4+1} - x^2$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, найдите ее порядок малости относительно $\beta(x) = 1/x$ и главную часть.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1} - x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+1} - x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1} + x^2\right)}{\sqrt{x^4+1} + x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+1} + x^2} = 0,$$

то есть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \infty$. Для определения ее порядка малости относительно $\beta(x)$ нужно найти значение r, при котором $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{1/x^r}$ конечен и отличен от нуля. После несложных преобразований, только что проделанных, находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{1/x^r} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{\sqrt{x^4+1}+x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{x^2\left(\sqrt{1+1/x^4}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{r-2}}{\sqrt{1+1/x^4}+1}.$$

Видим, что предел конечен и не равен нулю только при $r = 2$, т.е. порядок малости равен 2. При $r = 2$ этот предел равен $C = 1/2$. Поэтому главная часть $\gamma(x) = \dfrac{1}{2x^2}$.

Понятие эквивалентности бесконечно малых находит широкое применение как в приближенных вычислениях, так и в теоретических вопросах. Использование этого понятия значительно упрощает отыскание некоторых пределов.

Можем составить следующую таблицу эквивалентных бесконечно малых. Через $\alpha(x)$ обозначена бесконечно малая при $x \to x_0$ или $x \to \infty, \pm\infty$:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

5) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim (\log_a e)\alpha(x)$; 6) $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$;

7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$;

8) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$; 9) $[1+\alpha(x)]^\mu - 1 \sim \mu\alpha(x)$;

10) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$; 11) $1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\alpha^2(x)$.

При отыскании пределов, содержащих неопределённость 0/0, используется свойство эквивалентных бесконечно малых

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

где $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, т.е. предел отношения бесконечно малых равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых.

8.9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{4(x-1)}-1}{\ln[1+\operatorname{tg} 2(x-1)]}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arcsin 3(x-2)}{\operatorname{arctg} 4(x^2-4)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x+\arcsin^2 x+x^3}{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos\dfrac{x}{4}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x-x^2+x^3}{\operatorname{tg} 2x+2\sin^2 x+5x^4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Решение: а) по таблице эквивалентных бесконечно малых $\sin 8x \sim 8x$, $\ln(1+2x) \sim 2x$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\ln(1+2x)} = 4$;

б) так как $e^{4(x-1)}-1 \sim 4(x-1)$ при $x \to 1$,

$\ln(1+\operatorname{tg} 2(x-1)) \sim \operatorname{tg} 2(x-1) \sim 2(x-1)$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{4(x-1)-1}}{\ln(1+\operatorname{tg} 2(x-1))} = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{2(x-1)} = 2;$$

в) поскольку $\arcsin 3(x-2) \sim 3(x-2)$, $\operatorname{arctg} 4(x^2-4) \sim$ $\sim 4(x^2-4)$ при $x \to 2$, то

$$\lim_{x\to 2} \frac{\arcsin 3(x-2)}{\operatorname{arctg} 4(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{4(x^2-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3}{4(x+2)} = \frac{3}{16};$$

г) так как сумма бесконечно малых функций эквивалентна слагаемому, имеющему наименьший порядок малости, то можем записать: $\operatorname{tg} 3x+\arcsin^2 x+x^3 \sim \operatorname{tg} 3x \sim 3x$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x+\arcsin^2 x+x^3}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

д) так как $1-\cos 2x \sim 2x^2$, $1-\cos\dfrac{x}{4} \sim \dfrac{1}{32}x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos\dfrac{x}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(1/32)x^2} = 64;$$

е) имеем $3\sin x - x^2 + x^3 \sim 3\sin x \sim 3x$, $\operatorname{tg} 2x + 2\sin^2 x + 5x^4 \sim \operatorname{tg} 2x \sim 2x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} 2x + 2\sin^2 x + 5x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

ж) можем записать $\ln\cos x = \ln[1+(\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$, $\sqrt[4]{1+x^2} - 1 \sim \dfrac{1}{4}x^2$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(-1/2)x^2}{(1/4)x^2} = -2;$$

з) так как $\sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \dfrac{1}{2}(x+x^2) \sim \dfrac{1}{2}x$, $\sin 4x \sim 4x$ при $x \to 0$, то $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1/2)x}{4x} = \frac{1}{8}$.

Применяя метод замены бесконечно малых им эквивалентными, можно в некоторых случаях упростить процесс выделения главной части бесконечно малых.

8.10. Выделите главную часть вида $\gamma(x) = C(x-x_0)^r$ следующих бесконечно малых при $x \to x_0$:

а) $\alpha_1(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2(x+2)}{\arcsin(\sqrt{2-x}-2)}$, $x_0 = -2$;

б) $\alpha_1(x) = \dfrac{9(x+1)}{x^2-9} + \dfrac{x}{x+3}$, $x_0 = -3$.

Решение: а) подберём такие значения C и r, чтобы был равным единице $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{\alpha_1(x)}{C(x+2)^r}$. Так как $\operatorname{tg}^2(x+2) \sim (x+2)^2$, $\arcsin(\sqrt{2-x}-2) \sim 2\left(\sqrt{1-\dfrac{x+2}{4}}-1\right) \sim -\dfrac{x+2}{4}$, то

$$\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}^2(x+2)}{\left[\arcsin(\sqrt{2-x}-2)\right]C(x+2)^r} = \lim_{x\to -2}\frac{-4(x+2)^2}{(x+2)C(x+2)^r}.$$

Видим, что $r=1$, $C=-4$, т.е. $\gamma(x) = -4(x+2)$;

б) убедимся, что функция $\alpha_2(x) = \dfrac{9(x+1)}{x^2-9} + \dfrac{x}{x+3}$ является бесконечно малой при $x \to -3$. Можем записать

$$\alpha_2(x) = \frac{9(x+1)+x(x-3)}{x^2-9} = \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} =$$

$$= \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3} \text{ при } x \neq -3.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to-3} \alpha_2(x) = 0$. Находим, что $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+3}{(x-3)C(x+3)^r} = 1$ только при $r = 1$, $C = -\dfrac{1}{6}$, т. е. $\gamma(x) = -\dfrac{1}{6}(x+3)$.

8.11. Выделите главную часть вида $\gamma(x) = \dfrac{C}{x^k}$ следующих бесконечно малых функций при $x \to \infty$ (или $\pm\infty$):

а) $\alpha_1(x) = \dfrac{12x-1}{\sqrt{9x^6+1}-x}$; б) $\alpha_2(x) = \dfrac{e^{2/x}-1}{x^5+1}$.

Решение: а) требуется найти такие C и r, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^r\alpha_1(x)}{C}$ был равен 1. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(12x-1)x^r}{C(\sqrt{9x^6+1}-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(12x-1)x^r}{C[|x^3|\sqrt{9+(1/x^6)}-x]} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\,[12-(1/x)]\,x^r}{C\left[|x^3|\sqrt{9+(1/x^6)}-x\right]} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(12-(1/x))x^{r-2}}{\pm C\left[\sqrt{9+(1/x^6)}-(1/x^2)\right]}.$$

При $x \to +\infty$ нужно взять знак «$+$», а при $x \to -\infty$ — знак «$-$». Видим, что предел конечен только при $r = 2$, при этом он равен $\pm\dfrac{12}{3C}$. Так как должно быть $\pm\dfrac{12}{3C} = 1$, то $C = \pm 4$. Итак, главная часть равна $\gamma(x) = \pm\dfrac{4}{x^2}$ при $x \to \pm\infty$;

б) находим r и C из условия, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^r\alpha_2(x)}{C}=1$,

или $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^r(e^{2/x}-1)}{C(x^5+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^r\cdot 2/x}{C(1+1/x^5)x^5}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{r-6}}{C(1+1/x^5)}=\dfrac{2}{C}$ при $r=6$.

Так как по условию $\dfrac{2}{C}=1$, то $C=2$. Функция $\gamma(x)=\dfrac{2}{x^6}$ является главной частью бесконечно малой $\alpha_2(x)$.

Мы в основном занимались бесконечно малыми величинами. По теореме о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами изучение бесконечно большой величины $y(x)$ при $x\to x_0$ можно свести к изучению бесконечно малой $\alpha(x)=\dfrac{1}{y(x)}$ при $x\to x_0$.

8.12. Выделите главную часть вида $\gamma(x)=\dfrac{C}{(x-2)^r}$ бесконечно большой величины $y=\dfrac{4}{(\sqrt{5-2x}-1)\ln(3-x)}$ при $x\to 2$.

Решение. Согласно сделанному замечанию мы можем свести задачу к бесконечно малым либо исходить из определения главной части бесконечно больших. По этому определению мы должны найти такие константы C и r, чтобы предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{y}{\gamma(x)}$ был равен единице. По таблице эквивалентных бесконечно малых находим $\sqrt{5-2x}-1=\sqrt{1-2(x-2)}-1\sim-(x-2)$, $\ln(3-x)=\ln[1-(x-2)]\sim-(x-2)$. Поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{y}{\gamma(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{\left[(\sqrt{5-2x}-1)\ln(3-x)\right]/(C/(x-2)^r)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)^r}{(x-2)^2C}.$$

Отсюда следует, что этот предел равен единице только при $r=2$, $C=4$. Следовательно, функция $\gamma(x)=\dfrac{4}{(x-2)^2}$ является главной частью бесконечно большой $y(x)$ при $x\to 2$.

При $x \to \infty, -\infty, +\infty$ в качестве эталонной, как мы уже отмечали, берут величину $\beta(x) = 1/x$, а для бесконечно больших — величину $y(x) = x$. Все остальные действия ничем не отличаются от действий в рассмотренных примерах.

8.13. Докажите, что функция $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ является бесконечно малой при $M(x, y) \to O(0, 0)$.

Решение. В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Когда $(x, y) \to (0, 0)$, $r \to 0$. Находим

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = 0, \text{ поскольку } \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \le 2.$$

Понятия бесконечно малой и бесконечно большой функций определены для векторных функций. Функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \alpha_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

называется бесконечно малой при

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

если $|f| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_m^2}$ есть функция бесконечно малая при $M \to M_0$, и бесконечно большой, если $|f|$ — бесконечно большая функция. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бесконечно малая при $M \to M_0$, то все ее координатные функции α_i также бесконечно малые. Если же $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бесконечно большая, то хотя бы одна из ее координатных функций является бесконечно большой. Например, функция $f(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{t}{t-1} \\ \dfrac{t^2}{t^2+1} \end{bmatrix}$ является бесконечно малой при $t \to 0$ и бесконечно большой при $t \to 1$.

Задачи для самостоятельного решения

8.14. Докажите, что следующие функции являются бесконечно малыми:

а) $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2+1}$ при $x \to 3$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ при $x \to +\infty$;

в) $f(x) = (x-2)\cos^2 \dfrac{1}{x-2}$ при $x \to 2$.

8.15. Докажите, что следующие функции являются бесконечно большими:

а) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{\sin^4(x-2)} + \dfrac{1}{x^2-4}$ при $x \to 2+0$;

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x^2-2x+2)}$ при $x \to 1$.

8.16. Докажите, что функция $\alpha(x) = \ln(x^2-8x+17)$ при $x \to 4$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с функцией $\beta_1(x) = \operatorname{tg}(x-4)$, более низкий порядок малости по сравнению с функцией $\beta_2(x) = \sin^3(x-4)$ и что ее порядок малости совпадает с порядком малости функции $\beta_3(x) = \sqrt[4]{8x-x^2-15} - 1$.

8.17. Докажите, что бесконечно большая функция $\varphi(x) = x^3+4x^2-1$ при $x \to \infty$ имеет более высокий порядок роста по сравнению с функцией $f_1(x) = x^2+2$, более низкий порядок роста по сравнению с функцией $f_2(x) = 2x^5+3x^2+1$ и тот же порядок роста, что и функция $f_3(x) = 5x^3+3$.

8.18. Определите порядок малости r при $x \to x_0$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = x - x_0$ следующих бесконечно малых функций:

а) $\alpha_1(x) = (x^3-1)\sin^2(x^2-1), \quad x_0 = 1$;

б) $\alpha_2(x) = \dfrac{1-\cos 3(x-2)}{\sqrt{3-x}-1}, \quad x_0 = 2$;

в) $\alpha_3(x) = \sqrt[4]{x-3}\operatorname{tg}(x^2-9), \quad x_0 = 3$;

г) $\alpha_4(x) = \sqrt[4]{1 + (x+8)^7 \sin^2(x+8)} - 1, \quad x_0 = -8;$

д) $\alpha_5(x) = [\ln(1 + \operatorname{tg}(x-4))]^5 [\arcsin(x-4)]^2, \quad x_0 = 4;$

е) $\alpha_6(x) = [e^{x+5} - 1]^4 \left[\ln \dfrac{x-6}{-11}\right]^6, \quad x_0 = 6.$

8.19. Определите порядок малости относительно бесконечно малой $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$ следующих бесконечно малых функций:

а) $\alpha_1(x) = \sin \dfrac{x+1}{x^3+1} \cdot \ln \dfrac{x^2+4}{x^2+1};$

б) $\alpha_2(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}};$

в) $\alpha_3(x) = (\sqrt{x^4+4} - x^2) \ln \dfrac{x^2+3}{x^2+2};$

г) $\alpha_4(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^6 + \sqrt{x^6 - 15}};$

д) $\alpha_5(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x+1}} - 1)^{16}}{x^9 - 10};$

е) $\alpha_6(x) = (x+2)^6 \ln \dfrac{x^{16} - 3}{x^{16} + 7}.$

8.20. Выделите главную часть вида $C(x - x_0)^r$ следующих бесконечно малых при $x \to x_0$:

а) $\alpha_1(x) = \sqrt[4]{x-3} \ln \left(1 + \sqrt{\dfrac{x-3}{x+6}}\right), \quad x_0 = 3;$

б) $\alpha_2(x) = \dfrac{(\sqrt{x+2} - 2)^2}{\ln(x-1)}, \quad x_0 = 2;$

в) $\alpha_3(x) = \dfrac{e^{x^5} - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1}, \quad x_0 = 0;$

г) $\alpha_4(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9} \sin(x^2 - 9) + (x-3)^5, \quad x_0 = 3;$

д) $\alpha_5(x) = \dfrac{1 - \cos 4x}{e^{2x} - 1}, \quad x_0 = 0;$

е) $\alpha_6(x) = (x^2 - 5x + 4) \operatorname{tg}(x^2 - 1), \quad x_0 = 1.$

8.21. Выделите главную часть вида $\gamma(x)=\dfrac{C}{x^r}$ следующих бесконечно малых при $x\to\infty$:

а) $\alpha_1(x)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^4+1}\cdot\ln\dfrac{x+5}{x+1}$;

б) $\alpha_2(x)=(\sqrt{x^4+4}-x^2)\sin\dfrac{3x+1}{x^6+1}$;

в) $\alpha_3(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^5+1}}\sin\dfrac{5}{x}$;

г) $\alpha_4(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3+1}\ln\dfrac{x-2}{x+5}$;

д) $\alpha_5(x)=\left(\sqrt{x^6+2}-x^3\right)\operatorname{tg}\dfrac{2x+3}{x^7+1}$;

е) $\alpha_6(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^3-\sqrt{x^2+1}}$.

8.22. Выделите главную часть вида $\gamma(x)=\dfrac{C}{(x-x_0)^r}$ следующих бесконечно больших при $x\to x_0$:

а) $\varphi_1(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{8+x}-3)(x^3-1)}$, $x_0=1$;

б) $\varphi_2(x)=\dfrac{3^x}{[\ln(x-1)]^4}$, $x_0=2$;

в) $\varphi_3(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x^2-16)}{(x-4)^2+\sqrt[4]{(x-4)^5}}$, $x_0=4$;

г) $\varphi_4(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{(\sqrt{6-2x}-2)^2}$, $x_0=1$;

д) $\varphi_5(x)=\dfrac{x-2}{[\ln(x^2-4x+5)]^3}+\dfrac{5}{(x-2)^4}$, $x_0=2$;

е) $\varphi_6(x)=\dfrac{\operatorname{tg}8x}{\sin 2x\ln(1-x^4)}$, $x_0=0$.

8.23. Выделите главную часть вида $\gamma(x) = Cx^r$ следующих бесконечно больших при $x \to \infty$:

а) $\varphi_1(x) = 1 + x^2 + 3x\sqrt[4]{x^5+1}$;

б) $\varphi_2(x) = \dfrac{x^4+2x+1}{5x^2+2}$;

в) $\varphi_3(x) = \left(\sqrt{9x^6+2x^2+1} - 1\right) + x(5x+3)$;

г) $\varphi_4(x) = (2x^4-1)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x} + x^2$.

8.24. Докажите, что функция: а) $f(x,y) = \dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ является бесконечно малой при $(x,y) \to (0,0)$;

б) $f(t) = \left[\begin{array}{c} \dfrac{t}{t^2+1} \\ \dfrac{t^3}{t-2} \end{array}\right]$ является бесконечно малой при $t \to 0$

и бесконечно большой при $t \to 2$.

8.25. Пользуясь методом замены бесконечно малых функций эквивалентными, вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos 4x)}{\ln^2(1+\sin 3x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1+\sin 3(x-1)} - 1}{e^{\sin 5(x-1)} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{arctg} 2(x-3) + (x-3)^4}{\sqrt{4-x} - 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x-2x^2+x^3)}{\ln(1-x+2x^2-8x^3)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x+1}{x-3} \ln\dfrac{4x-13}{9x-28}$;

е) $\lim\limits_{x\to -10} \dfrac{e^{x^2+3x-70} - 1}{-(x+10)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2\ln\cos(x+2)}{\sqrt[5]{1+(x+2)^2} - 1} \cdot (7x+7)$;

з) $\lim\limits_{x\to -1} 6x\dfrac{3\operatorname{tg}[4(x+1)] + 6\arcsin^2(x+1) - 20(x+1)^3}{\ln[1+(x+1)]}$.

9. Непрерывность функции. Классификация разрывов функции

В разделе 3 мы определили понятие непрерывности функции в точке, привели некоторые свойства непрерывных функций и использовали их для отыскания пределов. В этом разделе мы ещё раз займемся понятием непрерывности.

Часто применяется определение непрерывности на языке приращений.

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если из условия $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta y \to 0$. Это, очевидно, эквивалентно условию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 1. Исходя из определения, докажем, что функция $y = \log_a x$ непрерывна в любой точке $x_0 > 0$.

Докажем сначала непрерывность этой функции в точке $x_0 = 1$. Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to 1} \log_a x = 0$. Пусть $U_\varepsilon(0)$ — произвольная окрестность точки $y = 0$. Требуется доказать, что существует такая окрестность $V(1)$ точки $x = 1$, что для всех $x \in V(1)$ выполняется $\log_a x \in U_\varepsilon(0)$, т. е. $|\log_a x - 0| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < \log_a x < \varepsilon$. Будем считать $a > 1$, тогда функция $\log_a x$ возрастает, а потому $a^{-\varepsilon} < x < a^{\varepsilon}$. Так как $a^{-\varepsilon} < 1$, $a^{\varepsilon} > 1$ при $a > 1$, $\varepsilon > 0$, то найденный интервал является окрестностью точки $x = 1$, которую можно принять в качестве $V(1)$. Этим мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 1} \log_a x = 0 = \log_a 1$, т. е. функция $\log_a x$ непрерывна в точке $x = 1$. Пусть теперь $x_0 > 0$ любая фиксированная точка. Любую другую точку x можно записать в виде $x = x_0 + \Delta x$. Тогда

$$\Delta y = \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right).$$

Функция $y = \log_a x$ непрерывна в точке $x = 1$. Поэтому если величина $1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}$ стремится к единице, что возможно лишь в случае, когда $\Delta x \to 0$, то и величина $\Delta y \to 0$.

По определению непрерывности функции на языке приращений отсюда следует непрерывность функции $y = \log_a x$ в точке x_0 при $a > 1$. Если $a < 1$, то доказательство аналогично.

Пример 2. Считая доказанной непрерывность функции $y = a^x$ в точке $x = 0$, т. е. что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$, докажем непрерывность функции $y = a^x$ в любой точке x_0.

Дадим величине x_0 приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Первый множитель постоянен, а второй множитель при $\Delta x \to 0$ стремится к нулю, так как из того, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1$. Таким образом, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Это и означает непрерывность функции $y = a^x$ в любой точке x_0.

Все определения непрерывности функции справедливы для любого класса функций.

При классификации разрывов будем заниматься только функциями $f : X \subset R \to Y \subset R$.

Точку x_0, предельную для множества X, называют точкой разрыва функции, если в этой точке нарушается свойство непрерывности, т. е. либо не выполняются равенства $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$, где $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ — левый предел, $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ — правый предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, либо хотя бы один из элементов данного равенства не существует. В зависимости от характера нарушения этих равенств различают три вида разрывов:

1) устранимый разрыв — либо $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$, либо в точке x_0 функция $f(x)$ не определена, но $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

2) разрыв первого рода — оба предела $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$;

3) разрыв второго рода — хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или обращается в ∞.

Заметим, что если в предельной точке x_0 функция не определена, то в ней обязательно имеется разрыв, но в точке разрыва функция может быть и определена.

Задача характеристики точек разрыва сводится к отысканию односторонних пределов или доказательству, что хотя бы один из них не существует.

9.1. Охарактеризуйте точку $x = 2$ для функции $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$.

Решение. Данная функция имеет область определения $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Точка $x_0 = 2$ является предельной для области определения, в самой точке $x_0 = 2$ функция не определена.

Вычисляем односторонние пределы:

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2+0} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4,$$

поскольку при $x > 2$ величина $|x-2| = x-2$;

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2-0} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -4,$$

так как если $x < 2$, то $|x-2| = -(x-2)$.

Как видим, существуют конечные правый и левый пределы, не равные между собой. Поэтому точка $x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода.

9.2. Охарактеризуйте точку $x_0 = 0$ функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

Решение. Точка $x = 0$ является предельной для области определения $f(x)$. Находим

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{2}\sin x}{x} = \sqrt{2}.$$

Заметим, что $|\sin x| = \sin x$, если $0 < x < \pi/2$.

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{x}=-\sqrt{2},$$

так как $|\sin x|=-\sin x$, если $-\pi/2<x<0$. Поскольку $f(0+0)$ и $f(0-0)$ существуют и конечны, но $f(0+0)\neq f(0-0)$, то точка $x_0=0$ является точкой разрыва первого рода.

9.3. Охарактеризуйте точку $x_0=0$ для следующих функций:

$f_1(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x};$

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{x}, & \text{если}\quad x\neq 0,\\ 3, & \text{если}\quad x=0;\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{x}, & \text{если}\quad x\neq 0,\\ 1, & \text{если}\quad x=0.\end{cases}$$

Решение. Замечаем, что

$$\lim_{x\to 0}f_1(x)=\lim_{x\to 0}f_2(x)=\lim_{x\to 0}f_3(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=3.$$

Это означает, что в точке $x=0$ для всех трех функций существуют конечные, равные между собой левые и правые пределы.

Для функции $f_1(x)$ имеем $f_1(0+0)=f_1(0-0)$, но в точке $x=0$ функция $f_1(x)$ не определена, поэтому, согласно определению точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

Для функции $f_2(x)$ имеем $f_2(0-0)=f_2(0+0)=f(0)=3$, т. е. в точке $x=0$ функция $f_2(x)$ непрерывна.

Для функции $f_3(x)$ имеем $f_3(0-0)=f_3(0+0)\neq f_3(0)$. Функция $f_3(x)$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв. Этот разрыв можно «устранить», переопределив значение функции $f_3(x)$ в точке $x=0$, положив $f_3(0)=3$, но тогда функция $f_3(x)$ совпадет с $f_2(x)$.

Подчеркнём, что $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ — различные функции.

9.4. Охарактеризуйте точку $x_0 = 1$ для функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{t\to -\infty} 2^t = 0$

(сделали замену $\dfrac{1}{x-1} = t$, когда $x \to 1-0$, $\ t \to -\infty$);

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t\to +\infty} 2^t = +\infty$$

(та же замена, но при $x \to 1+0$, $\ t \to +\infty$).

Так как один из односторонних пределов обращается в ∞, то точка $x_0 = 0$ — точка разрыва второго рода.

Если в точке x_0 функция определена, то вводят понятие односторонней непрерывности. Если окажется $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то функцию называют непрерывной в точке x_0 слева, если же $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функцию называют непрерывной в точке x_0 справа.

Например, функция $\varphi(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, \text{ если } x \neq 1, \\ 0, \text{ если } x = 1, \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 1$ слева, но разрывна справа.

9.5. Охарактеризуйте точку $x_0 = 1$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4}, & \text{если} \quad x \leq 1, \\ \dfrac{x+4}{x^2-16}, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Решение. Находим односторонние пределы при $x \to 1 \pm 0$:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{3}{-3} = -1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x^2-16} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}.$$

Так как левый и правый пределы существуют, конечны, но не равны, то точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода.

9.6. Найдите все точки разрыва и охарактеризуйте их для следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{e^x - e^4}{x-4};$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2-16} & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что частное от деления двух непрерывных функций может иметь разрыв только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Такими точками для функции $f_1(x)$ являются $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$. Исследуем эти точки.

$$f_1(0 \pm 0) = \lim_{x \to 0 \pm 0} \left(\frac{x^2-4}{x|x-2|} + \frac{e^x - e^4}{x-4} \right) = \mp\infty,$$

следовательно, в точке $x_1 = 0$ разрыв второго рода;

$$f_1(2+0) = \lim_{x \to 2+0} \left(\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} + \frac{e^x - e^4}{x-4} \right) = 2 + \frac{e^2 - e^4}{-2},$$

так как $|x-2| = (x-2)$ при $x > 2$;

$$f_1(2-0) = \lim_{x \to 2-0} \left(-\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} + \frac{e^x - e^4}{x-4} \right) = -2 + \frac{e^2 - e^4}{-2},$$

так как $|x-2| = -(x-2)$ при $x < 2$. Поскольку $f_1(2+0) \neq$ $\neq f_1(2-0)$, то в точке $x_2 = 2$ разрыв первого рода;

$$f_1(4 \pm 0) = \lim_{x \to 4 \pm 0} \left(\frac{(x^2-4)}{x|x-2|} + \frac{e^4(e^{x-4}-1)}{x-4} \right) = \frac{3}{2} + e^4,$$

следовательно, в точке $x_3 = 4$ устранимый разрыв.

Для функции $f_2(x)$ только в точках $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ возможен разрыв. Исследуем эти точки.

$$f_2(-4 \pm 0) = \lim_{x \to -4 \pm 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x^2-16} \right) = \infty,$$

следовательно, в точке $x_1 = -4$ разрыв второго рода;

$$f_2(0-0) = \lim_{x\to 0-0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x^2-16}\right) = 0,$$

$$f_2(0+0) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = -\frac{\sin 3}{3},$$

т. е. в точке $x_2 = 0$ разрыв первого рода;

$$f_2(1\pm 0) = \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \infty,$$

в точке $x_3 = 1$ также разрыв второго рода;

$$f_2(3\pm 0) = \lim_{x\to 3\pm 0}\frac{\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2},$$

следовательно, в точке $x_4 = 3$ имеем устранимый разрыв.

Задачи для самостоятельного решения

9.7. Исходя из определения, докажите непрерывность следующих функций:

а) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ при любом x;

б) $f(x) = x^3$ при любом x;

в) $f(x) = \sin x$ при любом x;

г) $f(x) = \cos x$ при любом x;

д) $f(x) = a^x$ при любом x;

е) $f(x) = \log_a x$ при $x > 0$.

9.8. Используя теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного, докажите непрерывность при любом x следующих функций:

а) $f_1(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{arctg} 2x}{x^2+1}$; б) $f_2(x) = \dfrac{\cos x + x^2}{2^x+4}$;

в) $f_3(x) = \dfrac{a^x + x^2}{x^4+1}$; г) $f_4(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{5^x+\sin^2 x}$.

9.9. Охарактеризуйте указанную точку x_0 для функций:

а) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-1)}{|x^2-1|}, \quad x_0 = 1;$

б) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}, \quad x_0 = 1;$

в) $f(x) = \dfrac{\arcsin\left(\dfrac{x-1}{3}\right)}{x^2-1}, \quad x_0 = -1;$

г) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{|x|}, \quad x_0 = 0;$

д) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0;$

е) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0;$

ж) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x^2-1|}, \quad x_0 = 1.$

9.10. Охарактеризуйте точку $x_0 = 0$ для следующих функций:

а) $f_1(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x};$

б) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 3, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

г) $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{x};$

д) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

е) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

9.11. Найдите точки разрыва данных функций и охарактеризуйте их:

а) $f_1(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{\sin(4-x^2)}{x^2-2x}$;

б) $f_2(x) = \dfrac{\sin(x+2)}{|x^2-4|} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{5x}$;

в) $f_3(x) = \dfrac{e^x - e^4}{x-4} + \dfrac{x^2-144}{(x-17)\sqrt{(x-12)^2}}$;

г) $f_4(x) = \dfrac{\arcsin(x-5)}{(x-6)(x-11)}$;

д) $f_5(x) = \dfrac{\arcsin(x-5)}{(x-8)(x-11)}$;

е) $f_6(x) = \dfrac{\sin(x+10)}{(x+10)(x+13)} + \dfrac{\ln(x+15)}{|x+14|}$.

9.12. Найдите точки разрыва данных функций и охарактеризуйте их:

а) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-4} & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{e^x - e}{x^2-1} & \text{при } x > 0; \end{cases}$

б) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln(x+5)}{x^2-16} & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{x^2-9} & \text{при } x > 0; \end{cases}$

в) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x+7}{x^2-49} & \text{при } x \le 8, \\ \dfrac{\sin(x-2)}{(x-9)(x+4)} & \text{при } x > 8; \end{cases}$

г) $f_4(x) = \begin{cases} (x-5)\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-4} & \text{при } x \le 5, \\ \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-64} & \text{при } x > 5; \end{cases}$

д) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{x-15}{x^2-36} & \text{при } x \le 15, \\ \dfrac{e^x - e^8}{x^2-64} & \text{при } x > 15; \end{cases}$

е) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} e^{\frac{1}{x-5}} & \text{при } x < 5, \\ (x-5)\dfrac{\sin(x-7)}{x^2-49} & \text{при } x \ge 5. \end{cases}$

9.13. Можно ли подобрать число A таким, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}, & \text{если } x \ne 0, \\ A, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

была бы непрерывной в точке $x = 0$?

9.14. Следующие функции исследуйте на одностороннюю непрерывность в указанной точке x_0:

а) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}, & \text{если } x \ne 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

б) $f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \ne 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

в) $f_3(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}}, & \text{если } x \ne 1, \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

г) $f_4(x) = e^{\frac{1}{|1-x|}}$, $x_0 = 1$.

10. Предел и непрерывность функции многих переменных

Ограничимся функциями $z = f(x, y)$ двух аргументов.

Пусть $f : D \subset R_2 \to \Delta \subset R$ и (x_0, y_0) — предельная точка множества D. Ранее определённый предел (см. раздел 3)

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x, y) \tag{а}$$

назовем двойным. Фиксируя либо y, либо x, можно рассмотреть пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y),\ \lim_{y\to y_0} f(x, y). \tag{б}$$

Если пределы (б) существуют и конечны, то первый из них является некоторой функцией $\psi(y)$, а второй — функцией $\varphi(x)$. Пределы (б) называют внутренними пределами функции $f(x, y)$. Пределы вида

$$\lim_{y\to y_0}\left\{\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right\},\ \lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right\} \tag{в}$$

называют повторными. Связь между двойными (а), внутренними (б) и повторными (в) пределами устанавливается в следующей теореме.

Теорема. Пусть существует двойной предел $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = A$. Если для всякого фиксированного y $(y \neq y_0)$ существует внутренний предел $\psi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, то существует повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\right\}$, также равный A. Если для всякого фиксированного x $(x \neq x_0)$ существует внутренний предел $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, то существует повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\right\}$, также равный A.

Обратная теорема неверна, в чем мы убедимся на примерах.

10.1. Дана функция $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{5x+6y}$. Докажите, что двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует, но существуют оба повторных предела. Найдите их.

Решение. Выберем последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$, сходящуюся к $M_0(0;0)$ при $n\to\infty$. Положим $y_n = kx_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x_n + 3kx_n}{5x_n + 6kx_n} = \dfrac{2+3k}{5+6k}$. При $k=0$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{2}{5}$, а при $k=1$ —

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{2+3}{5+6} = \frac{5}{11} \neq \frac{2}{5}.$$

По определению предела на языке последовательностей двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует. Находим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{2x+3y}{5x+6y}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5};$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2x+3y}{5x+6y}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{3y}{6y} = \frac{1}{2}.$$

Как видим, оба повторных предела существуют, конечны, но двойной предел не существует.

Возможны случаи, когда двойной предел существует, а внутренние, а потому и повторные — не существуют.

10.2. Пусть $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$. Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ существует и равен нулю, но повторные пределы не существуют.

Решение. Очевидна оценка

$$|f(x,y)| = |x+y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right| < |x+y| < |x| + |y|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В прямоугольной окрестности точки $(0;0)$ вида $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, если $\delta < (\varepsilon/2)$, справедливо $|f(x,y)| < \varepsilon$, т. е. для любой точки этой окрестности выполняется $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

Зафиксируем величину y, $y \neq 0$, и рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}(x+y) \times \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. Запишем функцию $f(x,y)$ в виде суммы $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. При $x \to 0$ первое слагаемое стремится к нулю как произведение бесконечно малой на ограниченную функцию. Во втором слагаемом множитель $y\sin\frac{1}{y}$ постоянен, а при $x \to 0$ функция $\varphi(x) = \sin\frac{1}{x}$ предела не имеет, что легко доказать, используя определение предела на языке последовательностей, выбрав две последовательности $x_n' = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}$ и $x_n'' = \left\{\frac{1}{(\pi/2)+2\pi n}\right\}$. При этом $\varphi(x_n') \to 1$, $\varphi(x_n'') \to 0$. Таким образом, второе слагаемое предела не имеет, а поэтому не существует внутренний предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, следовательно, не существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$. Поскольку $f(x,y) = f(y,x)$, то отсюда следует, что не существует внутренний предел $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, а поэтому и повторный $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$.

Из рассмотренных примеров следует, что двойной предел и повторные пределы — понятия совершенно разные. Возможна ситуация, когда оба повторных предела существуют и равны, но двойной предел при этом все же не существует.

10.3. Пусть $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует, но существуют равные повторные пределы.

Решение. Как и при решении задачи 10.1, выберем последовательность точек $M_n(x_n, kx_n)$, сходящуюся к точке $M_0(0;0)$ при $n \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, kx_n) = \dfrac{k^2}{1+k^2}$. Предел зависит от выбора значения k. По определению предела на языке после-

довательностей двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ не существует. Но
$\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = 0.$

Из сформулированной в начале раздела теоремы следует, что возможны случаи, когда существует двойной предел и лишь один из повторных, а другой повторный не существует.

10.4. Найдите двойной предел и повторные пределы для функции $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x}$ в точке $M_0(0;a)$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x\cdot y}y$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}$. Пусть $xy = z$. При $x\to0$ для любого конечного значения y величина $z\to0$. Поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$. Очевидно, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}} y = a$. По теореме о пределе произведения
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x} = a$. Находим повторные пределы:

$$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to a}\frac{\sin xy}{x}\right\} = \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x} = a$$

(использована непрерывность функции $\sin x$),

$$\lim_{y\to a}\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin xy}{x}\right\} = \lim_{y\to a}\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y\right\} = \lim_{y\to a} y = a.$$

В данном случае оба повторные пределы существуют, равны между собой и равны двойному пределу, поскольку существуют оба внутренние пределы.

10.5. Найдите двойной предел и повторные пределы для функции $f(x,y) = \left(1+xy^2\right)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}$ в точке $M_0(0;3)$.

Решение. Находим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left[(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}\right]^{\frac{xy^3}{x^2y+xy^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} e^{\frac{y^2}{x+y}} = e^3,$$

так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{y^2}{x+y} = 3$ по теореме о пределе частного.

Находим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 3}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}\right\} = \lim_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{1}{x^2+3x}} = e^3;$$

$$\lim_{y\to 3}\left\{\lim_{x\to 0}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}\right\} = \lim_{y\to 3}\left\{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy^3}{x^2y+xy^2}}\right\} = e^3.$$

10.6. Найдите $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

Решение. Перейдём к полярной системе координат по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Когда $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то и $r \to \infty$. Получаем $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r(\cos\varphi + 2\sin\varphi)}{r^2} = 0$, так как $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{r} = 0$ и $|\cos\varphi + 2\sin\varphi| < 3$.

Задачи для самостоятельного решения

10.7. Дана функция $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$. Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. При этом внутренний предел $\psi(y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, а внутренний предел $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не существует.

10.8. Докажите, что следующие пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+y)}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Проверьте, существуют или нет повторные пределы для этих функций в соответствующих точках.

10.9. Исходя из определения предела, докажите:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} xy = 6$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to +\infty}} \sqrt{x^2+y^2} = +\infty$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}} \dfrac{3x^2y-3y^2}{x^2+y^2} = 3$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to +\infty}} \ln\sqrt{x^2+y^2} = +\infty$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{5x^2+3x+5y^2+2y-9}{x^2+y^2} = 5$.

10.10. Докажите, что функция $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ обладает следующими свойствами:

а) при стремлении точки $M(x;y)$ к точке $O(0;0)$ по любой прямой $y=kx$ предел функции равен нулю;

б) предел функции в точке $O(0;0)$ не существует;

в) оба повторные пределы существуют и равны нулю.

10.11. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+2xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2y}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

10.12. Найдите повторные пределы в указанной точке $(x_0;y_0)$ для следующих функций:

а) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}$, $x_0=0$, $y_0=0$;

б) $f(x,y) = \dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$, $x_0=0$, $y_0=0$;

в) $f(x,y) = \dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg} 2y}{6x+3y}$, $x_0=0$, $y_0=0$;

г) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $x_0=\infty$, $y_0=\infty$;

д) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $x_0=+\infty$, $y_0=+0$.

10.13. Исследуйте на непрерывность в указанных точках следующие функции:

а) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0,\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(1;2)$;

б) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0,\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(1;1)$;

в) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0,\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(1;-1)$;

г) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $O(0;0)$, $A(0;1)$.

Дифференциальное исчисление

11. Понятия дифференцируемой функции и производной матрицы

Наиболее простыми и хорошо изученными являются линейные функции, т.е. функции вида $f(x) = C(x - x_0)$. При изучении более сложных зависимостей пытаются заменить их приближенно линейными. Такую замену, т. е. процесс выделения линейной части, называют процессом линеаризации. Многие физические понятия появились именно в процессе линеаризации. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. **Задача о теплоёмкости**. Количество $Q(t)$ тепла, требующееся для нагревания 1 г некоторого вещества от 0 до t градусов, является нелинейной функцией, вид которой, как правило, неизвестен. Но в большинстве практически важных задач величину $\Delta Q(t_0)$ — количество тепла, требуемого для нагревания тела от температуры t_0 до температуры t, — можно представить в виде

$$\Delta Q(t_0) = Q(t) - Q(t_0) = C(t - t_0) + (t - t_0)\alpha, \qquad \text{(а)}$$

где C – постоянный множитель; α — бесконечно малая при $t \to t_0$. При малом $t - t_0$ вторым слагаемым пренебрегают и получают приближенную формулу

$$\Delta Q(t_0) \cong C(t - t_0). \qquad \text{(б)}$$

Коэффициент C называется удельной теплоемкостью вещества при $t = t_0$. Таким образом, нелинейная зависимость (а) заменена приближенно линейной зависимостью (б).

Пример 2. **Задача о силе тока**. Пусть $Q(t)$ — количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за время t. Тогда разность $\Delta Q(t_0) = Q(t) - Q(t_0)$ определяет количество электричества, протекающего за промежуток времени от t_0 до t. И в этом случае, как и в задаче с теплоёмкостью, можно записать соотношение (а) и приближенное равенство (б):

$$Q(t) - Q(t_0) \cong I(t - t_0).$$

Константу I называют силой тока в момент времени $t = t_0$. По аналогичной схеме вводятся в физике понятия удельного коэффициента расширения, плотности вещества, коэффициента диффузии, константы скорости реакций и многие другие.

В дифференциальном исчислении выясняют, для каких функций возможна линеаризация и как найти линейную часть. Пусть $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ — вектор-функция векторного аргумента, где X — некоторое открытое множество и x_0 — любая точка (вектор) из X. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta f$, где x — другая точка из X. Величину Δx называют приращением аргумента, а Δf — приращением функции при переходе из x_0 в x. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такой линейный оператор $A : R_n \to R_m$, что имеет место равенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0), \tag{в}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|\alpha(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$, т. е. величина $\alpha(x - x_0)$ бесконечно малая порядка выше первого относительно $x - x_0$. Соотношение (в) можно переписать в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x), \tag{г}$$

где A — матрица линейного оператора $A : R_n \to R_m$, называемая производной матрицей или просто производной отображения $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ в точке x_0. Производную обозначают $A = f'(x_0)$.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ обозначают df и называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx. Дифференциал мы будем изучать позднее в разделе 19.

Матрица A имеет размер $m \times n$. В случае $m = n = 1$ она имеет единственный элемент b, который может быть найден из (г) по формуле

$$b = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Величина b совпадает с производной от скалярной функции одного скалярного аргумента. Эти производные изучаются в средней школе.

Рассмотрим функцию $f : X \subset R_n \to Y \subset R$ — числовую функцию векторного аргумента $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Зафиксируем все переменные, кроме x_1. В результате переменная z будет функцией одной переменной x_1. Предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1},$$

если он существует и конечен, называется частной производной от функции f по x_1 и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Аналогично можно определить частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, $\dots$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$. В этом случае $A = f'(x) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$.

11.1. Докажите, исходя из определения, что функция $y = x^3$ дифференцируема в любой точке x_0 и при этом $y' = 3x_0^2$.

Решение. Находим $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x +$

$$+3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Сравнивая последнее соотношение с (г), видим, что

$$A \cdot \Delta x = 3x_0^2 \cdot \Delta x, \quad \alpha(\Delta x) = 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 0$, то $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая порядка выше первого относительно Δx. По определению функция $f(x) = x^3$ в точке x_0 дифференцируема и $f'(x_0) = 3x_0^2$.

11.2. Докажите, исходя из определения, что функция $X \subset R \to Y \subset R_2$ вида $f(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ дифференцируема в любой точке x_0 и $f'(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{bmatrix}$.

Решение. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\begin{bmatrix} x_0+\Delta x \\ (x_0+\Delta x)^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_0 \\ x_0^2 \end{bmatrix}=$ $=\begin{bmatrix} \Delta x \\ 2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{bmatrix}\cdot\Delta x+\begin{bmatrix} 0 \\ (\Delta x)^2 \end{bmatrix}$. Здесь роль $A\cdot\Delta x$ играет слагаемое $\begin{bmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{bmatrix}\cdot\Delta x$, а $\alpha(\Delta x)=\begin{bmatrix} 0 \\ (\Delta x)^2 \end{bmatrix}$, причём $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\alpha(\Delta x)|}{|\Delta x|}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|^2}{|\Delta x|}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$, т. е. величина $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая порядка выше первого. По определению функция $f(x)=\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ дифференцируема и $f'(x_0)=$ $=\begin{bmatrix} 1 \\ 2x_0 \end{bmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

11.3. Исходя из определения докажите, что функция $f(x)=x^2+4x$ дифференцируема в любой точке x_0 и $f'(x_0)=$ $=2x_0+4$.

11.4. Исходя из определения докажите, что функция $f(x)=\begin{bmatrix} 3x^2+1 \\ x^3+2 \end{bmatrix}$ дифференцируема в любой точке x_0 и

$f'(x_0)=\begin{bmatrix} 6x_0+1 \\ 3x_0^2+2 \end{bmatrix}$.

11.5. Исходя из определения докажите, что функция $f(x,y)=\begin{bmatrix} 5x+4y \\ 2x+3y \end{bmatrix}$ дифференцируема в любой точке (x_0,y_0) и найдите ее производную матрицу $f'(x_0,y_0)$.

11.6. Исходя из определения найдите производную $f'(x_0)$, если

а) $f(x)=2^x$;

б) $f(x)=\sin 2x$.

12. Техника дифференцирования функций скалярного аргумента

Процесс отыскания производной матрицы называют дифференцированием. Как следует из теории, элементами производной матрицы являются либо производные $f'_x = \dfrac{df}{dx}$ скалярной функции одного скалярного аргумента, либо частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ скалярной функции векторного аргумента. Надо научиться находить эти производные.

Укажем правила отыскания производных. Особенно часто применяется правило дифференцирования композиции отображений (сложной функции): если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $y_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f[u(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и при этом

$$\{f[u(x)]\}' = f'_u(u) \cdot u'_x(x). \tag{а}$$

Функция $u(x)$ сама может быть сложной функцией от x: $u = u\,[t(x)]$, и тогда $\{f\,[u\,(t(x))]\}' = f'_u(u) \cdot u'_t(t) \cdot t'_x(x)$. Функция $t(x)$ также может быть сложной функцией от x: $t[v(x)]$, и тогда $f'_x(x) = f'_u(u) \cdot u'_t(t) \cdot t'_v(v) \cdot v'_x(x)$, и т.д.

Напомним также правила дифференцирования суммы, произведения и частного. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, то дифференцируемы и функции $u(x)+v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (в последнем случае $v(x) \neq 0$) и справедливы формулы:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x); \tag{б}$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)]; \tag{в}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}. \tag{г}$$

Произведение и частное определены только для скалярных функций. Поэтому формулы (в) и (г) имеют смысл только для такого вида функций.

Так как $C' = 0$, где C — константа, то из формулы (в) следует правило

$$[C \cdot v(x)]' = C \cdot v'(x), \qquad \text{(д)}$$

т. е. константу можно выносить за знак производной.

Пусть $u = u(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Запишем таблицу производных, которую следует запомнить:

1) $[u^{\alpha}(x)]' = \alpha u(x)^{\alpha-1} \cdot u'(x)$;
2) $[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$, $[e^{u(x)}]' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$;
3) $[\log_a |u(x)|]' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a} = \dfrac{\log_a e}{u(x)} \cdot u'(x)$, $[\ln |u(x)|]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$;
4) $[\sin u(x)]' = u'(x) \cdot \cos u(x)$;
5) $[\cos u(x)]' = -u'(x) \cdot \sin u(x)$;
6) $[\operatorname{tg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;
7) $[\operatorname{ctg} u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$;
8) $[\operatorname{sh} u(x)]' = u'(x) \cdot \operatorname{ch} u(x)$;
9) $[\operatorname{ch} u(x)]' = u'(x) \cdot \operatorname{sh} u(x)$;
10) $[\operatorname{th} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}$;
11) $[\operatorname{cth} u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}$;
12) $[\arcsin u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$;
13) $[\arccos u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$;
14) $[\operatorname{arctg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$;
15) $[\operatorname{arcctg} u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$.

Если $u(x) = x$, то формулы упрощаются, так как в этом случае $u'(x) = (x)' = 1$, и приобретают вид:

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$;

3) $(\sin x)' = \cos x$;

4) $(\log_a |x|)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(\cos x)' = -\sin x$;

6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

8) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

9) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

10) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

11) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

12.1. Найдите $y'(x)$, если:

а) $y(x) = 2x^{3/4} - 4x^{7/5} + 3x^{-2}$;

б) $y(x) = \dfrac{a}{\sqrt[4]{x^5}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ (a и b — постоянные).

Решение: а) применяя правило дифференцирования суммы, степенной функции, а также формулу (д), получаем

$$y' = 2 \cdot \frac{3}{4}x^{(3/4)-1} - 4 \cdot \frac{7}{5}x^{(7/5)-1} + 3(-2) \cdot x^{-2-1} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot x^{-1/4} - \frac{28}{5}x^{2/5} - 6x^{-3} = \frac{3}{2\sqrt[4]{x}} - \frac{28}{5}\sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x^3};$$

б) в подобных случаях удобнее освободиться от радикалов и записать $y = ax^{-5/4} - bx^{-4/3}$, а затем находить производную:

$$y' = -\frac{5}{4}ax^{(-5/4)-1} + \frac{4}{3}bx^{(-4/3)-1} = -\frac{5}{4}ax^{-9/4} + \frac{4}{3}bx^{-7/3} =$$

$$= -\frac{5a}{4x^2\sqrt[4]{x}} + \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}.$$

12.2. Найдите $y'(x)$, если:

а) $y(x) = x^3 \arcsin x$; б) $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$;
в) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; г) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$.

Решение: а) применяем правило дифференцирования произведения (формулу (в)). Получаем

$$y' = (x^3)' \arcsin x + x^3(\arcsin x)' = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такие подробные записи делать впредь не рекомендуем, следует сразу применять соответствующие формулы;

б) $y' = 2x \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 2x\operatorname{arctg} x + 1$;

в) применяем формулу (г) — правило дифференцирования частного: $y' =$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} =$$
$$= \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2};$$

г) $y = \dfrac{x + x^{1/2}}{x - 2x^{1/3}}$,

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)(x - 2x^{1/3}) - (x + x^{1/2})\left(1 - \frac{2}{3}x^{-2/3}\right)}{(x - 2x^{1/3})^2}.$$

Последнее выражение можно несколько упростить, но мы этого делать не будем.

12.3. Найдите производные и вычислите их значение в указанной точке:

а) $y = 3 - \sqrt[3]{x^5} + \dfrac{64}{x}$, $x_0 = -2\sqrt{2}$; б) $y = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$, $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. а) $y' = (3 - x^{5/3} + 64x^{-1})' = -\dfrac{5}{3}x^{2/3} - 64x^{-2} =$
$= -\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{64}{x^2}$, $\quad y'(-2\sqrt{2}) = -\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{8} - \dfrac{64}{8} = -\dfrac{10}{3} - 8 = -\dfrac{34}{3}$;

б) $y' = \dfrac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \sin t}{(1-\cos t)^2} = \dfrac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2} =$
$= \dfrac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^2} = \dfrac{-1}{1-\cos t}$, $\quad y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{1-1/2} = -2.$

12.4. Пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, найдите производную следующих функций:

а) $y = \cos^5 x$; б) $y = \ln\sin x$; в) $y = 5^{\operatorname{tg} x}$;
г) $y = \ln\cos(x^4+2)$; д) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$;
е) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^3$; ж) $y = \sin^3 \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение: а) обозначим $u(x) = \cos x$. Тогда $y = u^5$. По первой формуле в таблице производных находим

$$y' = 5u^4 \cdot u'_x = 5\cos^4 x(\cos x)' = 5\cos^4 x(-\sin x);$$

б) обозначим $u(x) = \sin x$, тогда $y = \ln u$. По третьей формуле в таблице производных находим

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x.$$

Приобретя некоторый опыт, эти замены нужно делать мысленно, не записывая их;

в) $(5^{\operatorname{tg} x})' = 5^{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{\ln 5}{\cos^2 x}$ (здесь $u(x) = \operatorname{tg} x$, $u'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$);

г) $\left[\ln\cos(x^4+2)\right]' = \dfrac{-\sin(x^4+2)}{\cos(x^4+2)}4x^3$;

д) $(\arccos\sqrt{1-x^2})' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

е) $\left[(\operatorname{arctg} 2x)^3\right]' = 3(\operatorname{arctg} 2x)^2\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2$;

ж) $\left[\sin^3\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]' = 3\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$.

Вы заметили, что функция $u(x)$ сама может быть сложной функцией. От неё находить производную нужно по тем же табличным формулам.

12.5. Найдите производные следующих функций:

а) $y=(2+5x^2+4x^3)^{10}$; б) $y=\sqrt[4]{\sin^3 2x}+\dfrac{1}{\cos^4 3x}$;

в) $y=\sqrt{e^{3x}+2^{4x}+3}+\ln^3 2x$; г)$y=\operatorname{arctg}\ln x+\ln\operatorname{arctg} x$.

Решение:

а) $y'=\left[(2+5x^2+4x^3)^{10}\right]'=10(2+5x^2+4x^3)^9(10x+12x^2)$;

б) $y'=(\sin^{3/4} 2x+\cos^{-4} 3x)'=\dfrac{3}{4}\sin^{-1/4} 2x\cdot\cos 2x\cdot 2-$

$$-4\cos^{-5} 3x(-\sin 3x)\cdot 3=\frac{3\cos 2x}{2\sqrt[4]{\sin 2x}}+\frac{12\sin 3x}{\cos^5 3x};$$

в) $y'=\dfrac{1}{2}(e^{3x}+2^{4x}+3)^{-1/2}(e^{3x}\cdot 3+2^{4x}\cdot\ln 2\cdot 4)+3\ln^2 2x\cdot\dfrac{1}{2x}\cdot 2$;

г) $y'=\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$.

Если требуется продифференцировать произведение и частное с большим числом сомножителей, то иногда выгодно функцию предварительно прологарифмировать.

12.6. Найдите производную функции

$$y=\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}\cdot(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt[5]{4-x}}.$$

Решение. $\ln|y|=\dfrac{1}{3}\ln|1+\sin x|+\ln(1+x^2)-$

$$-\frac{1}{3}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)-\frac{1}{5}\ln|4-x|.$$

Выполним дифференцирование:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\cos x}{3(1+\sin x)}+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2\operatorname{tg} x}{3(1+\operatorname{tg}^2 x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{4-x}.$$

Следовательно, $y'=\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}\cdot(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^2 x}\sqrt[5]{4-x}}\left[\dfrac{\cos x}{3(1+\sin x)}+\right.$

$$\left.+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2\operatorname{tg} x}{3(1+\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x}+\frac{1}{5(4-x)}\right].$$

Продифференцировать степенно-показательную функцию $y = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$, можно либо прологарифмировав её, либо используя логарифмическое тождество $y = e^{v(x)\ln u(x)}$. В результате получим $y' = u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)]' =$
$$= u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right].$$

12.7. Найдите производную от функции $y = (\sin^2 x)^{\cos 3x}$.

Решение. Используя логарифмическое тождество, можем записать $y = e^{\cos 3x\cdot\ln\sin^2 x}$. Находим $y' = e^{\cos 3x\cdot\ln\sin^2 x}\times$
$$\times\left(-3\sin 3x\cdot\ln\sin^2 x + \cos 3x\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}\right) =$$
$$= (\sin^2 x)^{\cos 3x}(-3\sin 3x\ln\sin^2 x + 2\cos 3x\cdot\operatorname{ctg} x).$$

12.8. Найдите производные следующих векторных функций одного скалярного аргумента:
$$\text{а)} f(x) = \begin{bmatrix} \sin^3 x^2 \\ x^3 \\ \dfrac{1+x}{1-x} \end{bmatrix};\quad \text{б)} f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2^x \\ \operatorname{tg}^4 x^3 \end{bmatrix}.$$

Решение: а) чтобы найти производную от $f(x)$, нужно найти производные от координатных функций. Поэтому
$$f'(x) = \begin{bmatrix} (\sin^3 x^2)' \\ (x^3)' \\ \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sin^2 x^2\cos x^2\cdot 2x \\ 3x^2 \\ \dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3\sin^2 x^2\cos x^2\cdot 2x \\ 3x^2 \\ \dfrac{2}{(1-x)^2} \end{bmatrix};$$
$$\text{б)} f'(x) = \begin{bmatrix} (x^2)' \\ (2^x)' \\ (\operatorname{tg}^4 x^3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2^x\ln 2 \\ 4\operatorname{tg}^3 x^3\cdot\dfrac{3x^2}{\cos^2 x^3} \end{bmatrix}.$$

Часто подобные функции записывают в виде $\mathbf{a}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$. Тогда $\mathbf{a}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}$.

Например, если $\mathbf{a}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, то $\mathbf{a}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Задачи для самостоятельного решения

12.9. Найдите производную функции и вычислите значение производной в точке $x_0 = 1$:

а) $y(x) = 4x^{7/3} + 5x^{5/2} + \sqrt{x} + 1$;

б) $y(x) = \dfrac{3}{x\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{8}{x^2\sqrt[4]{x^3}} + 2$;

в) $y(x) = 2x^3\sqrt{x^3} + 3x^2\sqrt[3]{x^5} + 3$;

г) $y = 24\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^9}} - 16\sqrt{\dfrac{1}{x^2}} + 2$;

д) $y = 5x^5 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{6}{x^7}$;

е) $y = \dfrac{24 - 15\sqrt[5]{x^{-10}}}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$.

12.10. Найдите производную функции и вычислите значение производной в точке x_0:

а) $y = (x^2 + 2x + 2)\arcsin(0{,}5 + x), \quad x_0 = 0$;

б) $y = x^4 \operatorname{arctg} 2x, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$;

в) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{3 + 4x}, \quad x_0 = 0$;

г) $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{3 - \cos x}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

д) $y = e^{2x}(\cos x + 2\sin x), \quad x_0 = 0$;

е) $y = 2\sin 7\left(x + \dfrac{\pi}{28}\right)\cos 4\left(x + \dfrac{\pi}{16}\right) - x, \quad x_0 = 0$;

ж) $y = 8(9x - 2)\ln(8 - 10x) + (72\ln 8)x, \quad x_0 = 0$;

з) $y = \dfrac{9(9x + 5)}{3x^2 + x - 1}, \quad x_0 = 1$.

12.11. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производные от следующих функций и вычислите их значение в указанной точке:

а) $y(x) = (x^4 + 3x^2 + 2x + 3)^{20}, \quad x_0 = 0;$

б) $y(x) = \sqrt{2} \sin^5 2x; \quad x_0 = \dfrac{\pi}{8};$

в) $y(x) = \ln \cos 4x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{12};$

г) $y(x) = 3^{\operatorname{tg} 2x}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{8};$

д) $y(x) = (\operatorname{arcctg} \sqrt{x})^2, \quad x_0 = 1;$

е) $y(x) = \left(\arcsin \dfrac{1+x}{1-x}\right)^2, \quad x_0 = -\dfrac{1}{3};$

ж) $y(x) = \cos^3 \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x_0 = 1;$

з) $y(x) = \ln \ln \ln x, \quad x_0 = e^2;$

и) $y(x) = \left(\arccos \dfrac{x}{x+2}\right)^4, \quad x_0 = 0;$

к) $y(x) = \ln \dfrac{5x+3}{5x+1}, \quad x_0 = 0;$

л) $y(x) = e^{3x^2+4x+1}, \quad x_0 = -1;$

м) $y(x) = \dfrac{4}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x}\right)^2, \quad x_0 = 1.$

12.12. Найдите производные следующих функций, предварительно их прологарифмировав:

а) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4}\sqrt{(x+3)^5}};$

б) $y(x) = e^x \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x.$

12.13. Найдите производные следующих степенно-показательных функций:

а) $y = (\ln x)^{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = (\sqrt{x})^x$; в) $y = \sqrt[x]{x^2+1}$;

г) $y = (\operatorname{tg})^{\sin x}$ д) $y = (\operatorname{ctg}^2 x)^{\frac{1}{x}}$; е) $y = (\cos x)^{1+x^3}$.

12.14. Докажите, что функция $y(x) = \dfrac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' + 2y = e^{-x^2} + \dfrac{1}{2x}$.

12.15. Найдите производные следующих функций, содержащих гиперболические функции:

а) $f(x) = \operatorname{sh}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$; б) $f(x) = \ln \operatorname{ch} x$;

в) $f(x) = \arcsin(\operatorname{th} x)$; г) $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$;

д) $f(x) = (\operatorname{ch} 3x)^4$; е) $f(x) = (\operatorname{th} 5x)^2$;

ж) $f(x) = (\operatorname{cth} 3x)^5$.

12.16. Найдите производные следующих функций:

а) $y(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$;

б) $y(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

в) $y(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$;

г) $y(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$;

д) $y(x) = \dfrac{x}{2a^2(a^2 - x^2)^2} + \dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right|$;

е) $y(x) = \dfrac{x}{2a^2} + \ln\dfrac{x^2}{a^2 + x^2}$;

ж) $y(x) = \dfrac{2x^{3/2}}{3b^2} - \dfrac{2a^2}{b^4}x^{1/2} + \dfrac{2a^3}{b^5}\operatorname{arctg}\dfrac{bx^{1/2}}{a}$.

13. Производные высших порядков функций скалярного аргумента

Производную $y'(x)$ функции $y(x)$ иногда называют производной первого порядка. Производная $y'(x)$ сама является функцией от x, от неё также можно взять производную $[y'(x)]'$, обозначаемую $y''(x)$ и называемую второй производной, или производной второго порядка. Аналогично можно получить производную любого порядка n. Её обозначают $y^{(n)}(x)$.

Используя таблицу производных и метод математической индукции, легко доказать справедливость следующих формул:

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n; \tag{а}$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}; \tag{б}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \tag{в}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \tag{г}$$

13.1. Найдите производные второго порядка от следующих функций:

а) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; б) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

в) $y = \ln(x+\sqrt{9+x^2})$; г) $y = e^{\sqrt{x}}$.

Решение: а) $y'(x) = 2x\operatorname{arctg} x + \dfrac{1+x^2}{1+x^2} = 2x\operatorname{arctg} x + 1$,

$y''(x) = 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}$;

б) $y'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \dfrac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$, $y''(x) = (-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}})\arcsin x -$

$-\dfrac{x}{1-x^2} = -\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - \dfrac{x}{1-x^2}$;

в) $y' = [\ln(x+\sqrt{9+x^2})]' = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{x+\sqrt{9+x^2}} =$

$= \dfrac{x+\sqrt{9+x^2}}{(x+\sqrt{9+x^2})\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$, $y''(x) = [(9+x^2)^{-1/2}]' =$

$= -\dfrac{1}{2}(9+x^2)^{-3/2}\cdot 2x = -\dfrac{x}{(\sqrt{9+x^2})^3}$;

г) $y' = (e^{\sqrt{x}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$,

$y'' = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}e^{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4x}e^{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4x}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$.

13.2. Найдите производные n-го порядка от следующих функций: а) $y = 2^{3x}$; б) $y = \sin 3x \cdot \sin 5x$; в) $y = \dfrac{3x+2}{4x+5}$.

Решение: а) $y' = 2^{3x} \ln 2 \cdot 3$, $y'' = 2^{3x}(\ln 2)^2 \cdot 3^2$, $\ldots$, $y^{(n)} = 2^{3x}(\ln 2)^n \cdot 3^n$ (применили формулу (а));

б) $y = \sin 3x \cdot \sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$, поэтому $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[2^n \cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right) - 8^n \cos\left(8x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ (см. формулу(г));

в) чтобы применить формулу (б), преобразуем выражение для функции $y(x) = \dfrac{3x+2}{4x+5} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{4(4x+5)}$ (выполнили деление по правилу деления многочленов). Применяя формулу (б), получаем $y^{(n)} = -\dfrac{7(-1)^n n! 4^n}{4(4x+5)^{n+1}} = \dfrac{7(-1)^{n+1}4^{n-1}}{(4x+5)^{n+1}}$.

В некоторых случаях значительно сократить вычисления при отыскании производной от произведения позволяет формула Лейбница

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}u^{(n-m)}v^{(m)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

13.3. Применяя формулу Лейбница, найдите производные указанного порядка для следующих функций:

а) $y = x^2 \cos 4x$, $y^{(20)}$;

б) $y = e^{2x}(x^3 - 1)$, $y^{(12)}$;

Решение: а) положим $u = \cos 4x$, $v = x^2$. Тогда $(u \cdot v)^{(20)} = (\cos 4x)^{(20)} \cdot x^2 + 20(\cos 4x)^{(19)} \cdot 2x + \dfrac{20 \cdot 19}{2}(\cos 4x)^{(18)} \cdot 2 = 4^{20} \cos\left(4x + 20 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot x^2 + 20 \cdot 4^{19} \cos\left(4x + 19 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 2x + 190 \cdot 4^{18} \cos\left(4x + 18 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 4^{20} \cdot x^2 \cos 4x + 40 \cdot 4^{19} x \sin 4x - 4^{18} \cdot 380 \cos 4x$;

б) положим $e^{2x} = u$, $(x^3-1) = v$. Тогда, применяя формулу Лейбница, получаем

$$(u \cdot v)^{(12)} = [e^{2x}(x^3-1)]^{(12)} = (e^{2x})^{(12)}(x^3-1) +$$

$$+ 12(e^{2x})^{(11)} \cdot 3x^2 + \frac{12 \cdot 11}{2}(e^{2x})^{(10)} \cdot 6x + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}(e^{2x})^{(9)} \cdot 6 =$$

$$= 2^{12}e^{2x}(x^3-1) + 36 \cdot 2^{11}e^{2x}x^2 + 396 \cdot 2^{10}e^{2x}x + 1320 \cdot 2^9 e^{2x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.4. Найдите производные второго порядка от следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2+3x}{2-3x}\right|$; б) $f(x) = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3}{4}x$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}x$; г) $f(x) = e^{x^2+2x+2}$;

д) $f(x) = 2^{\sin^3 x}$.

13.5. Найдите производные порядка n от следующих функций:

а) $y = x\ln x$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

в) $y = \sin 2x \cos 4x$; г) $y = \dfrac{5x+22}{(x+4)(x+5)}$;

д) $y = \ln(x^2-1)$; е) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;

ж) $y = e^{4x+3}$.

13.6. Применяя формулу Лейбница, найдите производные указанного порядка от следующих функций:

а) $y = x^2\sin x$, $y^{(10)}$;

б) $y = x\operatorname{ch} x$, $y^{(100)}$;

в) $y = 3^x \cdot x^2$, $y^{(20)}$;

г) $y = (1+x)\sqrt{x-1}$, $y^{(n)}$;

д) $y = x^2e^{-x}$, $y^{(n)}$.

13.7. Найдите y''', если:

а) $y = \begin{bmatrix} x^3/6 \\ x^4/24 \\ x^5/60 \end{bmatrix}$; б) $y = \begin{bmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \\ x^3 \end{bmatrix}$;

в) $y = (t^3+1)\mathbf{i} + (t^2+2)\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$;

г) $y = e^{2t+3}\mathbf{i} + t\ln t\mathbf{j} + \cos^2 t\mathbf{k}$.

14. Дифференцирование функций многих аргументов

Мы уже отмечали, что элементами производной матрицы в случае функций векторного аргумента (функций многих скалярных аргументов) являются частные производные — производные по одному из аргументов при фиксированных всех остальных. Чтобы найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ от функции $z(x,y)$, нужно взять производную по x, считая аргумент y константой. Напомним, что производная константы равна нулю и что константу-сомножитель можно выносить за знак производной. Аналогично находят $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, считая аргумент x константой.

14.1. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от следующих функций:

а) $z = \sqrt{x^2+y^2} + 2xy$; б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + x^2$;

в) $z = e^{2x}\cos y - e^{3y}\sin x$.

Решение:

а) считая y константой, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x + 2y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y.$$

Полагая $x = \text{const}$, получаем $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \dfrac{1}{y} + 2x = \dfrac{y}{x^2+y^2} + 2x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2};$$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}\cos y - e^{3y}\cos x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -e^{2x}\sin y - 3e^{3y}\sin x.$

14.2. Докажите, что функция $z = \ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, следовательно, $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} - \dfrac{2yx}{x^2+y^2} = 0$, что и требовалось доказать.

14.3. Найдите производную матрицу следующих функций:

а) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$; б) $u = \begin{bmatrix} x\sin y \\ y\sin x \end{bmatrix}$.

Решение: а) функция $u(x,y)$ отображает некоторое множество из R_3 в R. Для таких функций производная матрица u' имеет вид $u' = \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right]$, т. е. $u' = \left[\dfrac{1}{y}, \dfrac{-x}{y^2} + \dfrac{1}{z}, \dfrac{-y}{z^2}\right]$;

б) в этом случае функция $u(x,y)$ отображает некоторое множество из R_2 в R_2. Как нам известно из теории [6, с. 112], производная матрица для этих функций имеет вид

$u' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$, где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ — координатные функции. Поэтому $u' = \begin{bmatrix} \sin y & x\cos y \\ y\cos x & \sin x \end{bmatrix}$.

14.4. Найдите частные производные от функции

$z = (\sin^2 x)^{\cos^2 y}$.

Решение. Используя правило дифференцирования степенной функции, если y — константа, и показательной, если x — константа, получаем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos^2 y(\sin^2 x)^{\cos^2 y - 1} \cdot 2\sin x\cos x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin^2 x)^{\cos^2 y} \ln\sin^2 x \cdot 2\cos y(-\sin y).$$

14.5. Найдите частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ от функции $u = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и вычислите их значения в точке $M_0(1;2;2)$.

Решение. Считая аргументы y и z константами, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1;2;2) = \frac{-2}{\sqrt{9^3}} = -\frac{2}{27}.$$

Далее, полагая x и z константами, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} =$$

$$= \frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1;2;2) = \frac{1+2^2}{\sqrt{9^3}} = \frac{5}{27}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z}(1;2;2) = -\frac{4}{27}.$$

Вы заметили, что частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ (их называют частными производными первого порядка) от функции $z(x,y)$ сами являются функциями аргументов x и y. От этих производных также можно взять частные производные и получить производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}.$$

Итак, в случае функции двух аргументов получили четыре частных производных второго порядка: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}. От этих производных можно также взять частные производные и получить восемь производных третьего порядка: z'''_{xxx}, z'''_{xxy}, z'''_{yxx}, z'''_{yxy}, z'''_{xyx}, z'''_{xyy}, z'''_{yyx}, z'''_{yyy}. Частные производные высших порядков, в которые входит дифференцирование по различным аргументам, называются смешанными. Справедлива теорема: если смешанные частные производные существуют в точке и некоторой её окрестности и непрерывны в ней, то эти смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, а зависят только от общего числа дифференцирований по каждому аргументу. Поэтому если условия теоремы выполнены, то $z''_{xy} = z''_{yx}$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$, $z'''_{yyx} = z'''_{yxy} = z'''_{xyy}$. В этом случае для смешанных производных третьего порядка вводят обозначения $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ или $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$ или $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$. Аналогично можно рассмотреть частные производные четвертого порядка, например $\dfrac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial^3 x \partial y}$ и т. д. Таким же образом можно получить частные производные высших порядков функций любого числа аргументов.

14.6. Найдите частные производные второго порядка от следующих функций:

а) $z = e^{xy}$; б) $z = x \sin y$.

Решение:

а) $$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy} + yxe^{xy} = e^{xy}(1 + xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy};$$

б) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y.$$

14.7. Найдите частные производные третьего порядка от функции $z = x^5 + 4x^4y - 2x^3y^2 + 3x^2y^3 + y^4$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 16x^3y - 6x^2y^2 + 6xy^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^4 - 4x^3y + 9x^2y^2 + 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 + 48x^2y - 12xy^2 + 6y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 16x^3 - 12x^2y + 18xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^3 + 18x^2y + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 60x^2 + 96xy - 12y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 48x^2 - 24xy + 18y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -12x^2 + 36xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 18x^2 + 24y.$$

14.8. Докажите, что функция $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, что и требовалось доказать.

Мы до сих пор рассматривали функции $z(x, y)$ независимых переменных, но возможны случаи, когда z зависит от x и y через некоторые промежуточные переменные:
$z(x, y) = f\,[u(x, y), v(x, y)]$. Рассмотрим сначала более простой случай функции одного аргумента вида $z(x) = f\,[u(x), v(x)]$. Правило дифференцирования таких функций [6, с. 115]:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{а}$$

Возможна зависимость $z = f\,[x, u(x), v(x)]$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{б}$$

Здесь частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ вычисляется при фиксированных значениях аргументов u и v. Производную $\dfrac{dz}{dx}$ называют полной. Она вычисляется в предположении, что u и v являются функциями от x.

14.9. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$ и $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$, если $z = f(u, v)$, $u = x^2$, $v = x^3$.

Решение. Так как $\dfrac{du}{dx} = 2x$, $\dfrac{dv}{dx} = 3x^2$, то по формуле (а) получаем $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2$.

Для отыскания второй производной $\dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$ надо найти производную по x от функции

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2 = \varphi\,[x, u(x), v(x)],$$

которая зависит от x, $u(x)$ и $v(x)$. В этом случае нужно применять формулу (б), взяв вместо функции f функцию $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2 = \varphi\,[x, u(x), v(x)]$.

Находим:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right)\cdot 2x +$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right)\cdot 3x^2 =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 6x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 3x^2\right)2x +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 3x^2\right)3x^2 =$$
$$= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 6x\frac{\partial f}{\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 12x^3\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 9x^4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

(мы посчитали, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$).

14.10. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \sin(\alpha x)\cdot f(u,v)$, $u = e^{2x}$, $v = 2x$.

Решение. Функция z зависит от x как непосредственно, так и через функции $u(x)$ и $v(x)$. Поэтому применяем формулу (б):

$$\frac{dz}{dx} = \alpha\cos(\alpha x)\cdot f(u,v) + \sin(\alpha x)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}e^{2x}\cdot 2 + \sin(\alpha x)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2.$$

Если бы требовалось найти $\dfrac{d^2z}{dx^2}$, то опять применяли бы формулу (б), положив функцию f равной правой части в выражении для $\dfrac{dz}{dx}$.

Пусть теперь имеем функцию $z = f\left[u(x,y), v(x,y)\right]$.

Правило отыскания частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ [6, с. 116]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{в})$$

В случае если $z = f\,[x, y, u(x, y), v(x, y)]$, т. е. z зависит от x и y непосредственно и через функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(г)}$$

Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ вычисляются в предположении, что аргументы u и v постоянны.

14.11. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$z = f\,[u(x, y), v(x, y)]$, $\quad u(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad v(x, y) = x^3 - y^3$.

Решение. По формулам (в), учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -3y^2$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3y^2.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

и учитывая, что частные производные первого порядка зависят от x и y непосредственно и через функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то для отыскания вторых частных производных используем формулы (г).

По первой формуле в (г), подставляя вместо функции f функцию $\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2$, находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\cdot 2x+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\cdot 3x^2=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 6x+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 3x^2\right)\cdot 2x+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 3x^2\right)\cdot 3x^2=$$
$$=2\frac{\partial f}{\partial u}+6x\frac{\partial f}{\partial v}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+12x^3\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+9x^4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Мы считаем здесь и далее, что $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$. Аналогично, применив вторую формулу из (г), подставив вместо функции f функцию $\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\cdot 2y+$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2\right]\cdot(-3y^2)=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 3x^2\right)\cdot 2y+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 3x^2\right)\cdot(-3y^2)=$$
$$=4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-9x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+(6x^2y-6xy^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

Первое слагаемое обратилось в нуль, так как функция $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3x^2$ при фиксированных u и v от аргумента y не зависит. Находим $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Применяем вторую формулу в (г), подставив вместо f функцию $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3y^2$. Получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3y^2\right]\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3y^2\right] \cdot 2y+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 3y^2\right] \cdot (-3y^2) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2 - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 6y+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2y - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 3y^2\right) \cdot 2y-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 2y - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 3y^2\right) \cdot 3y^2 =$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial u} - 6y\frac{\partial f}{\partial v} + 4y^2\frac{\partial f^2}{\partial u^2} - 12y^3\frac{\partial f^2}{\partial u \partial v} + 9y^4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

14.12. Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

а) $z(x,y) = x^4y^3 + 2y\ln x$;

б) $z(x,y) = (\sin x)^{\cos y} + (\cos y)^{\sin x}$;

в) $u(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$; г) $u(x,y,z) = z^{x/y}$;

д) $z(u,v) = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$; е) $z(x,y) = (5x^2y - y^3 + 7)^3$;

ж) $z(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; з) $z(x,y) = \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x}$.

14.13. Найдите производную матрицу следующих функций:

$$\text{а) } u(x,y)=\begin{bmatrix}\sin(x^2+y^2)\\ \cos(x^2+y^2)\end{bmatrix};\quad \text{б) } u(x,y)=\begin{bmatrix}e^x\operatorname{tg}y\\ e^y\operatorname{tg}x\end{bmatrix};$$

$$\text{в) } u(x,y)=\begin{bmatrix}\ln(2x+3y)\\ e^{5x+4y}\end{bmatrix};\quad \text{г) } u(x,y)=\begin{bmatrix}\arcsin\dfrac{x}{y}\\ 2^{xy}\end{bmatrix}.$$

14.14. Найдите частные производные первого порядка от следующих функций и вычислите их значение в указанной точке M_0:

а) $u(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(2;-1;-2)$;

б) $u(x,y,z)=3x^5+8x^3y-2xyz^2+y^2z^2$, $M_0(1;-1;2)$;

в) $u(x,y,z)=z^3\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(3;4;1)$;

г) $u(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $M_0(5;3;2)$.

14.15. Найдите частные производные второго порядка от следующих функций:

а) $z(x,y)=x^2y^3+x^3y^2$; б) $z(x,y)=e^{2x-4y}$;

в) $z(x,y)=\sin(x^2+y^2)$; г) $z(x,y)=\arcsin(xy)$;

д) $z(x,y)=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$; е) $z(x,y,z)=\sin(xy^2z^3)$.

14.16. Найдите частные производные второго порядка и вычислите их значения в указанной точке M_0 от следующих функций:

а) $u(x,y,z)=e^{x^2+2y+3z}$, $M_0(0;0;0)$;

б) $u(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(3;-4;25)$;

в) $u(x,y,z)=2x^3-3x^2y^2+y^4z-z^2x^2$, $M_0(0;1;2)$;

г) $u(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $M_0(1;2;3)$.

14.17. Найдите частные производные третьего порядка и вычислите их значения в указанной точке M_0 от следующих функций:

а) $u(x,y,z)=\sin(2x+3y+4z)$, $M_0(0;0;0)$;

б) $u(x,y)=x^4+2x^3y-3x^2y^2+2xy^3+y^4$, $M_0(1;2)$.

14.18. Докажите, что функция $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

14.19. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$ и $\dfrac{d^2z}{dx^2}$, если:

а) $z = f(u,v)$, $u = \dfrac{1}{x^2}$, $v = \ln x$;
б) $z = f(u,v)$, $u = e^{2x}$, $v = \sin x$;
в) $z = f(x,u,v)$, $u = x^2$, $v = x^3$;
г) $z = \sin^2 x f(u,v)$, $u = 2x$, $v = 5x$.

14.20. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если:

а) $z = f(u,v)$, $u = xy$; $v = \dfrac{x}{y}$;

б) $z = f(u,v)$, $u = 2x+3y$, $v = 4x-2y$;

в) $z = f(u,v)$, $u = \sin(x+y)$, $v = \sin(x-y)$,

г) $z = f(u,v)$, $u = x^2-y^2$, $v = x^2+y^2$.

15. Производная по направлению

Пусть дана дифференцируемая функция $f(M) = f(x,y,z)$. Производной функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\mathbf{a} \neq 0$ (обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial a}$) называют предел

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{\pm|\mathbf{M_0M}|}, \quad \mathbf{M_0M} \parallel \mathbf{a},$$

если он существует и конечен. Знак «+» выбирают, если $\mathbf{M_0M} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, и знак «−» если $\mathbf{M_0M} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$. Доказано, что

$$\frac{\partial f}{\partial a}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \quad \text{(a)}$$

Вектор $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right\}$, совпадающий с производной матрицей функции $f(M)$ в точке M_0, называют градиентом функции $f(M)$ в точке M_0 и обозначают $\operatorname{grad} f(M_0)$. Формулу (а) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\operatorname{grad} f(M_0), \mathbf{a}_0), \tag{б}$$

где $\mathbf{a}_0$ — орт вектора $\mathbf{a}$, т. е. вектор, направленный так же, как вектор $\mathbf{a}$, но по длине равный единице. Напомним, что если $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$, то

$$\mathbf{a}_0 = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}.$$

Из формулы (б) следует физический смысл вектора $\operatorname{grad} f$. Это то направление, в котором $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|$ принимает наибольшее значение, при этом $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = |\operatorname{grad} f(M_0)|$, т. е. модуль градиента равен наибольшему значению $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(M_0)\right|$ среди всех возможных направлений.

15.1. Найдите градиент и производную по направлению $\mathbf{a} = \{3, 0, -4\}$ в точке $M_0(1, 2, -3)$ функции $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{yz+1}{x}$.

Решение. Найдем сначала $\operatorname{grad} f(M_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{(yz+1)^2}{x^2}} \cdot \frac{-(yz+1)}{x^2} = -\frac{yz+1}{x^2+(yz+1)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{5}{26},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{(yz+1)^2}{x^2}} \cdot \frac{z}{x} = \frac{xz}{x^2+(yz+1)^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = -\frac{3}{26},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{1 + \frac{(yz+1)^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x} = \frac{yx}{x^2+(yz+1)^2}, \ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \frac{2}{26}.$$

Таким образом, $\operatorname{grad} f(M_0) = \left\{ \frac{5}{26}, -\frac{3}{26}, \frac{2}{26} \right\}$.

Находим орт вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}_0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{3^2+0+4^2}}, 0, \frac{-4}{\sqrt{3^2+0+4^2}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right\}.$$

По формуле (б) находим

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(M_0) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{26}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{3}{26}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2}{26} = \frac{7}{130}.$$

15.2. Найдите производную от функции $f(x,y,z) = x^3y - xy^3 - 3z^2$ в точке $M_0(1,1,-1)$ по направлению, идущему от точки M_0 в точку $A(3,-1,-2)$.

Решение. Находим $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ в точке M_0:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) = -2$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -6z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 6$.

Итак, $\operatorname{grad} f(M_0) = \{2,-2,6\}$. Находим координаты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{M_0A} = \{2,-2,-1\}$. Так как $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3$, то орт вектора $\mathbf{a}$ имеет координаты $\left\{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right\}$. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\operatorname{grad} f(M_0), \mathbf{a}_0) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

15.3. Определите, по какому направлению в точке $M_0(-2,-2,2)$ функция $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ изменяется наиболее быстро и какова максимальная скорость этого изменения.

Решение. Наиболее быстро функция изменяется в направлении её градиента, а максимальная скорость изменения равна $|\operatorname{grad} f(x,y,z)|$. Так как

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial}\mathbf{k} =$$

$$= (2xy^2 + 2xz^2)\mathbf{i} + (2x^2y + 2yz^2)\mathbf{j} + (2x^2z + 2y^2z)\mathbf{k},$$

то $\operatorname{grad} f(M_0) = -32\mathbf{i} - 32\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$. Наиболее быстро функция $f(x,y,z)$ изменяется в направлении вектора $\{1,1,-1\}$, при этом $\max\left|\dfrac{\partial f}{\partial a}\right| = |\operatorname{grad} f(M_0)| = 32\sqrt{1+1+1} = 32\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

15.4. Найдите градиент в указанной точке M_0 для следующих функций:

а) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,-2,-2)$;

б) $f(x,y,z)=\dfrac{yz^2}{x^2}$, $M_0\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(-13+x^2+y^2+z^2)$, $M_0(1,2,3)$;

г) $f(x,y,z)=0{,}4\arcsin(7{,}6+4x^2-5y^2+z^2)$, $M_0(1,-2,-3)$;

д) $f(x,y,z)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+2x^2y+2xz^2-y^2z-3\right)$, $M_0(1,1,1)$.

15.5. Для данной функции в указанной точке найдите направление $\mathbf{l}$, в котором она изменяется наиболее быстро, укажите максимальную скорость этого изменения:

а) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-xy-4x+2y-4z$, $M_0(0,0,1)$;

б) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$, $M_0(2,1,2)$.

15.6. Найдите производные по указанному направлению в данной точке от следующих функций:

а) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, $\mathbf{a}=\{3;4;12\}$, $M_0(1,2,-1)$;

б) $f(x,y,z)=x^2-3yz+5$, $\mathbf{a}=\{1;1;1\}$, $M_0(2,1,3)$;

в) $f(x,y,z)=6\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2-2x-4y-4z\right)$, $\mathbf{a}=\{-1;2;2\}$, $M_0(1,2,-3)$;

г) $f(x,y,z)=1{,}8\arccos(2{,}8-4x+3y^2-z^3)$, $\mathbf{a}=\{1;-2;-2\}$, $M_0(1,1,1)$;

д) $f(x,y,z)=7\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+4x+y-4z\right)$, $\mathbf{a}=\{-6;2;3\}$, $M_0(1,1,1)$.

15.7. Найдите производную функции $z=x^2-xy-2y^2$ в точке $P(1,2)$ в направлении, составляющем с осью OX угол 60°.

15.8. Найдите производную функции $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(1,1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

15.9. Найдите косинус угла между градиентами функции $z = \ln\dfrac{y}{x}$ в точках $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ и $B(1,1)$.

16. Производные параметрически заданных функций

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in T$, и функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные достаточно высокого порядка, то производные $y'_x, y''_{xx}, \ldots, y^{(n)}_{(x)}$ можно найти по формулам

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \\ x = x(t) \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

16.1. Найдите y'_x и y''_{xx}, если функция $y = f(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$ Вычислите значение y''_{xx} при $t = 1$.

Решение. Найдем сначала x'_t и y'_t: $x'_t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y'_t = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, следовательно, $\dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t^2/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \dfrac{t}{2}$, поэтому $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t}{2}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Так как $(y'_x)'_t = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(y'_x)'_t}{x'(t)} = \dfrac{t^2+1}{4t}$, то $\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{t^2+1}{4t}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

При $t = 1$ вторая производная $y''_{xx} = \dfrac{1+1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

16.2. Найдите y'_x от следующих функций, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} y(t) = \arccos 2t, \\ x(t) = \arcsin(t^2 - 1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} y(t) = a\sin t + b\cos t, \\ x(t) = 4\operatorname{tg}^2 \dfrac{t}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y(t) = -6t^4 - 5t + 1, \\ x(t) = t^3 + t; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y(t) = 4[-9\ln(1+t^2) - 2\operatorname{arctg} t], \\ x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + t. \end{cases}$

16.3. Найдите y''_{xx} следующих функций и вычислите значение y''_{xx} в указанной точке $t = t_0$:

а) $\begin{cases} y(t) = \dfrac{t^3}{3} - t, \\ x(t) = t^2 + 2, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

б) $\begin{cases} y(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ x(t) = \arcsin t, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

в) $\begin{cases} y(t) = 5\sqrt{t^2-1} - a\arcsin \dfrac{1}{t}, \\ x(t) = \arccos \dfrac{1}{t}, \end{cases} \quad t > 1,\ t_0 = \sqrt{2};$

г) $\begin{cases} y(t) = 9t + 5\sin t, \\ x(t) = e^t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

д) $\begin{cases} y(t) = 4[3\ln(1+t^2) - 10t], \\ x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + t, \end{cases} \quad t_0 = 1.$

17. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет неявно на $[a, b]$ функцию $y = y(x)$, т. е. на $[a, b]$ справедливо тождество $\Phi\,[x, y(x)] \equiv 0$ относительно x. Если функция $\Phi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и по y и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0$, то

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}. \tag{а}$$

Если уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ определяет неявно в области D функцию $z = z(x, y)$, т. е. в области D выполняется тождество $\Phi(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ относительно $(x, y) \in D$, и функция $\Phi(x, y, z)$ имеет частные производные Φ'_x, Φ'_y, Φ'_z, причём $\Phi'_z \neq 0$, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z}. \tag{б}$$

17.1. Найдите y'_x от функций, заданных неявно уравнениями:

а) $\Phi(x, y) = x^3 + x^2 y + y^2 = 0$; б) $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$.

Решение: а) $y'_x = -\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y} = -\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$;

б) данное соотношение перепишем в виде

$\Phi(x, y) = y^3(x + y) - x + y = y^3 x + y^4 - x + y = 0$.

Тогда $y'_x = -\dfrac{y^3 - 1}{3y^2 x + 4y^3 + 1}$.

17.2. Найдите y''_x от следующих функций, заданных неявно: а) $y = x + \operatorname{arctg} y$; б) $x^2 + 2xy - y^2 = 0$.

Решение: а) в данном случае $\Phi(x, y) = x + \operatorname{arctg} y - y$, поэтому $y'_x = -\dfrac{1}{\dfrac{1}{1 + y^2} - 1} = -\dfrac{1 + y^2}{-y^2} = \dfrac{1}{y^2} + 1$. Для отыскания

y''_{xx} дифференцируем по x последнее соотношение, учитывая, что y является функцией от x. Получаем $y''(x) = -\dfrac{2}{y^3}y'$, но $y' = \dfrac{y^2+1}{y^2}$, поэтому $y''(x) = -\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$;

б) в рассматриваемом случае $\Phi(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 = 0$, поэтому $y'(x) = -\dfrac{2x+2y}{2x-2y} = \dfrac{x+y}{y-x}$. Находим вторую производную, дифференцируя частное $\dfrac{x+y}{y-x}$ с учетом, что y есть функция от x. Получаем

$$y''(x) = \frac{(1+y')(y-x)-(x+y)(y'-1)}{(y-x)^2} =$$

$$= \frac{2y-2xy'}{(y-x)^2} = \frac{2y-2x\cdot\dfrac{x+y}{y-x}}{(y-x)^2} = \frac{2(y^2-x^2-2xy)}{(y-x)^3}.$$

Можно было бы найти и третью производную, дифференцируя по x последнее частное.

Подчеркнем, что все производные от неявно заданной функции выражаются явно через x и y.

17.3. Найдите значение $y''(x)$ в точке $x=0$, если

$x^4 - xy + y^4 = 1$ и $y(0) = 1$.

Решение. В тех задачах, в которых требуется найти только значения производных в указанной точке, а явное их выражение через x и y находить не требуется, можно поступить по-другому, не используя формулу (а). Дифференцируем дважды тождество $x^4 - xy(x) + y^4(x) = 1$ по x. Получаем

$$4x^3 - y(x) - xy'(x) + 4y^3y'(x) = 0,$$

$$12x^2 - y'(x) - y'(x) - xy''(x) + 12y^2\left[y'(x)\right]^2 + 4y^3y''(x) = 0.$$

Из первого соотношения при $x=0$ и $y=1$ получаем $y'(0) = 1/4$. Полагая $x=0$, $y=1$, $y'(0)=1/4$, из второго соотношения находим $y''(0) = -1/16$.

17.4. Функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $\Phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и вычислите их значения в точке $(2,0)$.

Решение. Применяя формулы (б), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z} = -\frac{4x-8z}{2z-8x-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z} = -\frac{4y}{2z-6x-1}.$$

При $x=2$, $y=0$ для определения z получаем уравнение

$$\Phi(2,0,z) = 8 + z^2 - 16z - z + 8 = z^2 - 17z + 16 = 0.$$

Отсюда находим два значения z: $z_1 = 1$, $z_2 = 16$, т. е. данное уравнение в окрестности точки $(2,0)$ определяет две функции $z(x,y)$. Будем вычислять значения частных производных той из них, для которой $z=1$.

Теперь

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,0) = -\frac{8-8}{2-16-1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,0) = 0.$$

Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{8z-4x}{2z-8x-1}\right) =$$

$$= \frac{(8z'_x - 4)(2z-8x-1) - (2z'_x - 8)(8z-4x)}{(2z-8x-1)^2} =$$

$$= \frac{(16z - 64x - 8 - 16z + 8x)z'_x - (8z - 32x - 4 - 64z + 32x)}{(2z-8x-1)^2} =$$

$$= \frac{(56x+8)\cdot\dfrac{4x-8z}{2z-8x-1} + (56z+4)}{(2z-8x-1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,0) = \frac{56+4}{(2-16-1)^2} = \frac{60}{15^2} = \frac{4}{15};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4(2z-8x-1) - 4y\cdot 2z'_y}{(2z-8x-1)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,0) = \frac{60}{15^2} = \frac{4}{15};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{4y(2z'_x-8)}{(2z-8x-1)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,0) = 0.$$

Чтобы найти явное выражение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ через x и y, нужно в соотношения для z''_{yy}, z''_{xy} подставить выражения для z'_y и z'_x.

17.5. Функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением

$\Phi(x,y,z) = x^4y^4 + y^5 + x^2z^5 + 4z - 5 = 0.$

Найдите значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ в точке $M_0(0,1)$.

Решение. В данной задаче явное выражение частных производных через x и y находить не требуется, а нужно найти только их значения в указанной точке. Это можно сделать, не используя формул (б), следующим образом. При $x=0$, $y=1$ из уравнения $\Phi(0,1;z) = 1+4z-5 = 0$ получаем $z=1$. Дифференцируем тождество

$$x^4y^4 + y^5 + x^2\left[z(x,y)\right]^5 + 4z(x,y) - 5 = 0 \qquad \text{(в)}$$

по x: $4x^3y^4 + 2x\left[z(x,y)\right]^5 + x^2\cdot 5\left[z(x,y)\right]^4 z'_x + 4z'_x = 0.$ (г)

Полагая в (г) $x=0$, $y=1$, $z(0,1)=1$, получаем $z'_x(0,1)=0$. Дифференцируем теперь тождество (в) по y:

$$4x^4y^3 + 5y^4 + 5x^2\left[z(x,y)\right]^4 z'_y(x,y) + 4z'_y(x,y) = 0. \qquad \text{(д)}$$

Отсюда при $x=0$, $y=1$, $z=1$ следует, что $5+4z'_y(0,1)=0$, поэтому $z'_y(0,1) = -5/4$.

Для отыскания $z''_{xx}(0,1)$ дифференцируем по x тождество (г):

$$12x^2y^4 + 2z^5(x,y) + 10x\left[z(x,y)\right]^4 z'_x + 10x\left[z(x,y)\right]^4 z'_x(x,y) +$$
$$+20x^2\left[z(x,y)\right]^3 (z'_x)^2 + 5x^2\left[z(x,y)\right]^4 z''_{xx} + 4z''_{xx} = 0.$$

Отсюда при $x = 0$, $y = 1$, $z(0,1) = 1$, $z'_x(0,1) = 0$ следует, что $2 + 4z''_{xx}(0,1) = 0$, т. е. $z''_{xx}(0,1) = -1/2$.

Для отыскания z''_{yx} дифференцируем тождество (г) по переменной y:

$$16x^3y^3 + 10x\,[z(x,y)]^4\,z'_y(x,y) + 20x^2\,[z(x,y)]^3\,z'_y \cdot z'_x +$$

$$+5x^2\,[z(x,y)]^4 \cdot z''_{xy} + 4z''_{xy} = 0.$$

Отсюда при $x = 0$, $y = 1$, $z'_x(0,1) = 0$, $z'_y(0,1) = -5/4$ следует, что $z''_{xy} = 0$.

Для отыскания z''_{yy} дифференцируем по переменной y тождество (д):

$$12x^4y^2 + 20y^3 + 20x^2\,[z(x,y)]^3\left[z'_y(x,y)\right]^2 +$$

$$+5x^2\,[z(x,y)]^4\,z''_{yy}(x,y) + 4z''_{yy} = 0.$$

Полагаем $x = 0$, $y = 1$, $z(0,1) = 1$, $z'_y(0,1) = -5/4$. Получаем $20 + 4z''_{yy}(0,1) = 0$, следовательно, $z''_{yy}(0,1) = -5$.

Задачи для самостоятельного решения

17.6. Найдите y'_x функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = 1$;
б) $y = 1 + y^x$;
в) $-4x^2 - 6y^2 - 9xy + 32y - 19 = 0$;
г) $-7x^4 + 4y^3 - 2xy - x - 47y + 74 = 0$.

17.7. Найдите значения y'_x в указанной точке x_0 функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0, \quad x_0 = 1$;
б) $\ln x + e^{-y/x} = 1, \quad x_0 = 1$;
в) $-5x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 5y + 5 = 0, \quad x_0 = 1,\ y(1) = 1$;
г) $-2x^3 + y^4 - 8x^2y^2 + 5x + 11y - 7 = 0, \quad x_0 = 1,\ y(1) = 1$.

17.8. Найдите $y''(x)$ функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $e^x - e^y = y - x$; б) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
в) $x + y + \alpha \sin y = 0$; г) $(x + y)^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

17.9. Найдите значение $y''(x)$ в указанной точке функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ при $x = 0$, $y = 1$;

б) $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 2 = 0$, $x_0 = 1$;

в) $-5x^2 - 5\ln y + 4y + 16 = 0$ при $x_0 = 2$, $y(2) = 1$;

г) $x^2 + 2y^2 - 12y + 9 = 0$ при $x_0 = 1$, $y(1) = 2$.

17.10. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z(x, y)$ задана неявно следующими уравнениями:

а) $x^3y^2 + x^2z^3 + yz^2 = 1$;

б) $xyz + \operatorname{tg}(xyz) = 1$;

в) $(x + 2y + 3z)^3 + 2z^4 - 1 = 0$;

г) $\operatorname{arctg}(xyz) + 2x + 3y + 2z - 1 = 0$.

17.11. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если функция $z(x, y)$ задана неявно следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $x + y + z = e^z$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 + \sin z = 0$;

г) $xyz + \cos(xyz) - 1 = 0$.

17.12. Вычислите значения вторых частных производных в указанной точке для функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $z^3 + 3xyz = 4$, $M_0(1, 1, 1)$;

б) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, $M_0(1, -2, 1)$;

в) $x + 2y + 3z - e^{-(x+y+z)} + 1 = 0$, $M_0(0, 0, 0)$.

18. Геометрический и механический смысл производных

18.1. Закон движения точки по прямой имеет вид $x(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + t^2$ (x дается в метрах, t — в секундах). Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t_0 = 1$.

Решение. Известно, что скорость точки равна $v(t_0) = x'(t_0)$, а ускорение равно $a(t_0) = x''(t_0)$. Так как $x'(t) = t^4 + t^3 + 2t$, $x''(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2$, то $v(t_0) = 1^4 + 1^3 + 2 = 4$ м/с, $a(t_0) = 4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 = 9$ м/с^2.

18.2. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определите его кинетическую энергию в момент времени $t = 5$ с (x дается в метрах).

Решение. Кинетическую энергию W можно найти по формуле $W = \frac{mv^2}{2}$. Так как $v(5) = (2t + 1)_{t=5} = 11$ м/с, то $W = \frac{4 \cdot 11^2}{2} = 242$ Дж.

Уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ можно записать соответственно в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0); \qquad \text{(а)}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad \text{(б)}$$

18.3. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^3 - 3x + 5$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. В нашем случае

$y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 7$,

$f'(x) = 3x^2 - 3$,

$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$.

Записываем, используя формулы (а) и (б), уравнение касательной $y - 7 = 9(x - 2)$, или $y = 9x - 11$, и нормали $y - 7 = -\frac{1}{9}(x - 2)$, или $x + 9y - 65 = 0$.

18.4. Запишите уравнение касательной и нормали кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = 1$.

Решение. Находим значения x_0, y_0, $f'(x_0)$:

$$x_0 = x(1) = 1 + 3 - 8 = -4, \ \ y_0 = y(1) = 2 - 2 - 5 = -5,$$

$\begin{cases} y'_x &= \dfrac{4t-2}{2t+3}, \\ x &= t^3 + 3t - 8, \end{cases}$ $y'(1) = \dfrac{4-2}{2+3} = \dfrac{2}{5}$. Записываем уравнение касательной $y + 5 = \dfrac{2}{5}(x + 4)$, или $2x - 5y - 17 = 0$, и нормали $y + 5 = -\dfrac{5}{2}(x + 4)$, или $5x + 2y + 30 = 0$.

18.5. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, в точке $M_0(1;1)$.

Решение. По правилу дифференцирования неявно заданной функции получаем $y'_x = -\dfrac{5x^4 - 2y}{5y^4 - 2x}$, $y'(1) = -\dfrac{5-2}{5-2} = -1$. Поэтому уравнение касательной $y - 1 = 1 - x$, или $x + y = 2$, а нормали $x - y = 0$.

18.6. Запишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости пространственной кривой, заданной вектор-функцией скалярного аргумента

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - 3)\mathbf{j} + (3t - 1)\mathbf{k}, \text{ при } t_0 = 2.$$

Решение. Находим координаты точки, соответствующей значению $t_0 = 2 : M_0(3;5;5)$. Вектор $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ касается данной кривой, $\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Касательная проходит через точку $M_0(3;5;5)$ параллельно вектору $\mathbf{l} = \mathbf{r}'(2)$. Запишем её канонические уравнения: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-5}{12} = \dfrac{z-5}{3}$. Нормальная плоскость к кривой проходит через точку $M_0(3;5;5)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = \mathbf{r}'(2) = \{4;12;3\}$. Поэтому её уравнение можно записать в виде

$$4(x - 3) + 12(y - 5) + 3(z - 5) = 0, \text{ или } 4x + 12y + 3z - 87 = 0.$$

18.7. Найдите углы, под которыми пересекаются кривые $y_1 = x^2$ и $y_2 = \pm\sqrt{x}$.

Решение. Данные кривые пересекаются в двух точках: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$. Поскольку $y_1' = 2x$ и $y_1'(0) = 0$, то парабола $y_1 = x^2$ касается оси OX. Так как $y_2' = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty$ при $x \to 0$, то кривая $y_2 = \pm\sqrt{x}$ касается оси OY. Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ эти кривые пересекаются под прямым углом. Для точки $M_2(1;1)$ получаем $k_1 = y_1'(1) = 2$, $k_2 = y_2' = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{|2 - 0{,}5|}{1 + 0{,}5 \cdot 2} = \dfrac{3}{4}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, где φ — угол между касательными к данным кривым в точке M_2.

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ в каждой точке своей области определения имеет непрерывные частные производные. Тогда уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad \text{(в)}$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ортогонально касательной плоскости, называется нормалью к поверхности.

Её уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad \text{(г)}$$

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, неразрешённым относительно z, т. е. функция $z = f(x, y)$ задана неявно, то касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0, \quad \text{(д)}$$

а нормаль — уравнением

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)}. \qquad \text{(е)}$$

Как видим, вектор $\mathbf{N}=\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$, называемый вектором нормали к поверхности, совпадает с вектором $\operatorname{grad} F$. В этом заключается геометрический смысл производной матрицы функции $u=F(x,y,z)$.

18.8. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^4+2x^2y-xy+x$ в точке $M_0(1;0;2)$.

Решение. Искомые уравнения запишем в форме (в) и (г). Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy-y+1,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=4+1=5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2-x,\ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=2-1=1.$$

Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид $5(x-1)+y-(z-2)=0$, или $5x+y-z-3=0$, а нормали — $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

18.9. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$F(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0,$$

в точке $M_0(1;2;3)$.

Решение. В данной задаче, так как уравнение поверхности задано неявно, используем форму записи (д) и (е). Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y-2z,\quad \frac{\partial F}{\partial x}(M_0)=2+2-6=-2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4y+x+z,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)=8+1+3=12;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-6z+y-2x,\quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)=-18+2-2=-18.$$

Векторы $(-2; 12; -18) \parallel (1; -6; 9)$. Поэтому в качестве вектора нормали касательной плоскости можно принять вектор $\mathbf{N}(1; -6; 9)$. Записываем уравнение касательной плоскости $(x-1) - 6(y-2) + 9(z-3) = 0$, или $x - 6y + 9z - 16 = 0$, и нормали $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-3}{9}$.

Задачи для самостоятельного решения

18.10. Дан закон движения материальной точки по оси OX: $x(t) = 2t + t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ (x дается в метрах, t — в секундах).

18.11. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 м/с. С какой скоростью растут:

а) площадь поверхности шара;

б) объём шара в тот момент, когда радиус его станет равным 50 м?

18.12. Точка движется по гиперболе $y = 10/x$ так, что её абсцисса растёт равномерно со скоростью 3 м/с. С какой скоростью изменяется её ордината, когда точка проходит положение $(5; 2)$?

18.13. Составьте уравнения касательной и нормали к графику функций:

а) $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$ в точке $x_0 = -1$;

б) $y = 3x^2 + 4x + 5$ в точке $x_0 = -2$;

в) $y = 6x^2 - 5x + 1$ в точке $x_0 = 2$;

г) $y = -8x^3 - 3x^2 + 3x - 7$ в точке $x_0 = 1$.

18.14. Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно следующими уравнениями:

а) $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ в точке $(-2; 3)$;

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 3$ в точке $(2; 1)$;

в) $9x^3 - 5y^3 - 10xy - 97x - 7y + 154 = 0$ в точке $(2; 1)$.

18.15. Докажите, что уравнение касательной:

а) к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_1, y_1) можно записать в виде $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$; б) к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_2, y_2) — в виде $\dfrac{xx_2}{a^2}-\dfrac{yy_2}{b^2}=1$.

18.16. Составьте уравнение касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

18.17. Составьте уравнение касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $4x+3y-7=0$.

18.18. Найдите уравнения касательной и нормали кривой, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=t^2+4 \end{cases}$ в точке, где $t=3$;

б) $\begin{cases} x=2\cos t+3\sin t, \\ y=\cos t+2\sin t \end{cases}$ в точке, где $t=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x=-t^3+8t^2-8t+5, \\ y=t^3+t^2+2 \end{cases}$ в точке, где $t=-1$;

г) $\begin{cases} x=2\cos^2 t+\cos t, \\ y=-4\sin t+4\cos t \end{cases}$ в точке, где $t=\dfrac{\pi}{2}$.

18.19. Запишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой, заданной вектор-функцией скалярного аргумента:

а) $\mathbf{r}(t)=(t^2+3)\mathbf{i}+(2t^2-1)\mathbf{j}+(3t^2-2)\mathbf{k}$ в точке, где $t=1$;

б) $\mathbf{r}(t)=\sin 2t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ в точке, где $t=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\mathbf{r}(t)=(-4t^3+6t^2+7t+5)\mathbf{i}+(8t^3-17t)\mathbf{j}+(t^3-2t+2)\mathbf{k}$ в точке, где $t=1$;

г) $\mathbf{r}(t)=[3\ln(2+t^3)+6t^2]\mathbf{i}+(2e^{t^2-1}-14t)\mathbf{j}+(t^3-2t-7)\mathbf{k}$ в точке, где $t=-1$.

18.20. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением:

а) $z = 3x^2 + 2y^2 - 12$ в точке $(2; -2; 8)$;

б) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 6x - 1$ в точке $(1; -2; -10)$;

в) $z = 7x^2 - 4y^2 + 8xy + 14x - 8y + 62$ в точке $(-3; 2; 3)$.

18.21. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $(1; -1; 1)$;

б) $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 8 = 0$ в точке $(2; 0; -1)$;

в) $3x^2 - 4y^2 + 5z^2 + 17xy - xz - 6yz + 23x + 4y + 4z + 34 = 0$ в точке $(2; -2; 0)$.

18.22. К гиперболоиду $6x^2 + 15y^2 - 10z^2 = 300$ проведена касательная плоскость, отсекающая на положительных координатных полуосях равные отрезки. Запишите её уравнение.

18.23. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ проведена касательная плоскость, параллельная плоскости $x + 4y + 6z = 0$ и пересекающая положительные координатные полуоси. Запишите её уравнение.

19. Дифференциал

Как мы уже отмечали, функция $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если ее приращение при переходе из точки M_0 в точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{a}$$

где A — матрица размера $m \times n$ (производная матрица) линейного оператора — $A : R_n \to R_m$; $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)^T$ — вектор приращений ($\Delta x_i = x_i - x_i^0$); $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая вектор-функция порядка выше первого относительно $|\Delta x|$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{|\alpha(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0$. Матрицу A называют производной матрицей отображения f, а произведение $A \cdot \Delta x$ называют дифференциалом функции f в точке M_0 и обозначают df, при этом полагают $\Delta x = dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)^T$. Таким образом, дифференциал — это значение линейного оператора A для вектора приращений Δx.

Как следует из (а), дифференциал функции есть величина бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, эквивалентная приращению Δf, если матрица A не нулевая.

В случае $f : X \subset R \to Y \subset R$, т. е. скалярной функции одного скалярного аргумента, имеем

$$df = f'(x_0)dx. \tag{б}$$

В случае $f : X \subset R_n \to Y \subset R$, т. е. скалярной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторного аргумента, имеем

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \end{aligned} \tag{в}$$

Для скалярной функции $y = f(x)$ одного аргумента дифференциал равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке x_0 при переходе от точки x_0 к x, а для функции $z = z(x, y)$ — приращению аппликаты касательной плоскости при переходе из точки (x_0, y_0) в точку (x, y).

Заметим, что дифференциал суммы, произведения и частного можно находить по формулам, подобным соответствующим формулам для производных, т. е. $d(u + v) = du + dv$, $d(u \cdot v) = vdu + udv$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$. Последние две формулы имеют место лишь для скалярнозначных функций.

19.1. Найдите дифференциал следующих функций:
$f_1(x) = e^{x^2 \sin 5x}$; $\quad f_2(x) = \operatorname{tg} x^4$.

Решение. Данные функции являются скалярными функциями одного скалярного аргумента. Поэтому по формуле (б) находим: $df_1 = f_1'(x)dx = e^{x^2 \sin 5x}(2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x)dx$;

$df_2 = f_2'(x)dx = \dfrac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3 dx.$

19.2. Найдите дифференциал следующих функций:
$f_1(x, y) = x \sin y + y \sin x$; $f_2(x, y, z) = xyz + y^2$;
$f_3(x, y) = x + y^{x/y}$.

Решение. Данные функции являются скалярными функциями векторного аргумента, поэтому применяем формулу (в):

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy = (\sin y + y \cos x)dx + (x \cos y + \sin x)dy;$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz = yzdx + (xz + 2y)dy + xydz;$$

$$df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy = \left(1 + y^{(x/y)} \ln y \cdot \frac{1}{y}\right) dx +$$

$$+ y^{(x/y)} \left(-\frac{x}{y^2} \ln y + \frac{x}{y^2}\right) dy.$$

Заметим, что при фиксированном y функция $y^{(x/y)}$ показательная, а при фиксированном x — степенно-показательная: $y^{(x/y)} = e^{(x/y) \cdot \ln y}$.

Найденные дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 иногда называют полными. Они находятся при условии, что изменяются все аргументы. Дифференциал, вычисленный при условии, что изменяется только один аргумент, а остальные — константы, называют частным и обозначают $d_{x_1}f, d_{x_2}f, \ldots, d_{x_n}f$. Например, $d_{x_1}f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1$. Величина $d_{x_1}f$ есть дифференциал функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, найденный при условии, что изменяется только аргумент x_1, а остальные постоянны. Из решения задачи 19.2 следует, что $d_x f_1 = (\sin y + y \cos x)dx$,
$d_y f_1 = (x \cos y + \sin x)dy$.

Чтобы найти дифференциал векторной функции скалярного или векторного аргумента, нужно найти дифференциалы их координатных функций, так как если

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ то } df = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_n \end{bmatrix}.$$

19.3. Найдите дифференциал следующих функций:

$$f_1(t) = \begin{bmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \\ t^2 \end{bmatrix}; \quad f_2(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{y^2} \\ \dfrac{y}{x^2} \end{bmatrix}.$$

Решение. По правилу отыскания дифференциала векторных функций находим:

$$df_1(t) = \begin{bmatrix} d(\sin t^2) \\ d(\cos t^2) \\ d(t^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t\cos t^2 dt \\ -2t\sin t^2 dt \\ 2tdt \end{bmatrix};$$

$$df_2(x, y) = \begin{bmatrix} d\left(\dfrac{x}{y^2}\right) \\ d\left(\dfrac{y}{x^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2}dx - \dfrac{2x}{y^3}dy \\ -\dfrac{2y}{x^3}dx + \dfrac{1}{x^2}dy \end{bmatrix}.$$

19.4. Дано: функция $f(x) = x^2 + 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}02$. Вычислите дифференциал и приращение функции при переходе из точки x_0 в x_1. Оцените абсолютную и относительную погрешность, допускаемую при замене приращения функции дифференциалом.

Решение. $df = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x_1 - x_0)$.
В нашем примере $f'(x) = 2x, \quad f'(x_0) = f'(1) = 2$,
$x_1 - x_0 = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$, поэтому $df = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$;
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = (1{,}02)^2 + 2 - (1^2 + 2) = 0{,}0404$.

Как видим, $|\Delta f - df| = 0{,}0004$, т. е. абсолютная погрешность при замене приращения функции дифференциалом в данном случае составила 0,0004, а относительная погрешность равна $\left|\dfrac{\Delta f - df}{\Delta f}\right| = \dfrac{0{,}0004}{0{,}0404} \approx 0{,}0099$, что составляет примерно 1%.

В приближенных вычислениях иногда используют прием замены приращения функции дифференциалом.

19.5. Заменяя приращение функции её дифференциалом, вычислите приближенно $(1{,}03)^5$. Оцените абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при этом.

Решение. Примем $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}03$, $\Delta x = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$. Можем записать $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \approx f(x_0) + df(x_0)$. В нашей задаче $f(x_0) = f(1) = 1^5 = 1$, $f(x_0 + \Delta x) = (1{,}03)^5$, $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = 5x_0^4\Delta x = 5 \cdot 1^4 \cdot 0{,}03 = 0{,}15$. Поэтому $(1{,}03)^5 \approx 1 + 0{,}15 = 1{,}15$. Точное вычисление дает $(1{,}03)^5 = 1{,}1592740743 \approx 1{,}1593$, т. е. допущена абсолютная погрешность $\Delta = |1{,}15 - 1{,}1593| \cong 0{,}0093$, а относительная — $\delta = \dfrac{0{,}0093}{1{,}1593} \approx 0{,}008$, т. е. менее одного процента.

19.6. Даны функция $z(x, y) = 2x^2 - 3xy - 4y^2$ и точки $M_0(2; -3)$ и $M_1(2{,}01; -2{,}97)$. Вычислите Δz и dz при переходе из точки M_0 в M_1. Вычислите приближенно, заменяя Δz величиной dz, значение $f(M_1)$. Укажите абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при этом.

Решение. Находим: $\Delta z = z(M_1) - z(M_0)$, $z(M_1) = 2 \cdot (2{,}01)^2 - 3 \cdot 2{,}01(-2{,}97) - 4(-2{,}97)^2 = 8{,}0802 + 17{,}9091 - 35{,}2836 = -9{,}2943$, $z(M_0) = 8 + 18 - 36 = -10$, $\Delta z = -9{,}2943 - (-10) = 0{,}7057$.

По формуле (в) находим:

$$dz(x_0, y_0, dx, dy) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 8 + 9 = 17,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -6 + 24 = 18,$$

$\Delta x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01 = dx$, $\Delta y = -2{,}97 - (-3) = 0{,}03 = dy$, поэтому

$$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy = 17 \cdot 0{,}01 + 18 \cdot 0{,}03 =$$
$$= 0{,}17 + 0{,}54 = 0{,}71, \quad z(M_1) \approx z(M_0) + df = -10 + 0{,}71 = -9{,}29.$$

Абсолютная погрешность равна $\Delta = |-9{,}2943 - (-9{,}29)| = 0{,}0043$, а относительная — $\delta = \dfrac{0{,}0043}{9{,}2943} \approx 0{,}0005$, т. е. 0,05 %.

Итак, дифференциал — это линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ функция. При малых Δx_i дифференциал мало отличается от приращения функции.

Дифференциал обладает свойством инвариантности формы записи, заключающемся в следующем: дифференциал функции $y = f(x)$ записывается в виде $dy = f'(x)dx$, как в случае, когда x независимая переменная, так и в случае, когда x является функцией одного или нескольких аргументов; дифференциал функции $f(x, y)$ записывается в форме $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ независимо от того, являются ли x и y независимыми переменными или сами являются функциями одного или многих аргументов.

19.7. Найдите дифференциал следующих функций:

а) $z = f_1(t), \quad t = x^3$; б) $z = f_2(t), \quad t = xy^2 + x^2y$;

в) $z = f_3(u, v), \quad u = x^2, \quad v = x^3$;

г) $z = f_4(u, v), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2$,

где f_1, f_2, f_3, f_4 — любые дифференцируемые функции.

Решение. Во всех четырёх функциях аргументы t, u, v не являются независимыми. При отыскании дифференциала будем использовать свойство инвариантности формы его записи:

а) $df_1 = f_1'(t)dt = f_1'(t) \cdot 3x^2dx$;

б) $df_2 = f_2'(t)dt = f_2'(t)[(y^2 + 2xy)dx + (2xy + x^2)dy]$;

в) $df_3 = \dfrac{\partial f_3}{\partial u}(u, v)du + \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(u, v)dv = \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \cdot 2xdx + \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \cdot 3x^2dx =$
$= \left(\dfrac{\partial f_3}{\partial u} \cdot 2x + \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \cdot 3x^2\right) dx$;

г) $df_4 = \dfrac{\partial f_4}{\partial u}(u, v)du + \dfrac{\partial f_4}{\partial v}(u, v)dv = \dfrac{\partial f_4}{\partial u} \cdot (2xdx + 2ydy) +$
$+ \dfrac{\partial f_4}{\partial v} \cdot (2xdx - 2ydy) = \left(\dfrac{\partial f_4}{\partial u} + \dfrac{\partial f_4}{\partial v}\right) \cdot 2xdx + \left(\dfrac{\partial f_4}{\partial u} - \dfrac{\partial f_4}{\partial v}\right) \cdot 2ydy.$

Дифференциал является функцией точки и приращений аргументов. Приращения аргументов будем полагать в заданном процессе постоянными и независящими от выбора точки. При таком соглашении дифференциал является функцией от тех же аргументов, что и исходная функция, т. е. если $z = f(x, y)$, то $dz = \varphi(x, y)$. Можно найти дифференциал от дифференциала $d(dz) = d\varphi(x, y)$. Его обозначают $d(dz) = d^2z$ и называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка. В этой схеме дифференциал dz называют первым дифференциалом.

Аналогично можно ввести понятие дифференциала любого порядка: $d(d^2z) = d^3z$ — третий дифференциал, $\ldots$, $d(d^{(n-1)}z) = d^{(n)}z$ — дифференциал порядка n. Для скалярной функции $y = f(x)$ одного скалярного аргумента x легко находим (учитывая соглашение о независимости dx от x):

$$d^2f = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2;\ d^3f = f'''(x)(dx)^3;\ \ldots;\ d^nf = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Подчеркнём ещё раз, что в этих соотношениях x — независимая переменная. Если же $x = x(t)$, т. е. x является функцией другого аргумента, то $d(dx) \neq 0$, и записанные выражения для дифференциалов несправедливы. В этом случае $d^2f = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$. Видим, что дифференциалы высших порядков, начиная со второго, свойством инвариантности формы записи не обладают.

Для функции $z = f(x, y)$, если x и y — независимые переменные, легко находим:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2;$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3 \text{ и т. д.}$$

19.8. Найдите дифференциал указанного порядка от следующих функций:

а) $y = x^5$, d^5y; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, d^4y; в) $y = xe^{2x}$, $d^{10}y$.

Решение: а) $y^{(5)} = (x^5)^{(5)} = 120$, $d^5y = 120(dx)^5$;

б) $y = x^{-1/2}$, $y' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$, $y'' = \dfrac{3}{4}x^{-5/2}$, $y''' = -\dfrac{15}{8}x^{-7/2}$,

$y^{(4)} = \dfrac{105}{16}x^{-9/2}$, $d^4y = \dfrac{105}{16}\dfrac{1}{x^4\sqrt{x}}(dx)^4$;

в) применяя формулу Лейбница, находим
$(xe^{2x})^{(10)} = x(e^{2x})^{(10)} + 10(e^{2x})^{(9)} = 2^{10}xe^{2x} + 10 \cdot 2^9 e^{2x}$, поэтому $d^{10}y = 2^9 e^{2x}(2x + 10)(dx)^{10}$.

19.9. Найдите дифференциал второго порядка от следующих функций: а) $z = y\ln x$; б) $z = e^{xy}$.

Решение: а) находим частные производные второго порядка от функции $z = y\ln x$: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}$, поэтому

$$d^2z = -\frac{y}{x^2}(dx)^2 + \frac{2}{x}dxdy;$$

б) поскольку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (xy + 1)e^{xy}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$, то $d^2z = [y^2(dx)^2 + 2(xy+1)dxdy + x^2(dy)^2]e^{xy}$.

19.10. Найдите второй дифференциал d^2z:

а) $z = f_1(t)$, $t = e^{3x}$; б) $z = f_2(t)$, $t = x^3 + y^3$.

Решение: а) по свойству инвариантности формы записи первого дифференциала можем записать $dz = f_1'(t)dt$. Применяя формулу дифференциала от произведения, находим

$$d^2z = d(dz) = d[f_1'(t)dt] = [df_1'(t)]dt + f_1'(t)d(dt) =$$
$$= f_1''(t)(dt)^2 + f_1'(t)d^2t,$$

но $dt = e^{3x} \cdot 3dx$, $d^2t = 9e^{3x}(dx)^2$, поэтому

$$d^2z = f_1''(t)(e^{3x} \cdot 3dx)^2 + f_1'(t) \cdot 9e^{3x}(dx)^2 =$$
$$= [f_1''(t)e^{6x} + f_1'(t)e^{3x}] \cdot 9(dx)^2.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{d^2 f_1}{dx^2} = 9f_1''(t)e^{6x} + 9f_1'(t)e^{3x}$. Эту же задачу можно решить и другим способом: найти $\dfrac{d^2 f_1}{dx^2}$, а затем записать $d^2 z = \dfrac{d^2 f_1}{dx^2}(dx)^2$;

б) как и при решении предыдущего примера, находим

$d^2 z = f_2''(t)(dt)^2 + f_2'(t)d^2 t$. В нашем примере $dt = 3x^2 dx + 3y^2 dy$, $d^2 t = 6x(dx)^2 + 6y(dy)^2$ (произведение $dxdy$ отсутствует, так как $\dfrac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0$). Поэтому

$$d^2 z = f_2''(t)(3x^2 dx + 3y^2 dy)^2 + f_2'(t)[6x(dx)^2 + 6y(dy)^2] =$$
$$= [9x^4 f_2''(t) + 6x f_2'(t)](dx)^2 + 18x^2 y^2 f_2''(t) dxdy +$$
$$+ [9y^4 f_2''(t) + 6y f_2'(t)](dy)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 9x^4 f_2''(t) + 6x f_2'(t), \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = 9x^2 y^2 f_2''(t),$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 9y^4 f_2''(t) + 6y f_2'(t)$$

(объясните почему).

19.11. Найдите $d^2 z$, если $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = x^3 - y^3$.

Решение. В задаче 14.11 найдены $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}$. Остаётся их выражения подставить в соотношение

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Предлагаем эту подстановку проделать самостоятельно.

Во всех предыдущих примерах мы искали дифференциал явно заданных функций. В случае неявно заданных функций или заданных параметрически меняется лишь правило отыскания производных.

19.12. Найдите dy и $d^2 y$, если функция $y(x)$ задана неявно уравнением $e^y - x - y = 0$.

Решение. По правилу отыскания производных от неявно заданных функций (см. раздел 17) находим:

$$y'_x = -\frac{-1}{e^y-1},\ y'' = -\frac{e^y\cdot y'_x}{(e^y-1)^2} = -\frac{e^y\cdot\dfrac{1}{e^y-1}}{(e^y-1)^2} = -\frac{e^y}{(e^y-1)^3}.$$

Поэтому $dy = \dfrac{dx}{e^y-1}$, $d^2y = \dfrac{-e^y}{(e^y-1)^3}(dx)^2$. Так как $e^y = x+y$, то $dy = \dfrac{dx}{x+y-1}$, $d^2y = -\dfrac{(x+y)}{(x+y-1)^3}(dx)^2$. Можно поступить и по-другому. Найдем дифференциал от обеих частей тождества $e^y - x - y = 0$: $e^y dy - dx - dy = 0$, отсюда $dy = \dfrac{dx}{e^y-1}$. Дифференцируя ещё раз, получаем $e^y(dy)^2 + e^y d^2y - d^2y = 0$, отсюда $d^2y = \dfrac{-e^y(dy)^2}{e^y-1} = \dfrac{-e^y(dx)^2}{(e^y-1)^3}$.

19.13. Найдите dz и d^2z, если функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3z - 2y + x + 1 = 0$.

Решение. Возьмем дифференциал от обеих частей тождества $x^3 + 2y^3 + [z(x,y)]^3 - 3z(x,y) - 2y + x + 1 = 0$:

$$3x^2dx + 6y^2dy + 3z^2dz - 3dz - 2dy + dx = 0, \qquad (*)$$

или $(3x^2+1)dx + (6y^2-2)dy + (3z^2-3)dz = 0$. Отсюда $dz = \dfrac{(3x^2+1)}{3-3z^2}dx + \dfrac{(6y^2-2)}{3-3z^2}dy$. Чтобы найти d^2z, возьмём дифференциал от обеих частей тождества $(*)$:

$$6x(dx)^2 + 12y(dy)^2 + 6z(dz)^2 + (3z^2-3)d^2z = 0. \qquad (**)$$

Отсюда $d^2z = \dfrac{6x(dx)^2 + 12(dy)^2 + 6z^2(dz)^2}{3-3z^2}$. Если внести сюда ранее найденное значение dz, то получим окончательный ответ. Подчеркнём, что соотношения $(*)$ и $(**)$ — тождества относительно x и y, но уравнения относительно других переменных.

Задачи для самостоятельного решения

19.14. Найдите дифференциал функции $y(x)$, если:

а) $y = \dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$; в) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$.

19.15. Найдите дифференциал функции, если:

а) $u = \dfrac{x}{y}$; б) $u = x^y$; в) $u = xy + yz + zx$.

19.16. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $f(x) = \begin{bmatrix} e^{x^2} \\ \sin^2 x \\ \cos^2 x \end{bmatrix}$; б) $f(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{x^2}{y^2} \end{bmatrix}$.

19.17. Вычислите дифференциал и приращение функции при переходе из точки x_0 в точку x_1. Оцените абсолютную и относительную погрешности замены приращения дифференциалом в следующих случаях:

а) $y = 2x^2 + 4x + 1$, $x_0 = 3$, $x_1 = 3{,}04$;

б) $y = 5x^3 - x^2 + 3$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}01$.

19.18. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите, округлив до 0,0001:

а) $\sqrt{4{,}012}$; б) $\sqrt[3]{0{,}9843}$.

19.19. Найдите приращение функции и её дифференциал при переходе из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M_1(x_1, y_1)$, оцените абсолютную и относительную погрешности замены приращения функции дифференциалом в следующих случаях:

а) $z = x^3y^2$, $M_0(2; 1)$, $M_1(1{,}99; 1{,}02)$;

б) $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$, $M_0(1; 2)$, $M_1(1{,}01; 2{,}02)$.

19.20. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите:

а) $1{,}002 \cdot (2{,}003)^2 + (3{,}004)^3$; б) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

19.21. Применяя свойство инвариантности формы записи первого дифференциала, найдите дифференциалы следующих функций:

а) $z = f_1(t)$, $t = \sin x$;

б) $z = f_2(t)$, $t = x\sin y + y\cos x$;

в) $z = f_3(u, v)$, $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{x^2}$;

г) $z = f_4(u, v)$, $u = xy$, $v = x/y$.

19.22. Найдите дифференциалы указанного порядка от следующих функций:

а) $y = x\ln x$, d^3y; б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$, d^4y;

в) $y = x\cos 2x$, $d^{10}y$.

19.23. Найдите дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а) $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $u(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;

в) $z(x, y) = \dfrac{x}{y}$; г) $u(x, y) = (x^3 + y^3) - 3xy(x - y)$.

19.24. Найдите дифференциалы второго порядка от следующих функций:

а) $z = f(t)$, $t = \sin^2 x$;

б) $u = f(t)$, $t = \dfrac{y}{x}$;

в) $z = f(u, v)$, $u = ax$, $v = bx$;

г) $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = 2x - y$.

19.25. Найдите dy и d^2y, если функция $y(x)$ задана неявно уравнениями: а) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$; б) $y - 2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0$.

19.26. Найдите dz и d^2z, если функция $z(x, y)$ задана неявно уравнениями: а) $xyz = x + y + z$; б) $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y} + 1$.

20. Формула Тейлора

Мы уже отмечали, что в приближенных вычислениях иногда приращение функции заменяют её дифференциалом. Если при этом точность недостаточна, то привлекают дифференциалы второго, третьего, и т. д. порядков. Доказано, что если функция имеет производные до $n+1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$, то справедлива формула

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + R_{n+1}(x),\ x \in U_\delta(x_0), \end{gathered} \tag{а}$$

называемая формулой Тейлора порядка n. Величина R_{n+1} называется остаточным членом формулы Тейлора. Формула (а) справедлива для любых скалярнозначных функций скалярного или векторного аргумента.

Если $y = f(x)$ скалярная функция одного скалярного аргумента, имеющая производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то формулу (а) можно записать в виде

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{gathered} \tag{б}$$

где $x \in U_\delta(x_0)$, ξ — некоторая точка также из $U_\delta(x_0)$, расположенная между точками x и x_0. Соотношение (б) называют формулой Тейлора порядка n с остаточным членом в форме Лагранжа. В частности, при $x_0 = 0$ получаем

$$\begin{gathered} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{gathered} \tag{в}$$

Это формула Маклорена порядка n.

Как видим, формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y = f(x)$ в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена.

20.1. Многочлен $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ разложите по степеням двучлена $x+2$.

Решение. Применим формулу (б), положив $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$, $x_0 = -2$. Находим:

$$f(x_0) = f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 3(-2) + 4 =$$

$$= -8 - 8 - 6 + 4 = -18,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \quad f'(x_0) = f'(-2) = 12 + 8 + 3 = 23,$$

$$f''(x) = 6x - 4, \; f''(x_0) = f''(-2) = -12 - 4 = -16,$$

$$f'''(x) = 6, \quad f^{(4)} = \ldots = f^{(n)} = 0.$$

Можем записать:

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = -18 + 23(x+2) - \frac{16}{2!}(x+2)^2 + \frac{6}{3!}(x+2)^3,$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = -18 + 23(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3.$$

20.2. Запишите формулу Тейлора указанного порядка в данной точке для следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad x_0 = 3, \quad n = 4;$

б) $f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$

Решение:

а) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}, \; f(x_0) = f(3) = \dfrac{3}{2},$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \; f'(3) = -\frac{1}{4},$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \; f''(3) = \frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}, \quad f'''(3) = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}, \quad f^{(4)}(3) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4},$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x-1)^6}.$$

По формуле (б) справедливо равенство

$$\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{1}{4\cdot 2!}(x-3)^2-\frac{3}{8\cdot 3!}(x-3)^3+$$
$$+\frac{3}{4\cdot 4!}(x-3)^4-\frac{120}{(\xi-1)^6\cdot 5!}(x-3)^5,$$

где ξ — некоторая точка между точками x и $x_0=3$;

б) $f(0)=\arcsin 0=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f'(0)=1.$$

$$f''(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\quad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=(1-x^2)^{-3/2}+3x^2(1-x^2)^{-5/2},\quad f'''(0)=1,$$

$$f^{(4)}(x)=3x(1-x^2)^{-5/2}+6x(1-x^2)^{-5/2}+15x^3(1-x^2)^{-7/2}=$$
$$=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}}.$$

По формуле Маклорена (в) записываем

$$\arcsin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{(9\xi-6\xi^3)x^4}{24(1-\xi^2)^{7/2}},$$

где ξ — некоторая точка между точками 0 и x.

20.3. Вычислите приближенно с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,001, следующие числа:

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$.

Решение: а) представим функцию $f(x)=\sin x$ формулой Маклорена [6, с. 132]:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n},$$

где $R_{2n}=\dfrac{(\sin x)^{(2n)}\Big|_{x=\xi}(x^{2n})}{2n!}$. Видим, что

$$|R_{2n}|=\frac{|(\sin\xi)^{(2n)}||x^{2n}|}{(2n)!}\le\frac{|x^{2n}|}{(2n)!}.$$

При $x = 1$ для определения n имеем неравенство $(2n)! > 1000$. Так как при $n = 4$ имеем $(2n)! = 8! = 720 \cdot 8 \cdot 7 > 1000$, то требуемая точность будет достигнута, если положим

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} =$$

$$= 1 - 0{,}16667 + 0{,}00833 - 0{,}0002 \cong 0{,}842;$$

б) функцию $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$ представим формулой Маклорена:

$$e^{x/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{x^3}{8 \cdot 3!} + \frac{x^4}{16 \cdot 4!} + \cdots +$$

$$+ \frac{x^n}{2^n \cdot n!} + \frac{e^{\xi/2}x^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!},$$

где ξ — число, расположенное между нулем и единицей. При $x = 1$ остаточный член $R_{n+1} = \dfrac{e^{\xi/2}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$. Так как $e < 3$, то $e^{\xi/2} < e^{1/2} < 2$, поэтому

$$R_{n+1} < \frac{2}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}.$$

При $n = 4$ имеем $R_5 < \dfrac{1}{16 \cdot 120} < 0{,}001$. Следовательно:

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{16 \cdot 24} + \frac{1}{32 \cdot 120} \cong$$

$$\cong 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0208 + 0{,}0026 + 0{,}0003 \cong 1{,}649.$$

Более точные вычисления дают $\sqrt{e} \approx 1{,}648721271$.

Для функции $z = f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные в окрестности $U_\delta(x_0, y_0)$ до $(n + 1)$-го порядка включительно, формулу (а) можно записать в виде

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y - y_0)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x - x_0)^3 +\right.$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0)+$$
$$\left. +3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(y - y_0)^3\right] +$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right]^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}.$$

20.4. Функцию $z = e^{2(x+y)}$ представьте формулой Тейлора третьего порядка в окрестности точки $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

Решение. Все частные производные n-го порядка от функции $z = e^{2(x+y)}$ в точке $M_0(1; -1)$ равны 2^n, поэтому $e^{2(x+y)} =$

$$= 1 + 2[(x-1) + (y+1)] + \frac{2^2}{2!}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2] +$$
$$+ \frac{2^3}{3!}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3] + R_4.$$

Задачи для самостоятельного решения

20.5. Следующие многочлены разложите по степеням двучлена $x - x_0$ при заданных значениях x_0:

а) $f(x) = x^4 + 4x^2 - x + 3, \quad x_0 = 1;$

б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1, \quad x_0 = -1.$

20.6. Запишите формулу Тейлора указанного порядка в данной точке для следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4, \quad n = 4;$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$

в) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2.$

20.7. Вычислите с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,001, приближенные значения следующих чисел:

а) $\sqrt[5]{33}$; б) $\ln 1{,}05$; в) $\operatorname{arctg} 0{,}2$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

20.8. Запишите формулу Тейлора второго порядка для функции $z = \sin x \sin y$ в окрестности точки $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

20.9. Запишите формулу Тейлора третьего порядка в окрестности точки $(0;0)$ для следующих функций:

а) $z = \dfrac{1}{1-x-y+xy}$; б) $z = e^x \cos y$; в) $z = \sin(x^2+y^2)$.

21. Условия дифференцируемости функции. Теоремы дифференциального исчисления

Необходимым условием дифференцируемости функции является существование производной матрицы. Для функций одного числового аргумента это условие оказывается и достаточным. Для функций многих скалярных аргументов, например $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, этого недостаточно. Доказано, что если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по каждому аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки M и эти частные производные непрерывны в точке M, то функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M.

Для скалярной функции одного скалярного аргумента $y = f(x)$ определяют понятие левой и правой производной. Правой производной в точке x_0 называют предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0, \Delta x>0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, если он существует и конечен, её обозначают $f'_+(x_0)$. Левую производную обозначают $f'_-(x_0)$ и определяют равенством

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta x<0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема, а следовательно, существует конечная производная $f'(x_0)$, то существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

21.1. Докажите, что функция $y = |x|$ в точке x_0 не дифференцируема.

Решение. В данном случае

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует. Действительно,

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x>0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta x>0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = f'_+(0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x<0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta x<0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 = f'_-(0).$$

Таким образом, функция $y = |x|$ имеет в точке x_0 конечные правую и левую производные, но они не равны между собой. Следовательно, производная функции $y = |x|$ в точке x_0 не существует, а потому функция $f(x)$ в точке x_0 не дифференцируема.

21.2. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x = 0$, при этом не существуют ни правая, ни левая производные.

Решение. Действительно, в нашем примере

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \sin\dfrac{1}{\Delta x}$, но величина $\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ не стремится ни к какому пределу при $\Delta x \to \pm 0$, т. е. производная не существует, а потому функция $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не дифференцируема. Эта функция при $x = 0$ не имеет ни правой, ни левой производной.

21.3. Докажите, что функция $f(x) = |x^3|$ дифференцируема при любом x.

Решение. По определению модуля можем записать

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{если} \quad x < 0, \\ x^3, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Поэтому $f'(x) = -3x^2$, если $x < 0$; $f'(x) = 3x^2$, если $x > 0$, т. е. во всех точках $x \neq 0$ производная существует и конечна.

Проверим точку $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot |\Delta x| = 0.$$

Как видим, существует конечная производная и в точке $x = 0$. Таким образом, функция $f(x) = |x^3|$ дифференцируема на всей числовой оси.

Как мы уже отмечали, в случае функции многих переменных существования производной матрицы недостаточно для дифференцируемости функции. В то же время существование и непрерывность частных производных — условие достаточное, оно не является необходимым. Возможны случаи, когда это условие не выполнено, но функция дифференцируема.

Сказанное подтверждается примерами функций в следующих задачах.

21.4. Докажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $(0; 0)$ частные производные, но не дифференцируема в этой точке.

21.5. Докажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет частные производные в окрестности точки $(0; 0)$ и дифференцируема в этой точке, но частные производные не являются непрерывными в точке $(0; 0)$.

С решением задач 21.4 и 21.5 можно ознакомиться в [4, с. 33–35].

Задачи для самостоятельного решения

21.6. Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость следующие функции при $x = 0$; если функция не дифференцируема, то выясните, существуют или нет односторонние производные:

а) $f(x) = e^{-|x|}$;

б) $f(x) = e^{-|x^3|}$;

в) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$

21.7. Докажите, что функция $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ не дифференцируема в точке $(0;0)$.

21.8. Докажите, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $(0;0)$, но имеет частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке.

21.9. Докажите, что уравнение $3x^3 + 9x - 10 = 0$ имеет только один действительный корень.

21.10. Проверьте справедливость теоремы Ролля для заданных функций в указанном промежутке. Если условия не выполняются, то укажите какие:

а) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad [-1; 2]$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} + 4, \quad [1; 2]$;

в) $f(x, y) \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \quad [0; 1]$;

г) $f(x) = \ln \sin x, \quad \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$;

д) $f(x) = 1 - |x|$, $[-1; 1]$.

21.11. Запишите формулу Лагранжа для следующих функций на заданном отрезке:

а) $y = \sin 3x$, $[x_1, x_2]$; б) $y = x(1 - \ln x)$, $[a, b]$, $a > 0$.

21.12. Проверьте, что данные функции удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа, и найдите соответствующее значение C, фигурирующее в теореме Лагранжа:

а) $f(x) = 3x^2 - 5$, $[-2; 0]$; б) $f(x) = \ln x$, $[1; e]$.

21.13. Удовлетворяют ли функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \dfrac{x^4}{1 + x^4}$ условиям теоремы Коши на отрезке $[-2; 2]$?

21.14. Проверьте, что функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 4]$, найдите соответствующее значение C.

22. Правило Лопиталя

Теоретическим обоснованием вычисления пределов по правилу Лопиталя является следующая теорема.

Теорема Лопиталя. Если:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0;

2) $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$;

3) функции $f(x)$ и $g(x)$ либо обе бесконечно малые, либо обе бесконечно большие при $x \to x_0$;

4) существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема применима и при $x_0 = -\infty,\ +\infty,\ \infty$.

22.1. Найдите следующие пределы, применяя правило Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$.

Решение:

а) в данном случае $f(x) = e^{3x} - 1,\ g(x) = \arcsin 4x$. Функция $f(x) = e^{3x} - 1$ дифференцируема на всей числовой оси, а $g(x) = \arcsin 4x$ — в промежутке $\left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$;

$g'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} \neq 0$ при $x \in \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}}{4/\sqrt{1-16x^2}} = \dfrac{3}{4}$.

По теореме Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\arcsin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{4/\sqrt{1-16x^2}} = \frac{3}{4};$$

б) поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\operatorname{arctg} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3/x} = 1$, то имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Для функций $f(x) = \pi - 2\operatorname{arctg} x$ и $g(x) = e^{3/x} - 1$ первые три условия теоремы Лопиталя выполнены. Проверим четвёртое условие:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{(1+x^2)e^{3/x}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3} \frac{x^2}{(1+x^2)e^{3/x}} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1} = \dfrac{2}{3}$.

Неопределённости вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ можно свести к неопределённостям $0/0$ или ∞/∞.

22.2. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{4}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{4}{x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{4}{x^2}\cos\dfrac{4}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 4$$

(впрочем, правило Лопиталя можно не применять, а сделать замену $1/x = t$);

б) $$\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\cos x}\left(x\sin x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{x\sin x - \dfrac{\pi}{2}}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{x\cos x + \sin x}{-\sin x} = -1.$$

Степенные неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$ путем логарифмирования соответствующего выражения.

22.3. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Решение:

а) имеем неопределённость ∞^0. Обозначим $y = (x+2^x)^{1/x}$, находим $\ln y = \dfrac{\ln(x+2^x)}{x}$. Будем искать

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x\left(\dfrac{1}{2^x}+\ln 2\right)}{2^x\left(\dfrac{x}{2^x}+1\right)} = \ln 2,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x\ln 2} = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \ln 2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$;

б) имеем неопределённость 0^0. Обозначим $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, $\ln y = \dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$,

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = 1$, то, учитывая непрерывность функции $\ln x$, получаем $\ln\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, отсюда $\lim\limits_{x\to 0} y = e$.

Задачи для самостоятельного решения

22.4 — 22.7. Применяя правило Лопиталя, найдите следующие пределы.

22.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$.

22.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos 2x\cdot\ln(x-5)}{\ln(e^{x}-e^{5})}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

22.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\ln\dfrac{x}{2}\cdot\ln(x-2)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

22.7. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+4^{x})^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

22.8. Докажите, что для отыскания следующих пределов правило Лопиталя неприменимо:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Найдите эти пределы.

23. Признаки постоянства и монотонности функции

Пусть числовая функция $y = f(x)$ одного числового аргумента дифференцируема в каждой точке промежутка (a, b). Тогда:

а) если $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f(x)$ константа;

б) если $f'(x) \leq 0$ на (a, b), то $f(x)$ не возрастает;

в) если $f'(x) \geq 0$ на (a, b), то $f(x)$ не убывает.

Во всех трех случаях верны и обратные утверждения. Если точки, в которых $f'(x) = 0$, не заполняют сплошь никакого промежутка из (a, b), то при $f'(x) \leq 0$ функция строго монотонно убывает, а при $f'(x) \geq 0$ — строго монотонно возрастает. Для практических целей обычно пользуются такими достаточными признаками: если производная $f'(x) > 0$ (< 0) повсюду, исключая разве лишь конечное число значений x, то функция $f(x)$ будет возрастающей (убывающей).

23.1. Докажите, что $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\;-1 < x < 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, дифференцируемую на $(-1; 1)$. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

то $f(x) = C$. Поскольку $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, то $C = \dfrac{\pi}{2}$.

23.2. Найдите участки монотонности следующих функций:

а) $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$; $\quad$ б) $f(x) = \dfrac{1}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

Решение: а) находим

$$f'(x) = 5(x-2)^4(2x+1)^4 + 8(x-2)^5(2x+1)^3 =$$
$$= (x-2)^4(2x+1)^3[5(2x+1) + 8(x-2)] =$$
$$= (x-2)^4(2x+1)^3(18x-11).$$

Функция возрастает, если $f'(x) > 0$. Решая неравенство $(x-2)^4(2x+1)^3(18x-11) > 0$ методом интервалов, получаем, что функция возрастает на $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{11}{18}; +\infty\right)$. Из неравенства $f'(x) < 0$ следует, что на $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{18}\right)$ функция убывает;

б) находим $f'(x) = -\dfrac{12x^2 - 18x + 6}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2} =$

$$= -\frac{6(2x^2 - 3x + 1)}{x^2(4x^2 - 9x + 6)^2} = -\frac{12(x - 1/2)(x - 1)}{x^2(4x^2 - 9x + 6)^2}.$$

Заметим, что функция $f(x)$ определена всюду, кроме точки $x = 0$, поскольку $4x^2 - 9x + 6 > 0$ при любом x. Функция возрастает, если $f'(x) > 0$, т. е. если $-12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 1) \geq 0$ или $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 1) \leq 0$. Получаем, что функция на $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$ возрастает. Из неравенства $-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 1) < 0$, или $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 1) \geq 0$, и из того, что точка $x = 0$ не входит в область определения функции, следует, что на промежутках $(-\infty; 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$ функция убывает.

23.3. Докажите следующие неравенства:

а) $\sin x \leq x$; б) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$.

Решение: а) при $x \geq \dfrac{\pi}{2}$ неравенство $\sin x \leq x$ очевидно, так как $\sin x \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, причем $f(0) = 0$ и $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, следовательно, функция $f(x) = \sin x - x$ на этом промежутке убывает, а так как $f(0) = 0$, то $\sin x - x < 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Неравенство $\sin x \leq x$ доказано;

б) рассмотрим функцию $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$ при $x \geq 0$. Так как $f(0) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна, то для доказательства неравенства достаточно показать, что $f(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$, т. е. достаточно показать, что $f'(x) = -\sin x + x > 0$, но это доказано в примере *а* этой задачи.

Задачи для самостоятельного решения

23.4. Докажите, что $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

23.5. Докажите, что $\operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2} x = \operatorname{arctg} x + C$, $x \neq \pm 1$,

причем $C = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < x < 1; \\ \pi/2, & \text{если } -\infty < x < -1; \\ -\pi/2, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

23.6. Найдите, при каких значениях коэффициента a функция $f(x) = x^3 - ax$ возрастает на всей числовой оси.

23.7. Найдите области монотонности следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; б) $f(x) = x - e^x$;

в) $f(x) = x + \cos x$; г) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

23.8. Докажите справедливость следующих неравенств:

а) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{1}{3}x^3$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}$, $0 < x \leq 1$;

в) $e^x \geq 1 + x$ для всех x;

г) $\ln x \leq x - 1$ при $x > 0$;

д) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$ для всех x.

24. Экстремумы

Мы будем рассматривать числовые функции одного или многих аргументов.

Пусть функция $f(M)$ непрерывна в некоторой области D и $M_0 \in D$. Точка M_0 называется точкой максимума (минимума), если существует такая окрестность $U_\delta(M_0)$ точки M_0, что для любой точки $M \in U_\delta(M_0)$ выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0) \quad (f(M) \geq f(M_0))$. Если при этом выполняются строгие неравенства, то точку M_0 называют точкой строгого максимума (минимума). Точки минимума и максимума функции называют её точками экстремума.

В подразделах 3.3.1 и 3.3.2 пособия [5] приведены необходимые и достаточные условия экстремума, которые рекомендуется изучить.

24.1. Пользуясь первой производной, найдите экстремумы функций:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

б) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;

в) $f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$.

Решение: а) так как функция $f(x)$ дифференцируема всюду, то экстремум возможен только в стационарных точках. Находим их, приравнивая нулю производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 = 0.$$

Стационарная точка единственна: $x_0 = 1$. При переходе через точку $x_0 = 1$ производная знак не меняет. По достаточному признаку, связанному с первой производной, в точке $x_0 = 1$ экстремума нет;

б) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x-1)(x-2)(x-3)$.

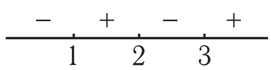


Рис. 24.1

Видим, что точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ являются стационарными (рис. 24.1). Применяя метод интервалов, получаем, что на $(-\infty; 1)$ функция убывает, а на $(1; 2)$ — возрастает. При переходе через точку $x_1 = 1$ производная меняет знак по схеме $(-, +)$, следовательно, в точке $x_1 = 1$ имеется минимум. При переходе через точку $x_2 = 2$ производная меняет знак по схеме $(+, -)$, т. е. в точке $x_2 = 2$ — максимум. В точке $x_3 = 3$ — минимум, так как смена знака происходит по схеме $(-, +)$;

$$\text{в) } f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3}2x =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{2/3} - x^{4/3}}{x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}}.$$

Находим стационарные точки из условия $f'(x) = 0$, следовательно, $(x^2-1)^{2/3} = x^{4/3}$, или $(x^2-1)^2 = x^4$,
$x^4 - 2x^2 + 1 = x^4$, отсюда $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Кроме того, в точках $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ и $x_5 = 1$ производная не существует. Таким образом, имеем пять точек, «подозрительных» на экстремум: -1, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 1. Поведение знаков производной при переходе через эти точки изображено на рисунке 24.2.

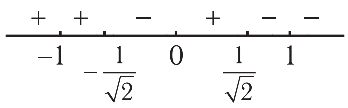


Рис. 24.2

В точках $x_{4,5} = \pm 1$ нет экстремума, в точках $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — максимум, а в точке $x_3 = 0$ — минимум.

24.2. Пользуясь производными высших порядков, исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $f(x) = x^2 e^{-x}$; б) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

Решение: а) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$.

Из условия $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = 0$ находим две стационарные точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Находим вторую производную:

$$f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} =$$
$$= (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Так как $f''(0) = 2 > 0$, то в точке $x_1 = 0$ — минимум, а так как $f''(2) = (4 - 8 + 2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$, то в точке $x_2 = 2$ — максимум;

б) находим $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$. Единственной стационарной точкой, что легко доказать, является точка $x = 0$. Вычисляем старшие производные:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 \neq 0, \quad f^{(4)}(0) > 0.$$

Так как первой не обратилась в нуль производная четного порядка, то в точке $x = 0$ имеется экстремум, а поскольку $f^{(4)}(0) > 0$, то в точке $x = 0$ — минимум.

Переходим к отысканию точек экстремума функции многих аргументов $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если функция $u = f(M)$ дифференцируема, то необходимым условием существования экстремума в точке M_0 является равенство $df(M_0) = 0$ для любого вектора приращений $(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Это приводит к равенству нулю всех частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0.$$

Если при этом в точке M_0 существуют и непрерывны все частные производные второго порядка, то достаточные условия экстремума связаны со знаком d^2f. Если $d^2f(M_0) > 0$ для любого вектора приращений, то в точке M_0 — минимум, если $d^2f(M_0) < 0$ для любого вектора приращений, то в M_0 — максимум, если $d^2f(M_0) \neq 0$, но $d^2f(M_0)$ знак не сохраняет, т. е. для одних векторов приращений $d^2f(M_0) > 0$, а для других — $d^2f(M_0) < 0$, то в точке M_0 нет экстремума, если же $d^2f(M_0) = 0$ хотя бы для одного из векторов приращений, то экстремум может быть или не быть, нужны дополнительные исследования.

Так как d^2f представляет собой квадратичную форму относительно Δx_i, то для определения знака d^2f можно использовать критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

Составляем матрицу

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(M_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(M_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(M_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(M_0) \end{bmatrix}.$$

Если все её главные миноры Δ_j положительны, то $d^2 f(M_0) > 0$ и в точке M_0 — минимум, если знаки главных миноров чередуются, начиная с отрицательного, то $d^2 f(M_0) < 0$ и в точке M_0 — максимум. Если все главные миноры отличны от нуля, а их знаки меняются любым другим способом, то в точке M_0 экстремума нет. Если хотя бы один из главных миноров обращается в нуль, то неизвестно, имеется ли экстремум. Уточним эти условия для функции $z = f(x, y)$ двух переменных. Обозначим $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = A$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = B$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = C$. Тогда

$$\Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то в точке M_0 — минимум, если $A < 0$, $AC - B^2 > 0$, то в точке M_0 — максимум, если $AC - B^2 < 0$, то в точке M_0 нет экстремума, если $AC - B^2 = 0$, то неизвестно, есть ли экстремум.

24.3. Найдите экстремумы функций:

а) $z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

б) $z(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$;

в) $u(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$, $\quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

Решение: а) функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка на всей плоскости, поэтому применимы достаточные условия экстремума, сформулированные выше.

Стационарные точки находим из условия $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 6xy - 12 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 & = & 0, \\ xy - 2 & = & 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем четыре стационарные точки: $M_1(-2;-1)$, $M_2(-1;-2)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;1)$. Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Для $M_1(-2;-1)$: $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = -12$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = -6$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = -12$, $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$. Так как $A < 0$, $AC - B^2 > 0$, то в точке M_1 — максимум.

Для $M_2(-1;-2)$: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$, $AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. В точке M_2 экстремума нет.

Для $M_3(1;2)$: $A = 6$, $B = 12$, $C = 6$, $AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. В точке M_3 экстремума нет.

Для $M_4(2;1)$: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$. Так как $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то в точке M_4 имеем минимум;

б) в данном случае $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 4y^3 - 5y^4$. Стационарные точки находим, решая систему

$$\begin{cases} x - y^2 & = & 0, \\ -4xy + 4y^3 - 5y^4 & = & 0. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $O(0;0)$. Для её исследования находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 - 20y^3,$$

$$A = 2, \ B = C = 0; \ AC - B^2 = 0.$$

О существовании экстремума из этих соотношений никакого вывода сделать нельзя. При этих условиях $d^2 f(0;0) = 2(\Delta x)^2$, а поэтому $d^2 f(0;0) = 0$ для любого вектора приращений вида $(0; \Delta y)$.

Найдем приращение функции $z(x,y)$ при переходе из точки $(0;0)$ в точку $(0 + \Delta x; 0 + \Delta y)$:

$$\Delta z = f(0 + \Delta x; 0 + \Delta y) - f(0;0) =$$
$$= (\Delta x)^2 - 2\Delta x (\Delta y)^2 + (\Delta y)^4 - (\Delta y)^5 - 0 =$$
$$= \left[\Delta x - (\Delta y)^2\right]^2 - (\Delta y)^5.$$

Положим $\Delta x = (\Delta y)^2$, $\Delta y > 0$, получим $\Delta z = -(\Delta y)^5 < 0$.

Положим $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, получим $\Delta z = (\Delta x)^2 > 0$.

Таким образом, приращение Δz для различных векторов приращений имеет разные знаки, следовательно, в точке $(0;0)$ экстремума нет;

в) стационарные точки находим из системы

$$\begin{cases} u'_x &= yz(4 - x - y - z) - xyz = 0, \\ u'_y &= xz(4 - x - y - z) - xyz = 0, \\ u'_z &= xy(4 - x - y - z) - xyz = 0. \end{cases}$$

Так как по условию $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4 - x - y - z - x &= 0, \\ 4 - x - y - z - y &= 0, \\ 4 - x - y - z - z &= 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x &= 0, \\ z - x &= 0, \\ 4 - x - y - 2z &= 0, \end{cases}$$

из которой следует, что существует единственная стационарная точка $M_0(1;1;1)$.

Найдем значения вторых производных в стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2yz, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = z(4-x-y-z) - yz - xz, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(M_0) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y(4-x-y-z) - yz - xy, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(M_0) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2xz, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = x(4-x-y-z) - xz - xy, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}(M_0) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2xy, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_0) = -2.$$

Матрица G для точки M_0 принимает вид

$G = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. Находим её главные миноры:

$\Delta_1 = -2 < 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3 < 0.$

Знаки главных миноров чередуются, начиная с отрицательного, следовательно, в точке M_0 имеем максимум.

Часто встречаются задачи отыскания экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когда независимые переменные связаны некоторыми соотношениями (связями):

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \Phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0, \quad m < n. \end{cases}$$

Такие экстремумы называют условными. Если данные соотношения удаётся разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум некоторой функции $v = \Psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$. Если это сделать затруднительно, то применяют метод Лагранжа, заключающийся в следующем. Вводят вспомогательную функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \cdots + \lambda_m\Phi_m$. Точки, в которых возможен условный экстремум, находят из системы $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0$, $\ldots$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\ldots$, $\Phi_m = 0$. Исследуя знак d^2F в этих точках, выясняют, действительно ли имеется экстремум.

24.4. Исследуйте на условный экстремум следующие функции:

а) $z(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, если $x + y = 3$;

б) $z(x, y) = 3 - 2x - 4y$, если $x^2 + y^2 = 5$.

Решение: а) находим $y = 3 - x$. Функция $z(x, y)$ превращается в функцию одного переменного

$$z = f(x) = z(x; 3 - x) = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) + x + 3 - x =$$
$$= x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x + x^2 + 3 = 3x^2 - 9x + 12.$$

Полученную функцию $f(x) = 3x^2 - 9x + 12$ исследуем на экстремум. Находим стационарные точки:

$$f'(x) = 6x - 9, \quad x_0 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}; \quad f''(x) = 6 > 0,$$

следовательно, в точке $x_0 = \dfrac{3}{2}$ функция $f(x)$ имеет минимум. Так как $y_0 = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$, то точка $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ является точкой условного минимума;

б) составляем функцию $F(x, y, z) = 3 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$, находим: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -2 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -4 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5$.

Для отыскания точек, «подозрительных» на условный экстремум, получаем систему $\begin{cases} -1+\lambda x=0, \\ -2+\lambda y=0, \\ x^2+y^2=5, \end{cases}$ решая которую, находим:

$\lambda_1 = 1$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$.

Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2F = 2\lambda\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$.

Если $\lambda = \lambda_1 = 1$, то $d^2F > 0$ и в точке $M_1(1;2)$ имеется условный минимум, равный $3-2-8=-7$.

Если же $\lambda = \lambda_2 = -1$, то $d^2F < 0$ и в точке $M_2(-1;-2)$ функция $z(x,y)$ имеет условный максимум, равный $3+2+8=13$.

Задачи для самостоятельного решения

24.5. Пользуясь первой производной, найдите точки экстремума следующих функций:

а) $f(x) = x - \ln(1+x^2)$; б) $f(x) = x^2\sqrt[3]{6x-7}$;

в) $f(x) = x^{2/3} + x^{5/3}$; г) $f(x) = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

24.6. Пользуясь производными высших порядков, исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 3x^2$;

в) $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$; г) $f(x) = x^3 e^{-x}$.

24.7. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

б) $u(x,y,z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3}$;

в) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z$;

г) $u(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.

24.8. Исследуйте на условный экстремум следующие функции:

а) $z = x^2 - y^2$, если $2x + y = 1$;

б) $z = x^3 + 2xy - y^2 - 13x - 1$, если $x + y = 1$;

в) $z = 6 - 4x - 3y$, если $x^2 + y^2 = 1$;

г) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$;

д) $u = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$;

е) $z(x, y) = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

25. Наибольшие и наименьшие значения функции на замкнутом множестве

По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на замкнутом множестве D функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Соответствующие точки могут быть либо внутренними, либо граничными множества D. Для их отыскания можно применять такую схему: найти все точки, «подозрительные» на экстремум внутри множества D и на его границе, вычислить значения во всех найденных точках и из них выбрать наибольшее и наименьшее. Как видим, исследовать функцию на экстремум в данной задаче не требуется.

25.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ на $[-1; 3]$.

Решение. Находим критические точки данной функции, приравнивая нулю её производную $y' = \dfrac{2(2x-2)}{3\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$. В точке $x_1 = 1$ производная равна нулю, в точках $x_2 = 2$ и $x_3 = 0$ производная не существует. Все эти точки внутренние отрезка $[-1; 3]$. Точки $x_4 = -1$ и $x_5 = 3$ являются граничными. Вычисляем значение функции во всех найденных точках:

$$y(x_1) = y(1) = 1, \quad y(x_2) = y(2) = 0, \quad y(x_3) = y(0) = 0,$$

$$y(x_4) = y(-1) = \sqrt[3]{9}, \quad y(x_5) = y(3) = \sqrt[3]{9}.$$

Видим, что наименьшее значение $m = 0$, оно достигается в точках $x_2 = 2$ и $x_3 = 0$, а наибольшее — $M = \sqrt[3]{9}$. Оно достигается в граничных точках $x_4 = -1$ и $x_5 = 3$.

25.2. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см (рис. 25.1). Какова должна быть высота воронки, чтобы объём её был наибольшим?

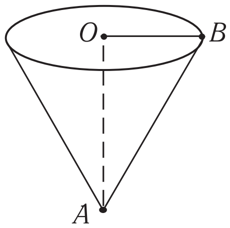


Рис. 25.1

Решение. Будем считать нижнее основание воронки пренебрежимо малым по сравнению с верхним. Тогда форма воронки — конус. Обозначим $x = |\mathbf{OA}|$ — высоту воронки. Тогда $R = |\mathbf{OB}| = \sqrt{(AB)^2 - x^2}$. По условию $|\mathbf{AB}| = 20$ см. Поэтому $R = \sqrt{400 - x^2}$ и $0 \le x \le 20$, отрицательные значения x не имеют физического смысла. Находим наибольшее значение функции:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot x(400 - x^2) \text{ на } [0; 20];$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(400 - x^2 - 2x^2) = \frac{1}{3}\pi(400 - 3x^2).$$

Из условия $V'(x) = 0$ получаем $x = \pm\dfrac{20}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$, отрицательное значение не принадлежит $[0; 20]$. Поэтому $x = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. При этом значении x объём V будет наибольшим, так как наименьшее значение $V = 0$ достигается при $x = 0$ и $x = 20$. Итак, при высоте $H = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ объём воронки будет наибольшим.

25.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$ (область D на рис. 25.2).

Решение. Находим стационарные точки из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4y + 4x = 0. \end{cases}$$

Получаем единственную точку $M_1(1;1)$. Она лежит внутри области D.

$z(M_1) = z(1;1) =$
$= 1 - 2 + 4 - 6 - 1 =$
$= -4.$

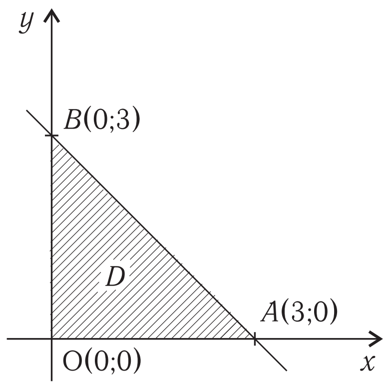


Рис. 25.2

Вычислим также значение функции $z(x, y)$ в точках A, B, O:

$$z(0;0) = -1, \;\; z(3;0) = 9 - 18 - 1 = -10,$$
$$z(0;3) = -18 - 1 = -19.$$

На прямой $x + y = 3$ имеем

$$z(x, y) = z(x, 3 - x) = x^2 - 2(3 - x)^2 + 4x(3 - x) - 6x - 1 =$$
$$= x^2 - 18 + 12x - 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x - 1 =$$
$$= -5x^2 + 18x - 19 = 0.$$

Получили функцию от одного аргумента
$f_1(x) = -5x^2 + 18x - 19$. Ищем её критические точки на $[0;3]$:

$$f_1'(x) = -10x + 18, \;\; x = \frac{9}{5}, \;\; \frac{9}{5} \in [0;3],$$
$$f_1\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{81}{5} + \frac{90}{5} - 19 = -\frac{86}{5}.$$

При $x = 0$ и $x = 3$ приходим к точкам $O(0;0)$ и $A(3;0)$. На границе OB получаем $z(0;y) = -2y^2 - 1 = 0 = f_2(y)$.

Получили функцию $f_2(y) = -2y^2 - 1$. Ищем её наибольшее и наименьшее значения на $[0;3]$: $f_2'(y) = -4y = 0, \;\; y = 0$, опять получили точку $(0;0)$. При $y = 0$ и $y = 3$ получаем уже учтенные точки $O(0;0)$ и $B(0;3)$. На границе OA имеем функцию

$z(x,0) = f_3(x) = x^2 - 6x - 1$. Ищем её наибольшее и наименьшее значения на $[0;3]$: $f_3'(x) = 2x - 6$, $x = 3$, опять получили точку $A(3;0)$. При $x = 0$ получаем точку $(0;0)$.

Итак, мы нашли следующие значения функции: -4, -1, -19, $-\frac{86}{5}$. Сравнивая их, видим, что наибольшее значение функции в данной области равно -1, оно достигается в точке $O(0;0)$, а наименьшее равно -19, оно достигается в точке $B(0;3)$.

Для исследования поведения функции на границе области можно применять приемы отыскания условного экстремума.

25.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2xy$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$. Находим из условия равенства нулю частных производных единственную стационарную точку $M_0(0;0)$, расположенную внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$, $z(0;0) = 0$. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений на окружности $x^2 + y^2 = 1$ поступим так же, как в задачах на условный экстремум. Составим функцию Лагранжа $F(x,y,\lambda) = 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ и найдем точки, в которых возможны наибольшее и наименьшее значения. Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & 2y + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & 2x + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

получаем 4 точки: $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. При этом

$$z(M_1) = z(M_4) = 1, \quad z(M_2) = z(M_3) = -1.$$

Сравнивая значения функции в этих критических точках, видим, что наименьшее значение функции достигается в точках M_2 и M_3 и равно -1, а наибольшее значение достигается в точках M_1 и M_4 и равно 1.

25.5. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

Решение. Размеры основания ванны обозначим через x и y, а высоту — через z. Тогда полная поверхность $S(x,y,z) = xy+2xz+2yz$. По условию задачи требуется найти наименьшее значение функции $S(x,y,z)$ при условии, что $xyz = V$ (V задано). По смыслу задачи $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Составляем функцию Лагранжа $F(x,y,z,\lambda) = xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-V)$. Получаем систему

$$\begin{cases} F'_x &= y+2z+\lambda yz = 0, \\ F'_y &= x+2z+\lambda xz = 0, \\ F'_\lambda &= 2x+2y+\lambda xy = 0, \\ xyz &= V, \end{cases}$$

решая которую, находим единственную критическую точку $x = y = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$, $z = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$. При этих размерах поверхность ванны будет наименьшей. Доказательство предоставляем читателю.

Задачи для самостоятельного решения

25.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанном множестве:

а) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на $[-1; 2]$;

б) $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на $[0; 1]$;

в) $y = \sqrt{x(10-x)}$ на $[0; 10]$.

25.7. Найдите соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме V наименьшую полную поверхность.

25.8. Найдите высоту конуса наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R.

25.9. Найдите наибольшие и наименьшие значения следующих функций в указанном множестве:

а) $z(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y = 5$;

б) $z(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$;

в) $z(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$ в круге $x^2 + y^2 \leq 100$;

г) $z(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

25.10. Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда заданного объёма V, имеющего наименьшую поверхность.

25.11. Найдите стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

25.12. Представьте положительное число a в виде произведения четырех положительных чисел так, чтобы их сумма была наименьшей.

26. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба

В этом разделе изучаются скалярные функции одного скалярного аргумента. График функции $f(x)$, определенной и непрерывной на промежутке (a,b), называется вогнутым (выпуклым), если все точки любой дуги графика лежат ниже (выше) хорды, соединяющей её концы.

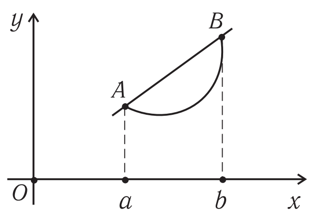


Рис. 26.1

Если функция $f(x)$ имеет на (a,b) конечную производную $f'(x)$, то необходимым и достаточным условием вогнутости (выпуклости) графика функции является возрастание (убывание) производной $f'(x)$ на (a,b). На рисунке 26.1 изображён вогнутый на промежутке (a,b) график функции.

Если на (a, b) существует $f''(x)$, то для вогнутости (выпуклости) графика функции необходимо и достаточно, чтобы было $f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$.

Точка x_0, при переходе через которую график из вогнутого превращается в выпуклый или наоборот, называется точкой перегиба.

26.1. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба следующих функций:

а) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$; б) $y = 4 - \sqrt[3]{x-2}$.

Решение: а) функция имеет производные всех порядков, в том числе и второго порядка. Поэтому найти интервалы выпуклости и вогнутости можно, приравняв нулю вторую производную. Находим:

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x;$$
$$y'' = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x^2 - 6x + 8) = 12(x-2)(x-4).$$

Отсюда следует, что на $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) > 0$, т. е. график функции вогнут, на $(2; 4)$ имеем $y'' < 0$, следовательно, график функции выпуклый, на $(4; +\infty)$ опять $y''(x) > 0$, а поэтому график функции вогнут. При переходе через точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ вогнутость меняется на выпуклость и наоборот, поэтому эти точки являются точками перегиба;

б) находим: $y' = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$, $\quad y'' = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$. Видим, что $y'' < 0$, если $(-\infty, 2)$, т. е. график функции выпуклый, $y'' > 0$, если $(2, +\infty)$, т. е. график функции вогнутый. Точка $x = 2$ является точкой перегиба. Заметим, что в этой точке не существует ни y', ни y''.

Задачи для самостоятельного решения

26.2. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба для следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

26.3. Докажите, что у любой дважды дифференцируемой функции между двумя точками экстремума лежит по крайней мере одна точка перегиба графика функции.

26.4. На примере функции $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ убедитесь, что между двумя точками перегиба графика функции может и не быть точек экстремума.

27. Асимптоты графика функции

Пусть график функции $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ имеет ветви, уходящие в бесконечность. Прямую $y = kx + b$ называют наклонной асимптотой графика функции, если величина $\alpha(x) = kx + b - f(x)$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} [kx + b - f(x)] = 0. \tag{а}$$

При этом если окажется $k = 0$, то асимптоту называют горизонтальной. Очевидно, если

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \tag{б}$$

то прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота.

Прямую $x = x_0$ называют вертикальной асимптотой, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \tag{в}$$

Из (а) следует, что

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]. \tag{г}$$

Если пределы (г) существуют, то асимптоту называют наклонной двусторонней, если же эти пределы существуют только при $x \to +\infty$, то асимптоту называют правой односторонней. Если же эти пределы существуют только при $x \to -\infty$, то асимптоту называют левой односторонней. Аналогично если предел (в) существует только при $x \to x_0 + 0$ или $x \to x_0 - 0$, то асимптоту называют либо правой вертикальной асимптотой, либо левой. Горизонтальная асимптота также может быть односторонней или двусторонней.

Если функция $f(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то наклонные асимптоты $y = kx + b$ могут быть только тогда, когда существует такое значение $t = t_0$, при котором одновременно $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$. При этом прямая $y = kx+b$ является асимптотой, если $k = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$, $b = \lim\limits_{t\to t_0} [y(t) - kx(t)]$.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$.

27.1. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение: а) прямая $x = 0$ является двусторонней вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3} = \infty$.

Находим:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^4} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = 1,$$

следовательно, прямая $y = 2x + 1$ является наклонной двусторонней асимптотой;

б) вертикальных асимптот нет. Проверим существование наклонных асимптот. Нужно различать случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Находим

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) = -1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0,$$

так как оба слагаемые в знаменателе при $x \to -\infty$ стремятся к $+\infty$. Таким образом, прямая $y = -x$ является левой наклонной асимптотой.

Поскольку

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0,$$

то прямая $y = x$ — правая наклонная асимптота.

27.2. Найдите асимптоты следующих функций, заданных параметрически:

$$\text{а)}\begin{cases} x = \dfrac{2e^t}{t-1}, \\ y = \dfrac{te^t}{t-1}; \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{t}{t+1}. \end{cases}$$

Решение: а) при $t \to 1$ обе координаты x и y стремятся к ∞, поэтому возможна наклонная асимптота. Находим:

$$k = \lim_{t\to1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1} \frac{te^t}{t-1} \cdot \frac{t-1}{2e^t} = \lim_{t\to1} \frac{t}{2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{t\to1} [y(t) - kx(t)] = \lim_{t\to1} \left(\frac{te^t}{t-1} - \frac{e^t}{t-1} \right) =$$

$$= \lim_{t\to1} \left[\frac{e^t}{t-1}(t-1) \right] = e.$$

Таким образом, прямая $y = \dfrac{1}{2}x + e$ является наклонной асимптотой. Других асимптот нет;

б) так как x и y одновременно к ∞ не стремятся при $t \to t_0$, то наклонных асимптот нет. При $t \to -1$ имеем

$$\lim_{t\to-1} y(t) = \lim_{t\to-1} \frac{t}{t+1} = \infty, \ \lim_{t\to-1} x(t) = \lim_{t\to-1} \frac{1}{t} = -1,$$

следовательно, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

При $t \to 0$ находим:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} = \infty, \quad \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t+1} = 0,$$

следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой.

Задачи для самостоятельного решения

27.3. Найдите асимптоты следующих функций:

а)$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 3}$; б)$f(x) = \dfrac{|x^3|}{x^2 + 9}$;

в)$f(x) = \sqrt[4]{16x^4 + 1}$; г)$f(x) = x + \arccos \dfrac{1}{x}$;

д)$f(x) = xe^{1/x}$.

27.4. Найдите асимптоты следующих функций, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{t-8}{t^2-4}, \\ y = \dfrac{3}{t(t^2-4)}. \end{cases}$

28. Исследование функций и построение графиков

Можно предложить следующий план действий.

1. Найти область определения и область значений функции.

2. Определить, является ли функция четной или нечетной или является функцией общего вида.

3. Выяснить, является ли функция периодической или непериодической.

4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и охарактеризовать их, указать вертикальные асимптоты.

5. Найти наклонные асимптоты.

6. Найти производную функции и определить участки монотонности функции, найти точки экстремума.

7. Найти вторую производную, охарактеризовать точки экстремума, если это не сделано с помощью первой производной,

указать участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

8. Вычислить значения функции в характерных точках.

9. По полученным данным построить график функции.

28.1. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и постройте её график.

Решение

1. Область определения функции $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup \cup (2, +\infty)$. Область значений функции $(-\infty, +\infty)$.

2. Так как $f(-x) = -f(-x)$, то функция $f(x)$ нечётна.

3. Функция непериодическая.

4. Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 2$, где она терпит разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to\pm 2} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \infty$. Прямые $x = 2$ и $x = -2$ — двусторонние вертикальные асимптоты.

5. Находим наклонные асимптоты $y = kx + b$. Нами показано, что

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(4-x^2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{4x-x^3} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x \right) = \frac{4x}{4-x^2} = 0.$$

Итак, прямая $y = -x$ — наклонная асимптота.

6. Находим

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) + 2x \cdot x^3}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}.$$

Видим, что точки $x = 0$ и $\pm\sqrt{12} = \pm 3{,}46$ — критические. Из неравенства $x^2(12-x^2) < 0$, $x \neq \pm 2$, следует, что при $x \in (-\infty, -\sqrt{12})$ и $x \in (\sqrt{12}, +\infty)$ функция $f(x)$ убывает, а из неравенства $x^2(12-x^2) > 0$, $x \neq \pm 2$, получаем, что на промежутках $(-\sqrt{12}, -2)$, $(-2, 2)$ и $(2, \sqrt{12})$ функция возрастает.

Отсюда следует, что в точке $x = -\sqrt{12}$ функция имеет минимум, равный

$$f(-\sqrt{12}) = \frac{-3{,}46^3}{4-12} \cong \frac{41{,}42}{8} \cong 5{,}18,$$

а в точке $x = +\sqrt{12}$ — максимум, равный $-5{,}18$.

7. Находим

$$f''(x) = \left[\frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2}\right]' = \frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$$

(промежуточные вычисления предлагаем проделать самостоятельно). Видим, что $f''(x) > 0$ на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(0, 2)$. На этих промежутках функция вогнута. На промежутках $(-2, 0)$ и $(2, +\infty)$ имеем $f''(x) < 0$, следовательно, функция выпукла. В точке $x = 0$ функция непрерывна, и при переходе через неё функция из вогнутой становится выпуклой. Поэтому $x = 0$ является точкой перегиба.

Для удобства построения графика полученные данные, а также значения функции в некоторых точках занесём в таблицы.

x	-4	$-3{,}46$	$-2{,}5$	-1	0	1	$2{,}5$	$3{,}46$	4
y	5,33	5,18	6,94	$-0{,}33$	0	0,33	$-6{,}94$	$-5{,}18$	$-5{,}33$
		min			п*			max	

* — перегиб.

x	$(-\infty; -3{,}46)$	$(-3{,}46; -2)$	$(-2; 2)$	$(2; 3{,}46)$	$(-3{,}46; +\infty)$
y	убывает	возрастает			убывает

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
y	вогнута	выпукла	вогнута	выпукла

Асимптоты $x = 2$, $x = -2$ и $y = -x$.

На основании этих данных строим график функции (рис. 28.1). Рекомендуется построить сначала асимптоты.

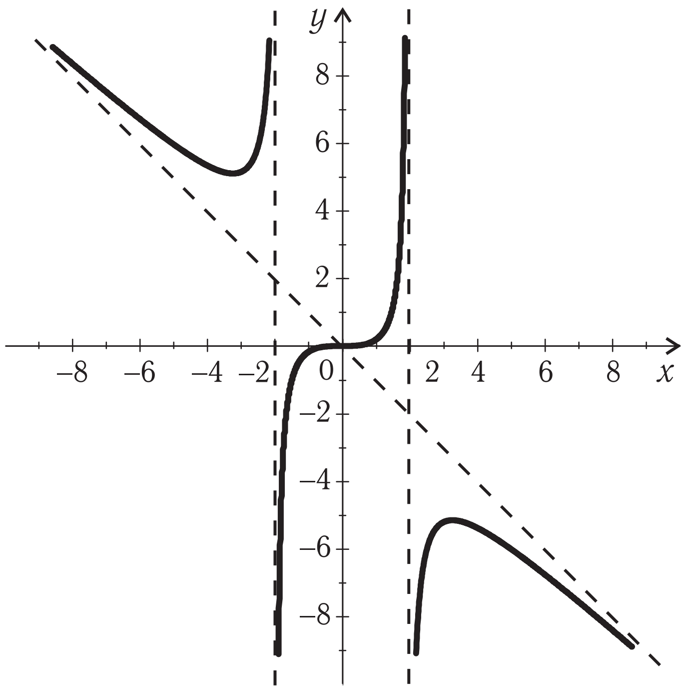


Рис. 28.1

Задачи для самостоятельного решения

28.2. Проведите полное исследование и постройте графики следующих функций:

а) $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$; б) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$;

в) $y = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$; г) $y = x + \ln(x^2-1)$; д) $y = x^2 e^{1/x}$.

Рекомендуется проделать все исследование самостоятельно, а затем проверить себя, используя пособие [13].

28.3. Постройте графики гиперболических функций:

а) $y = \operatorname{sh} x$; б) $y = \operatorname{ch} x$; в) $y = \operatorname{th} x$; г) $y = \operatorname{cth} x$.

Литература

1. Бараненков Г.С. Задачи и упражнения по математическому анализу / Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1970. – 472 с.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1975. — 416 с.

3. Сборник задач по математике / В.А. Болгов [и др.] – М.: Наука, 1984. – 464 с.

4. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных / В.Ф. Бутузов [и др.] – М.: Высшая школа, 1988. – 288 с.

5. Задачи по математике. Начала анализа / В.В. Вавилов [и др.] – М.: Наука, 1990. – 608 с.

6. Ельцов А.А. Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных / А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников. – Томск: Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. – 228 с.

7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан. – Харьков: Харьковский гос. ун-т, 1965. – 575 с.

8. Куваев М.Р. Методика преподавания математики в вузе / М.Р. Куваев. – Томск: Томский гос. ун-т, 1990. – 390 с.

9. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч. I / М.Р. Куваев. – Томск: Томский гос. ун-т, 1967. – 494 с.

10. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч. I / М.Р. Куваев. – Томск: Томский гос. ун-т, 1973. – 376 с.

11. Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике / А.А. Кузнецов. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.

12. Магазинников Л.И. Высшая математика I / Л.И. Магазинников. – Томск: Томская государственная академия систем управления и радиоэлектроники, 1998. – 192 с.

13. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах / И.А. Марон – М.: Наука, 1970. – 400 с.

14. Константин Петров. Сборник задач по алгебре / Константин Петров. – М.: Просвещение, 1984. – 208 с.

15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1958. – 608 с.

Ответы

1.12. а) {1;2;4;7;8;10}; б) {1;2;3;4;5;6;8}; в) {2;8}; г) {7;10}; д) {3;5;6}.

1.13. а) $A + B = A$; б) $A + C = A$; в) $B + C = B$; г) $AB = B$; д) $AC = C$; е) $BC = C$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$; и) множество натуральных чисел, представимых в виде $2(2m + 1), m = 0, 1, 2, ...$; к) множество натуральных чисел, представимых в виде $4(2m + 1), m = 0, 1, 2, ...$; л) $\varnothing$; м) множество нечётных чисел.

1.18. а) $(-5;5]$; б) $[-3;3)$; в) $(-5, -3)$; г) $[3;5]$; д) $A = (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$; е) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

1.19. а) A; б) B; в) $[1; 2) \cup [6; 10]$; г) $\varnothing$.

1.21. 4; -1.

1.22. 1.

1.23. $(-\infty; -5) \cup (1, +\infty)$.

1.27. а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $-\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{3}{2}$; г) 2; д) 6; е) $\dfrac{1}{2}$.

1.28. а) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1)$; б) $(-\infty < x < +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2.14. а) 2^{2x}; б) 2^{x^2}.

2.15. $(x + 2)^2$.

2.16. x.

2.17. 12; 4; -3.

2.18. 15; 11.

2.19. 29; -44; 37; -28.

2.20. 5; -54; 148.

2.21. а) $[-1; +\infty)$; б) $(-2;2)$; в) $[-1;2]$; г) $[1;2]$; д) две точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

2.22. а) $(-\infty; -18] \cup [-15; +\infty)$; б) $(-\infty; -14) \cup (-12; +\infty)$; в) $(-1; 12)$; г) $(-\infty; 2]$; д) $[-9; -8] \cup [14; +\infty)$; е) $(-\infty; -4] \cup [26; +\infty)$; ж) $(-13; -7] \cup [-6; 13]$.

2.24. а) $(4; +\infty)$; б) $(-1;3)$.

2.27. а) и в).

2.28. $y = \log_2 \dfrac{x}{1 - x}$.

2.32. а) $-5; 5$; б) $-13; 13$.

3.19. а) 11; б) 10; в) 3; г) ∞.

3.20. а) 4; б) 27; в) $\dfrac{3}{4}$; г) $\dfrac{2}{3}$; д) -30; е) $\dfrac{8}{7}$; ж) -192.

3.21. а) $\dfrac{3}{2}$; б) $\dfrac{5}{3}$; в) 3.

3.22. а) $\frac{1}{2}$; б) 8; в) 0; г) ∞; д) $-\frac{5}{17}$; е) $\sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{10}$; ж) 8.

3.23. а) -3; б) 5; в) 13; г) 14; д) -9.

3.24. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $-\frac{1}{12}$; г) $-\frac{1}{6}$; д) 4; е) 3.

3.25. а) $\frac{1}{2}$; б) ± 1; в) 2; г) $\frac{1}{2}$; д) $-\infty$; е) $\pm\frac{5}{2}$.

3.26. а) $+\infty$; б) 0; в) 0.

4.10. а) 3; б) 0; в) ∞; г) $\frac{1}{8}$.

4.11. а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) 1.

4.12. а) ∞; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{2}{3}$; г) 0.

4.14. $\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

4.15. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

4.16. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

4.17. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1; г) $-\frac{1}{2}$.

4.22. а) 1; б) 1; в) $\frac{2(1+\log_2 3)}{2+\log_2 3}$; г) 0.

4.23. а) 0; б) 1; в) 0.

4.24. а) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; б) а) $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

5.3. а) 4; б) $\frac{5}{3}$; в) 2; г) 5; д) $\frac{4}{3}$; е) 2; ж) $\frac{1}{6}$; з) 5; и) 7; к) $\frac{1}{2}$.

5.4. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{7}{2}$; д) $\sqrt{2}$; е) $-\frac{1}{12}$; ж) 3; з) $\pm\sqrt{2}$; и) $-\frac{1}{2}$.

5.5. а) $\cos a$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) -24; г) 1; д) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; е) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$; ж) $-\frac{10}{3\pi}$; з) 2.

5.6. а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; б) 1; в) $\frac{3}{2}$; г) 0; д) 0; е) -1; ж) 0; з) $\sin 1$; и) $-\sin a$.

6.6. а) e^2; б) $e^{4/5}$; в) 1; г) 0; д) $+\infty$; е) $e^{3/2}$; ж) e^2.

6.7. а) $e^{8/5}$; б) e; в) e^2; г) e^5; д) 1; е) ∞; ж) 0; з) e^{-1}; и) $e^{-1/2}$.

6.8. а) 0; б) 0; в) $+\infty$; г) $+\infty$; д) 0,25; е) 0,25.

7.9. а) $4\log_3 e$; б) $5\ln 2$; в) $\dfrac{3}{5}$; г) $5\lg e$; д) 3; е) $\dfrac{4}{3}$.

7.10. а) 2; б) $2\ln 5$; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $\log_2 e$; д) 2; е) $\dfrac{3}{4}$.

7.11. а) $\dfrac{16}{11}$; б) -12; в) 4; г) $-\dfrac{7}{52}\log_4 e$; д) 4; е) -8.

7.12. а) $\dfrac{4}{5}\ln 3$; б) $8\ln 2$; в) 4; г) $2\ln 5$; д) $27^2\ln 3$; е) -3.

7.13. а) 2; б) e^{-2}; в) 1; г) $\dfrac{1}{2}$; д) $\dfrac{1}{3}$; е) $\dfrac{1}{16}$.

7.14. а) -1; б) не существует; в) $-\dfrac{1}{2}$; г) 0; д) 0; е) 1; ж) 0; з) 1; и) не существует; к) 2; 3.

8.18. а) 3; б) 1; в) $\dfrac{5}{4}$; г) 9; д) 7; е) 10.

8.19. а) 4; б) $\dfrac{9}{5}$; в) 4; г) 5,75; д) 25; е) 10.

8.20. а) $\dfrac{(x-3)^{3/4}}{3}$; б) $\dfrac{x-2}{16}$; в) $2x^3$; г) $6\sqrt[3]{6}(x-3)^{4/3}$; д) $2x$; е) $-6(x-1)^2$.

8.21. а) $\dfrac{4}{x^5}$; б) $\dfrac{6}{x^7}$; в) $\dfrac{5}{x^{7/2}}$; г) $-\dfrac{7}{x^4}$; д) $\dfrac{4}{x^{10}}$; е) $\dfrac{1}{x^{11/4}}$.

8.22. а) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$; б) $\dfrac{9}{(x-2)^4}$; в) $\dfrac{8}{(x-4)^{1/4}}$; г) $\dfrac{4}{x-1}$; д) $\dfrac{5}{(x-2)^4}$; е) $-\dfrac{4}{x^4}$.

8.23. а) $3x^{9/4}$; б) $\dfrac{x^2}{5}$; в) $\dfrac{3}{x^3}$; г) $\dfrac{2}{x^3}$.

8.25. а) $\dfrac{8}{9}$; б) $\dfrac{1}{5}$; в) -4; г) -3; д) 80; е) 17; ж) 35; з) -72.

9.9. а) первого рода; б) устранимый; в) второго рода; г) первого рода; д) второго рода; е) устранимый; ж) первого рода.

9.10. а), в), г), е) устранимый разрыв; б) и д) точка непрерывности.

9.11. а) -2 1 0 2 2 1; б) -2 1 0 у 2 2; в) 4 у 12 1 17 2; г) 6 2; д) точек разрыва нет; е) -14 1 -13 2 -10 у.

9.12. а) -2 2 0 1 1 у; б) -4 у 3 2; в) -7 у 7 2 8 1; г) 4 1 8 2; д) -6 2 6 2 15 1; е) 2 2 7 у.

9.14. а) непрерывна справа, устранимый разрыв слева;
б) непрерывна слева, устранимый разрыв справа;
в) непрерывна справа, разрыв 2-го рода слева;
г) разрыв 2-го рода и слева и справа.

10.11. а) e^4; б) 1; в) 0; г) 2; д) 0.

10.12. а) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}$; г) $0, 1$; д) $\dfrac{1}{2}, 1$.

12.9. а) $\dfrac{67}{3}$; б) -27; в) 20; г) -20; д) -25; е) 36;

12.10. а) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{2\pi + 1}{16}$; в) $\dfrac{2}{9}$; г) $-\dfrac{4}{9}$; д) 4; е) 2; ж) 20; з) -71.

12.11. а) $40 \cdot 3^{19}$; б) $\dfrac{5}{2}$; в) $-4\sqrt{3}$; г) $12 \ln 3$; д) $-\dfrac{\pi}{8}$; е) $\sqrt{3}\pi/4$; ж) $\dfrac{3}{2} \cos^2 1 \sin 1$; з) $\dfrac{1}{2e^2 \ln 2}$; и) $-\dfrac{\pi^3}{4}$; к) -10; л) -2; м) 0,5.

12.12. а) $y' = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4}\sqrt{(x+3)^5}} \times$
$\times \left[\dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{4}{3(x+2)} - \dfrac{5}{2(x+3)}\right]$;
б) $y' = e^x \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x \left(1 + 2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{tg} 3x + \dfrac{5}{\operatorname{tg} 5x} \dfrac{1}{\cos^2 5x}\right)$.

12.13. а) $(\ln x)^{\sqrt[3]{x}} \left(\dfrac{\ln \ln x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \dfrac{1}{x \ln x}\right)$; б) $(\sqrt{x})^x \left(\dfrac{1}{2} \ln x + \dfrac{1}{2}\right)$;
в) $\sqrt[x]{x^2+1} \left[\dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]$; г) $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\cos x \ln \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}\right)$;
д) $-(\operatorname{ctg}^2 x)^{1/x} \left(\dfrac{1}{x^2} \ln \operatorname{ctg}^2 x + \dfrac{1}{x} \dfrac{2}{\operatorname{ctg} x} \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;
е) $(\cos x)^{1+x^3} \left[3x^2 \ln \cos x - (1 + x^3) \operatorname{ctg} x\right]$.

12.15. а) $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sh} \dfrac{x}{2} + \operatorname{ch} \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} e^{x/2}$; б) $\operatorname{th} x$; в) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$; г) $4 \operatorname{sh} 4x$;
д) $12 \operatorname{ch}^3 3x \cdot \operatorname{sh} 3x$; е) $10 \operatorname{th} 5x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; ж) $-15(\operatorname{cth} x)^4 \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 3x}$.

12.16. а) $\dfrac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})}$; б) $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; в) $\dfrac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$; г) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$;
д) $\dfrac{1}{(a^2 - x^2)^2}$; е) $\dfrac{1}{x(a^2 + x^2)}$; ж) $\dfrac{x^{3/2}}{a^2 + b^2 x}$.

13.4. а) $\dfrac{18x}{(4-9x^2)^2}$; б) $\dfrac{9x}{\sqrt{(16-9x^2)^3}}$; в) $\dfrac{-18x}{(4+9x^2)^2}$;
г) $e^{x^2+2x+2}\left[(2x+2)^2+2\right]$;
д) $2^{\sin^3 x}\ln 2\left(9\sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\ln 2+6\sin x\cdot\cos^2 x-3\sin^3 x\right)$.

13.5. а) $y'=\ln x+1$, $y''=\dfrac{1}{x}$, $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$;
б) $y'=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$, $n=2,3,4,\ldots$;
в) $\dfrac{1}{2}\left\{6^n\sin\left(6x+n\dfrac{\pi}{2}\right)-2^n\sin\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$;
г) $\dfrac{2(-1)^n\cdot n!}{(x+4)^{n+1}}+\dfrac{3(-1)^n\cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$; д) $(-1)^{n+1}(n-1)!\left[\dfrac{1}{(x+1)^n}+\dfrac{1}{(x-1)^n}\right]$;
е) $\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$; ж) $4^n e^{4x+3}$.

13.6. а) $-x^2\sin x+20x\cos x+90\sin x$; б) $x\operatorname{ch}x+100\operatorname{sh}x$;
в) $3^x x^2(\ln 3)^{20}+40\cdot 3^x\cdot x(\ln 3)^{19}+380(\ln 3)^{18}3^x$;
г) $(-1)^{n-1}2^{-n}(2n-5)!!(x-1)^{(1-2n)/2}$;
д) $(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2nx+n(n-1)\right]$.

13.7. а) $y'''=\begin{vmatrix}1\\x\\x^2\end{vmatrix}$; б) $y'''=\begin{vmatrix}-8\cos 2x\\8\sin 2x\\6\end{vmatrix}$; в) $y'''=6\mathbf{i}-\cos t\mathbf{k}$;
г) $y'''=8e^{2t+3}\mathbf{i}-\dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}+4\sin 2t\mathbf{k}$.

14.14. а) $u'_x(M_0)=-\dfrac{4}{3}$, $u'_y(M_0)=\dfrac{2}{3}$, $u'_z(M_0)=\dfrac{13}{3}$;
б) $u'_x(M_0)=-1$, $u'_y(M_0)=-8$, $u'_z(M_0)=16$;
в) $u'_x(M_0)=0{,}6$, $u'_y(M_0)=0{,}8$, $u'_z(M_0)=15$;
г) $u'_x(M_0)=-1{,}25$, $u'_y(M_0)=1{,}5$, $u'_z(M_0)=0{,}25$.

14.16. а) $u''_{xx}(M_0)=2$, $u''_{yy}(M_0)=4$, $u''_{zz}(M_0)=9$, $u''_{yx}(M_0)=0$,
$u''_{yz}(M_0)=6$, $u''_{zx}(M_0)=0$;
б) $u''_{xx}(M_0)=\dfrac{2}{125}$, $u''_{yy}(M_0)=\dfrac{23}{125}$, $u''_{zz}(M_0)=0$, $u''_{xy}(M_0)=-\dfrac{36}{125}$,
$u''_{zx}(M_0)=-\dfrac{3}{125}$, $u''_{yz}(M_0)=\dfrac{4}{125}$;
в) $u''_{xx}(M_0)=-14$, $u''_{yy}(M_0)=24$, $u''_{zz}(M_0)=0$,
$u''_{xy}(M_0)=u''_{yx}(M_0)=0$, $u''_{xz}(M_0)=u''_{zx}(M_0)=0$,
$u''_{yz}(M_0)=u''_{zy}(M_0)=4$;

г) $u''_{xx}(M_0) = \dfrac{6}{49}$, $u''_{yy}(M_0) = \dfrac{3}{49}$, $u''_{zz}(M_0) = -\dfrac{2}{49}$, $u''_{xy}(M_0) = -\dfrac{2}{49}$, $u''_{xz}(M_0) = -\dfrac{3}{49}$, $u''_{yz}(M_0) = -\dfrac{6}{49}$.

14.17. а) $u'''_{xxx}(M_0) = -8$, $u'''_{yyy}(M_0) = -27$, $u'''_{zzz}(M_0) = -64$, $u'''_{xxy}(M_0) = -12$, $u'''_{yyx}(M_0) = -18$, $u'''_{xxz}(M_0) = -16$, $u'''_{yyz}(M_0) = -36$, $u'''_{zzx}(M_0) = -32$, $u'''_{zzy}(M_0) = -48$, $u'''_{xyz}(M_0) = -24$;
б) $u'''_{xxx}(M_0) = 48$, $u'''_{yyy}(M_0) = 60$, $u'''_{yxx}(M_0) = -12$, $u'''_{xyy}(M_0) = 12$.

14.19. а) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\left(-\dfrac{2}{x^3}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{1}{x}$,
$\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{6}{x^4} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\dfrac{4}{x^6} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{4}{x^4}$;
б) $\dfrac{dz}{dx} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u}e^{2x} + \cos x\dfrac{\partial f}{\partial v}$,
$\dfrac{d^2z}{dx^2} = 4e^{2x}\dfrac{\partial f}{\partial u} - \sin x\dfrac{\partial f}{\partial v} + 4e^{4x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 4e^{2x}\cos x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;
в) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 3x^2$, $\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial f}{\partial u} + 6x\dfrac{\partial f}{\partial v} + 4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} +$
$+9x^4\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 12x^3\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 2x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial x} + 3x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial x}$;
г) $\dfrac{dz}{dx} = \sin 2x f(u,v) + 2\sin^2 x\dfrac{\partial f}{\partial u} + 5\sin^2 x\dfrac{\partial f}{\partial v}$,
$\dfrac{d^2z}{dx^2} = 2\cos 2x f(u,v) + 4\sin 2x\dfrac{\partial f}{\partial u} + 10\sin 2x\dfrac{\partial f}{\partial v} + 4\sin^2 x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} +$
$+ 25\sin^2 x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 20\sin^2 x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$.

15.4. а) $\left\{\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right\}$; б) $\left\{-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$; в) $\{1; 2; 3\}$; г) $\{4; 10; -3\}$; д) $\{-12; 0; -6\}$.

15.5. а) $\{-4; 2; 2\}$, $\sqrt{24}$; б) $\{8; 8; 9\}$, $\sqrt{209}$.

15.6. а) 3; б) $-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$; в) 14; г) 10; д) -34.

15.7. $-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

15.8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15.9. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

16.3. а) $\dfrac{1}{2}$; б) -1; в) 20; г) -28; д) 7.

17.6. а) $-\dfrac{2x^3-3xy^2}{2y^3-3x^2y}$; б) $\dfrac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$; в) $\dfrac{8x+12y+9}{32-9x-12y}$; г) $\dfrac{28x^3+2y+1}{12y^2-2x-47}$.

17.7. а) 3 или -1; б) 1; в) -6; г) -17.

17.8. а) $\dfrac{e^x(e^y+1)^2-e^y(e^x+1)^2}{(e^y+1)^3}$; б) $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; в) $\dfrac{\alpha\sin y}{(1+\alpha\cos y)^3}$; г) $\dfrac{3(2x+2y-1)}{(x+y+1)^3}$.

17.9. а) $-\dfrac{2}{3}$; б) $4; -4$; в) 1990; г) 344.

17.10. а) $-\dfrac{3x^2y^2+2xz^3}{3z^2x^2+2zy}$, $-\dfrac{2x^3y+z^2}{3z^2x^2+2zy}$; б) $-\dfrac{z}{x}$, $-\dfrac{z}{y}$; в) $\dfrac{3(x+2y+3z)^2}{9(x+2y+3z^2)+8z^3}$, $\dfrac{3(x+2y+3z)}{9(x+2y+3z^2)^2+8z^3}$; г) $\dfrac{yz+2(1+x^2y^2z^2)}{xy+2(1+x^2y^2z^2)}$, $\dfrac{xz+3(1+x^2y^2z^2)}{xy+2(1+x^2y^2z^2)}$.

17.11. а) $-\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$, $-\dfrac{xy}{z^3}$, $-\dfrac{y^2+z^2}{z^3}$; б) $-\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$; в) $\dfrac{4x^2(\sin z-2)-2(2z+\cos z)^2}{(2z+\cos z)^3}$; $\dfrac{2xy(2-\sin z)}{(2z+\cos z)^3}$; $\dfrac{4y^2(\sin z-2)-2(2z+\cos z)^2}{(2z+\cos z)^3}$; г) $\dfrac{2z}{x^2}$; $\dfrac{z}{xy}$; $\dfrac{2z}{y^2}$.

17.12. а) $z''_{xx}(M_0)=\dfrac{1}{4}=z''_{yy}$, $z''_{xy}(M_0)=-\dfrac{1}{4}$; б) $z''_{xx}(M_0)=-\dfrac{2}{5}$, $z''_{yy}(M_0)=-\dfrac{394}{125}$, $z''_{xy}(M_0)=-\dfrac{1}{5}$; в) $z''_{xx}(M_0)=\dfrac{1}{16}$, $z''_{yy}(M_0)=\dfrac{1}{64}$, $z''_{xy}(M_0)=\dfrac{1}{32}$.

18.10. $V=14$ м/с, $a=12$ м/с^2.

18.11. $0{,}2\pi$ м^2/с; $0{,}05\pi$ м^3/с.

18.12. $-1{,}2$ м/с.

18.13. а) $2x+y=0$, $x-2y+5=0$; б) $8x+y+7=0$, $x-8y+74=0$; в) $19x-y-23=0$, $x+19y-287=0$; г) $27x+y-12=0$, $x+27y+406=0$.

18.14. а) $9x+2y+12=0$, $2x-9y+31=0$; б) $3x-y-5=0$, $x+3y-5=0$; в) $42x+y-85=0$, $x-42y+40=0$.

18.16. $3x+2y\pm 9=0$.

18.17. $3x-4y\pm 10=0$.

18.18. а) $2x-y-3=0$, $x+2y-14=0$; б) $x-2y+1=0$, $2x+y-8=0$; в) $27x+y-76=0$, $x-27y+592=0$; г) $4x-y-4=0$, $x+4y+4=0$.

18.19. а) $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $x+2y+3z-9=0$; б) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-\pi/2}{-1}$, $2x+y-z+\dfrac{\pi}{2}=0$; в) $\dfrac{x-14}{7}=\dfrac{y+9}{7}=\dfrac{z-1}{1}$, $7x+7y+z-36=0$; г) $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-16}{18}=\dfrac{z+6}{-1}$, $3x+18y-z+264=0$.

18.20. а) $12x-8y-z-32=0$, $\dfrac{x-2}{12}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-8}{-1}$; б) $12y-z+14=0$, $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{12}=\dfrac{z+10}{-1}$; в) $12x+48y+z-63=0$, $\dfrac{x+3}{12}=\dfrac{y-2}{48}=\dfrac{z-3}{1}$.

18.21. а) $x-2y+3z-6=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$; б) $4x-y-4z-12=0$, $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-4}$; в) $x+54y+14z+196=0$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{54}=\dfrac{z}{14}$.

18.22. $x+y+z=2\sqrt{10}$.

18.23. $x+4y+6z-21=0$.

19.14. а) $dy=-\dfrac{2dx}{x^3}$; б) $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$; в) $dy=\dfrac{|a|}{a}\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

19.15. а) $du=\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy$; б) $du=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$; в) $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$.

19.17. а) $\Delta y=0{,}6432$, $dy=0{,}64$; б) $\Delta y=0{,}131405$, $dy=0{,}13$.

19.18. а) 2,003; б) 0,9948.

19.19. а) $\Delta z \cong 0{,}19898$, $dz = 0{,}20$; б) $\Delta z = 0{,}0201$, $dz = 0{,}02$.

19.20. а) 31,128; б) 2,95.

19.23. а) $d^2z = \dfrac{y^2(dx)^2 - xydxdy + x^2(dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;
б) $d^2z = \dfrac{z[(6x^2-2y^2)(dx)^2 + (6y^2-2x^2)(dy)^2 + 16xydxdy]}{(x^2+y^2)^3} - $
$- \dfrac{4xdxdz - 4ydydz}{(x^2+y^2)^2}$; в) $d^2z = \dfrac{2}{y^3}[x(dy)^2 - ydxdy]$;
г) $d^2z = 6[(x-y)(dx)^2 + 2(y-x)dxdy + (y+x)(dy)^2]$.

19.24. а) $d^2z = [f''(t)(\sin 2x)^2 + f'(t)2\cos 2x](dx)^2$;
б) $d^2z = \left[f''(t)\dfrac{y^2}{x^4} + \dfrac{2yf'(t)}{x^3}\right](dx)^2 - 2\left[\dfrac{y}{x^3}f''(t) + \dfrac{f'(t)}{x^2}\right]dxdy +$
$+ f''(t)\dfrac{(dy)^2}{x^2}$; в) $d^2z = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}a^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}ab + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}b^2\right)(dx)^2$; г) $d^2z =$
$= \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(dx)^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)dxdy +$
$+ \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(dy)^2$.

19.25. а) $dy = \dfrac{x+y}{y-x}dx$, $d^2z = \dfrac{2a^2}{(x-y)^3}(dx)^2$;
б) $dy = \dfrac{y}{x}dx$, $d^2y = 0$.

19.26. а) $dz = \dfrac{(yz-1)dx + (xz-1)dy}{1-xy}$,
$d^2z = \dfrac{2y(yz-1)(dx)^2 + 4zdxdy + 2x(xz-1)(dy)^2}{(1-xy)^2}$;
б) $dz = \dfrac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}$, $d^2z = -\dfrac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

20.5. а) $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$;
б) $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$.

20.6. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16}(x-4) + \dfrac{3}{256}(x-4)^2 - \dfrac{15}{48\cdot 128}(x-4)^3 +$
$+ \dfrac{15\cdot 7}{16\cdot 512\cdot 24}(x-4)^4 + R_5$; б) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + R_4$;
в) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + R_3$.

20.7. а) 2,012; б) 0,049; в) 0,197; г) 0,779.

20.8. $z = \sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right] -$
$- \frac{1}{2 \cdot 2!}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] + R_3.$

20.9. а) $z = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + R_4$; б) $z = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) + R_4$; в) $z = x^2 + y^2 + R_4$.

21.6. а) непрерывна, не дифференцируема, $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = -1$; б) дифференцируема; в) непрерывна, не дифференцируема, $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ не существуют; г) дифференцируема; д) непрерывна, не дифференцируема, $f'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$, $f'_+(0) = \frac{\pi}{2}$.

21.9. а), б), г) — выполнены; в) и д) — не выполнены.

21.12. а) $-\frac{1}{6}$; б) $e - 1$.

21.13. Нет.

21.14. $C = 2$.

22.4. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{8}{25}$; в) 2; г) $\frac{1}{2}$.

22.5. а) $\frac{1}{9}$; б) $\cos 10$; в) -2.

22.6. а) $\frac{1}{\pi}$; б) 0; в) $\frac{2}{3}$; г) 0.

22.7. а) 4; б) 1; в) 1.

22.8. а) 0; б) 1.

23.6. $a \leq 0$.

23.7. а) на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ возрастает, на $(-1; 1)$ убывает; б) на $(-\infty; 0)$ возрастает, на $(0; +\infty)$ убывает; в) возрастает на всей оси; г) на $(0; 1) \cup (1; e)$ убывает, на $(e; +\infty)$ возрастает.

24.5. а) нет точек экстремума; б) $x_1 = 0$ — точка максимума, $x_2 = 1$ — точка минимума; в) $x_1 = 0$ — точка минимума, $x_2 = -\frac{2}{5}$ — точка максимума; г) $x_1 = 5$ и $x_2 = -1$ — минимумы, $x_3 = \frac{1}{2}$ — максимум.

24.6. а) $x_0 = e$ — минимум; б) $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ — минимум, $x_3 = 2$ — максимум; в) нет точек экстремума; г) $x = 3$ — максимум.

24.7. а) $M_1(\sqrt{2};\sqrt{-2})$ и $M_2(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ — минимумы; б) $(0;0;0)$ — минимум; в) $M(2;3;1)$ — минимум; г) $M(6;4)$ — максимум.

24.8. а) $M_1\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ — условный максимум; б) $M_1(-1;2)$ — условный максимум; $M_2(3;-2)$ — условный минимум; в) $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ — условный минимум, $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ — условный максимум; г) $M_1(-2;3)$ и $M_2(2;-3)$ — условный минимум; $M_3\left(-\frac{3}{2};-4\right)$ и $M_4\left(\frac{3}{2};4\right)$ — условный максимум; д) $M_1(1;1;1)$ — условный максимум; е) $M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ — условный минимум, имеется ещё пять точек условного экстремума.

25.6. а) 2 и -10; б) 1 и $\frac{3}{5}$; в) 5 и 0.

25.7. $H=2R$.

25.8. $H=\frac{4}{3}R$.

25.9. а) 1 и 61; б) -1 и 6; в) -16 и 192; г) 20 и 28.

25.10. $x=y=z=\sqrt[3]{V}$.

25.11. $\sqrt{2s}$, $\sqrt{2s}$ и $2\sqrt{s}$.

25.12. Все множители равны между собой.

26.2. а) $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$ — вогнутый, $(-\sqrt{3};0)$ и $(\sqrt{3};+\infty)$ — выпуклый; $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$ и $x_3=\sqrt{3}$ — точки перегиба; б) $(0;1)$ — выпуклый, $(1;+\infty)$ — вогнутый; $x=1$ — точка перегиба.

27.3. а) $x=3$ и $x=1$ — вертикальные двусторонние асимптоты, $y=x+4$ — наклонная двусторонняя асимптота; б) $y=-x$ — левая асимптота, $y=x$ — правая асимптота; в) $y=\pm 2x$ — односторонние асимптоты; г) $y=x+\frac{\pi}{2}$ — двусторонняя асимптота; д) $x=0$, $y=x+1$.

27.4. а) $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; б) $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$, $y=\frac{3}{20}x+\frac{9}{40}$, $x=2$.

Приложение

Некоторые формулы элементарной математики

Алгебра

- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
- Сумма членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d
$$S_n = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n.$$
- Сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a
$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$
- Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии
$$S_n = \frac{a}{1 - q}.$$
- Соединения и бином Ньютона:
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)n;$$
$$n!! = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n;$$
$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1).$$
- Число перестановок из m элементов
$$P_m = m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m.$$
- Число сочетаний из n элементов по m элементов
$$C_n^m = C_n^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$
- $(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + \cdots + C_n^m x^{n-m} a^m + \cdots + a^n.$

- Логарифмы:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1;$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x; \quad \log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Тригонометрия

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

$$\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

- Формулы приведения

Аргумент	sin	cos	tg	ctg
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

- Таблицы некоторых значений тригонометрических функций

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
π	0	-1	0	∞

- Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

- Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\alpha.$$

- Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Учебное издание

Магазинников Леонид Иосифович
Магазинников Антон Леонидович

Практикум
по дифференциальному исчислению

Учебное пособие

Корректор Л.И. Кирпиченко

Подписано в печать 05.10.2007.

Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 12,56.

Тираж 100 экз. Заказ 1263.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.

634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.